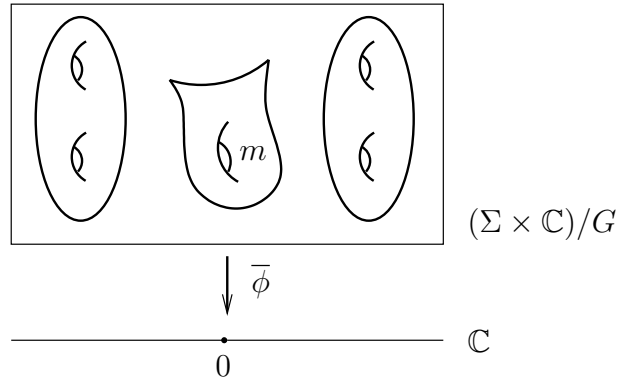


有限群の表現と商族と正多面体

高村 茂 (京都大学)

Dedicated to the seventieth birthday of Professor Yukio Matsumoto

巡回商構成 Σ は向き付け可能なコンパクト閉曲面とし, $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を位数 m の周期的同相写像とする. このとき Kerckhoff の定理より, Σ の複素構造で f が正則になるものが存在する. 次に, 写像 $g: \Sigma \times \mathbb{C} \rightarrow \Sigma \times \mathbb{C}$ を $g: (x, t) \mapsto (f(x), e^{2\pi i/m} t)$ で定め, G を g で生成される位数 m の巡回群とする. このとき G 不変関数 $\phi: \Sigma \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(x, t) = t^m$ は写像 $\bar{\phi}: (\Sigma \times \mathbb{C})/G \rightarrow \mathbb{C}$ を定める. これを退化という. (ここでは $(\Sigma \times \mathbb{C})/G$ の特異点を解消しない.)



ここで重複度 m は G の位数に等しい. また, $\bar{\phi}$ のモノドロミーは f^{-1} である.

商族 有限群 G が複素解析空間 Y に正則に作用しているとする. このとき, G の表現 $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ を与えるごとに商族が構成できる. まず, G は ρ を通じて \mathbb{C}^n にも作用することに注意. つまり, $g \in G$ は $\rho(g)$ として \mathbb{C}^n に作用する. このとき, 次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} Y \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{g} & Y \times \mathbb{C}^n \\ \text{射影 pr} \downarrow & & \downarrow \text{射影 pr} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}^n. \end{array}$$

よって, 写像 $\eta := \text{pr}: (Y \times \mathbb{C}^n)/G \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ が定まる. これを商族 (quotient family) という.

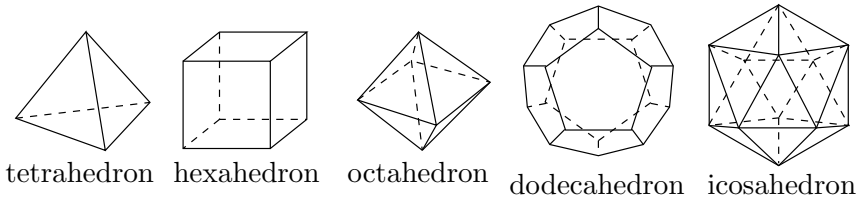
注: 巡回商構成において, G の代わりに改めて $G := \langle f \rangle$ と取り, 表現 $\rho: G \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$ を $\rho(f) = e^{2\pi i/m}$ で定めると, 商族 $\eta: (\Sigma \times \mathbb{C})/G \rightarrow \mathbb{C}/G$ は退化 $\bar{\phi}: (\Sigma \times \mathbb{C})/G \rightarrow \mathbb{C}$ にほかならない. ここで $\mathbb{C}/G \cong \mathbb{C}$ である. 実際, G の不変式環 $\mathbb{C}[t^m]$ は $\mathbb{C}[t]$ に同型.

商ファイバー定理 $s \in \mathbb{C}^n/G$ に対し, $\eta^{-1}(s) \cong Y/\text{Stab}_t$ である. ここで $t \in \mathbb{C}^n$ は $s \in \mathbb{C}^n/G$ の持ち上げで, $\text{Stab}_t \subset G$ は t の固定化群 (stabilizer).

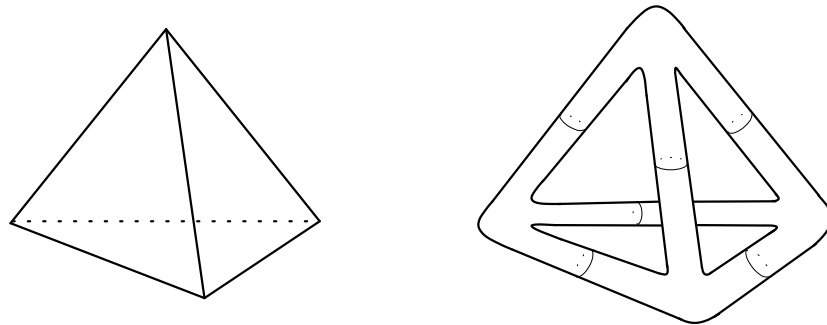
ファイバー $\eta^{-1}(s)$ の近くの一般ファイバー $\eta^{-1}(r)$ は, $r \rightarrow s$ のとき $|\text{Stab}_t|$ 重被覆 $\eta^{-1}(r) \rightarrow \eta^{-1}(s)$ としてつぶれていく (折り畳まれる). このことを念頭に置いて, $\eta^{-1}(s)$ の被覆重複度 (covering multiplicity) を Stab_t の位数 $|\text{Stab}_t|$ で定める. つまり, 被覆写像 $Y \rightarrow \eta^{-1}(s) = Y/\text{Stab}_t$ の次数が $\eta^{-1}(s)$ の被覆重複度である.

簡約化 ρ が単射なとき, ρ の一般ファイバーは Y であり, 被覆重複度は 1 である. 一方, ρ が単射でないときは, ρ の一般ファイバーは $Y/\text{Ker } \rho$ である. また, 被覆重複度は $|\text{Ker } \rho| \neq 1$ となり具合が悪い. これは次のようにして解消される: $K := \text{Ker } \rho$ とおく. ρ は $\bar{\rho}: \bar{G} = G/K \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ を誘導する. $\bar{Y} := Y/K$ とおくと, G の Y への作用は, \bar{G} の \bar{Y} への作用に自然に降下する. よって, 表現 $\bar{\rho}: \bar{G} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ から商族 $\bar{\eta}: (\bar{Y} \times \mathbb{C}^n)/\bar{G} \rightarrow \mathbb{C}^n/\bar{G}$ が定まる. これを $\eta: (Y \times \mathbb{C}^n)/G \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ の簡約化 (reduction) という. $\bar{\eta}$ の一般ファイバーは \bar{Y} , その被覆重複度は 1 である.

正多面体群の表現から作られる商族 正多面体は, 5 種類ある: 正四面体 (tetrahedron) \mathcal{T} , 正六面体 (hexahedron) \mathcal{H} , 正八面体 (octahedron) \mathcal{O} , 正十二面体 (dodecahedron) \mathcal{D} , 正二十面体 (icosahedron) \mathcal{I} .



正多面体の各辺をふくらませて得られた曲面を Y とする. たとえば



正四面体 \mathcal{T}

正四面体のケーブル曲面 Y

また, サッカーボール S に対しても, 正多面体と同様に辺をふくらませたケーブル曲面を考える. 以下では, \mathcal{P} は $\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{O}, \mathcal{D}, \mathcal{I}, S$ のいずれかとする. また, \mathcal{P} は \mathbb{R}^3 の中に重心が原点であるように埋め込まれているものとする.

\mathcal{P} の向きを保つ自己同相写像全体の成す群 $G := \text{Aut}_+(\mathcal{P})$ は $SO(3)$ の部分群である. また, G は自然に \mathcal{P} のケーブル曲面 Y に作用する. Kerckhoff の定理より, Y の複素構造で, この作用が正則であるものが存在する. 表現 $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ を与える毎に, 商族 $\eta: (Y \times \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ が定まる.

埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ から定まる商族を図3~図8に描いた．この表現は単射であるが， G のどの指標 (1次元表現) も単射ではない．

例 $G = \text{Aut}_+(\mathcal{T})$ のとき， $G \cong \mathfrak{A}_4$ ．ここで4次交代群 \mathfrak{A}_4 はクラインの4元群 \mathcal{K}_4 と巡回置換 $(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ で生成される：
 $\mathfrak{A}_4 = \langle \mathcal{K}_4, (1\ 2\ 3) \rangle$ ．

具体的には， $\mathcal{K}_4 = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ である．(\mathcal{K}_4 の3つの元 $(12)(34)$ ， $(13)(24)$ ， $(14)(23)$ は，2つの互換の積ゆえ偶置換，つまり \mathfrak{A}_4 の元である．) また抽象群として， \mathcal{K}_4 は $\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ で与えられ， $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である．幾何的には， $(12)(34)$ ， $(13)(24)$ ， $(14)(23) \in \mathcal{K}_4$ は \mathcal{T} の3通りの $1/2$ 回転に対応する (図1) ．

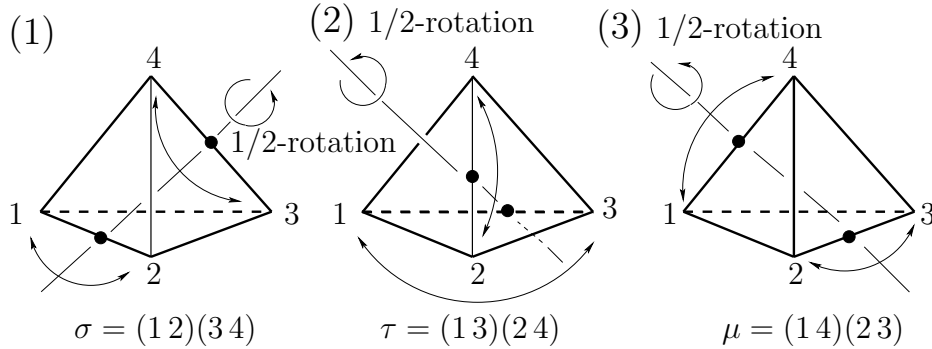


図1: 正四面体の3通りの $1/2$ 回転は，それぞれ偶置換 $(12)(34)$ ， $(13)(24)$ ， $(14)(23) \in \mathcal{K}_4$ で表される．

一方，巡回置換 (123) は正四面体 \mathcal{T} の $1/3$ 回転を表す (図2) ．

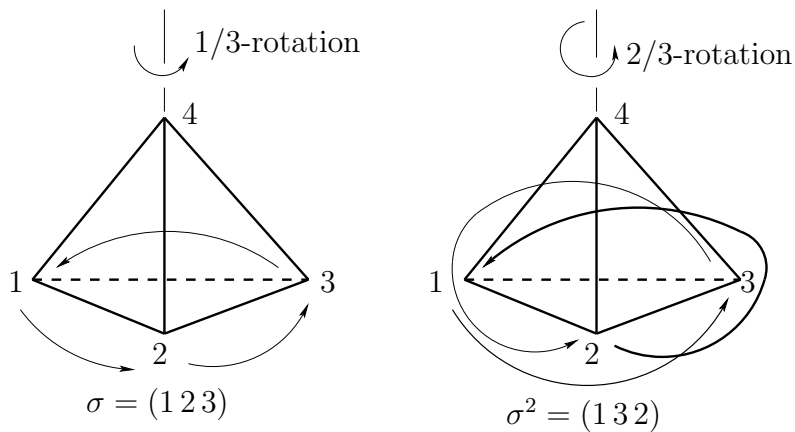


図2: 正四面体の $1/3$ 回転は巡回置換 $\sigma = (123) \in \mathfrak{A}_4$ (3つの頂点1, 2, 3を巡回的に動かし，頂点4を固定する置換) で表され， $2/3$ 回転は巡回置換 $\sigma^2 = (132) \in \mathfrak{A}_4$ で表される．

さて、正四面体群 G の自明でない指標は 2 つある: $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}_3 = \langle e^{2\pi i/3} \rangle$, $\chi' : G \rightarrow \mathbb{Z}_3 = \langle e^{2\pi i/3} \rangle$. これらは次のようにして定められる: $G = \langle \mathcal{K}_4, (1\ 2\ 3) \rangle$ に注意して、まず χ を $\chi(\mathcal{K}_4) = 1, \chi((1\ 2\ 3)) = e^{2\pi i/3}$ で定める. χ は G の指標である. 次に、 $\chi' := \chi^2$ とおくと、これも G の指標である. G の指標 χ を用いて構成された商族 $\eta : (Y \times \mathbb{C})/G \rightarrow \mathbb{C}/G \cong \mathbb{C}$ の簡約化 $\bar{\eta} : (\bar{Y} \times \mathbb{C})/\bar{G} \rightarrow \mathbb{C}/\bar{G} \cong \mathbb{C}$ を考える. $\bar{\eta}$ の一般ファイバーは、 $\bar{Y} := Y/\text{Ker}(\chi) = \mathbb{P}^1$ である (Riemann-Hurwitz の公式より、 $\text{genus}(\bar{Y}) = 0$ がわかる). また、 $\bar{\eta}$ のモノドロミーは $-\frac{1}{3}$ 回転である. 同様に、 G の指標 χ' を用いて構成された商族 $\eta' : (Y \times \mathbb{C})/G \rightarrow \mathbb{C}/G \cong \mathbb{C}$ の簡約化 $\bar{\eta}' : (\bar{Y} \times \mathbb{C})/\bar{G} \rightarrow \mathbb{C}/\bar{G} \cong \mathbb{C}$ の一般ファイバーは、 $\bar{Y} := Y/\text{Ker}(\chi') = \mathbb{P}^1$. また、 $\bar{\eta}'$ のモノドロミーは $-\frac{2}{3}$ 回転である.

正多面体群の 2 次元以上の既約表現のうち、単射でない既約表現は $G = \text{Aut}_+(\mathcal{H}) \cong \text{Aut}_+(\mathcal{O})$ の 2 次元表現 $\rho : G \rightarrow O(2)$ のみである. (このとき $\text{Ker}(\rho) = \mathcal{K}_4$.) 指標 χ の場合と同様に Riemann-Hurwitz の公式を用いて計算すると、正六面体 \mathcal{H} の場合、 $\bar{Y} = Y/\mathcal{K}_4$ は種数 2、正八面体 \mathcal{O} の場合、 $\bar{Y} = Y/\mathcal{K}_4$ は種数 1 である.

変幻部分と変幻ファイバー $\eta : (Y \times \mathbb{C}^n)/G \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ を、有限群 G の表現 $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ に付随する商族とする. \mathbb{C}^n/G の点 s のうち $\eta^{-1}(s) \neq Y$ を満たすもの全体のなす集合を変幻部分 (kaleido locus) といい、 KL_η で表す. $\eta^{-1}(s) = Y/\text{Stab}_t$ ($t \in \mathbb{C}^n$ は $s \in \mathbb{C}^n/G$ の持ち上げ) ゆえ、 KL_η は、固定化群が自明でない点 $t \in \mathbb{C}^n$ 全体の集合の商写像 $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ による像で与えられる. したがって、各 $g \in G$ に対し $\text{Fix}(g) := \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(g)z = z\}$ ($\rho(g) \in GL_n(\mathbb{C})$ の固定点集合) とおくと、

$$\text{KL}_\eta = \left(\bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} \text{Fix}(g) \right) / G.$$

(ρ が単射でないとき、 $\text{KL}_\eta = \mathbb{C}^n/G$ であることに注意.) KL_η 上の点 s 上のファイバー $\eta^{-1}(s)$ を変幻ファイバー (kaleido fiber) といい、その中でも特に、 $0 \in \text{KL}_\eta$ の逆像 $\eta^{-1}(0)$ ($= Y/G$) を結晶ファイバー (crystal fiber) という.

正多面体群の埋め込み表現に付随する商族の描写 正多面体群 (およびサッカーボールの向きを保つ変換群) $G := \text{Aut}_+(\mathcal{P})$ に対し、 G の埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ に付随する商族 $\eta : (Y \times \mathbb{C}^3)/G \rightarrow \mathbb{C}^3/G$ を描写する.

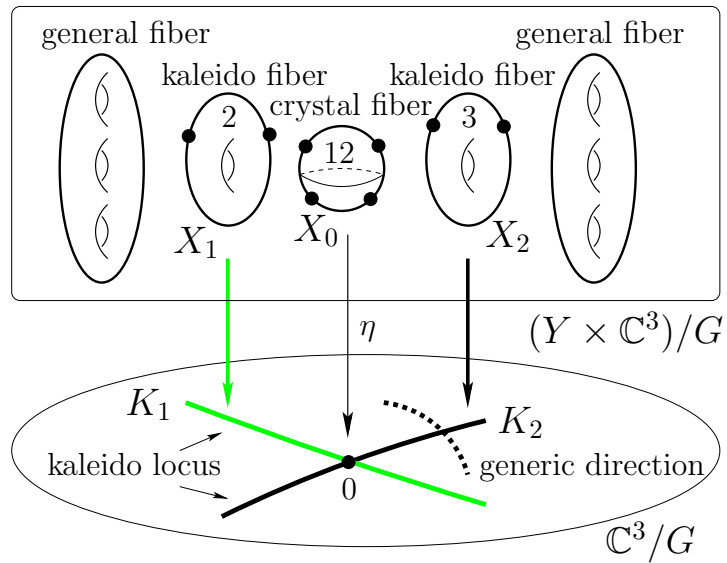


図 3: 正四面体群 $G := \text{Aut}_+(\mathcal{T})$ の埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ に付随する商族．変幻ファイバー X_1, X_2 および結晶ファイバー X_0 上の自然数はそのファイバーの被覆重複度を表し，黒点は $(Y \times \mathbb{C}^3)/G$ の商特異点を表す．

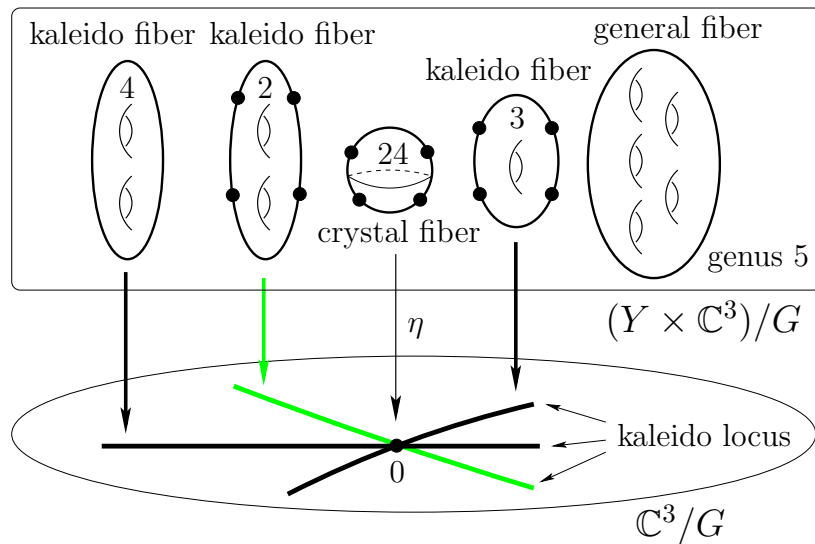


図 4: 正六面体群 $G := \text{Aut}_+(\mathcal{H})$ の埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ に付随する商族．

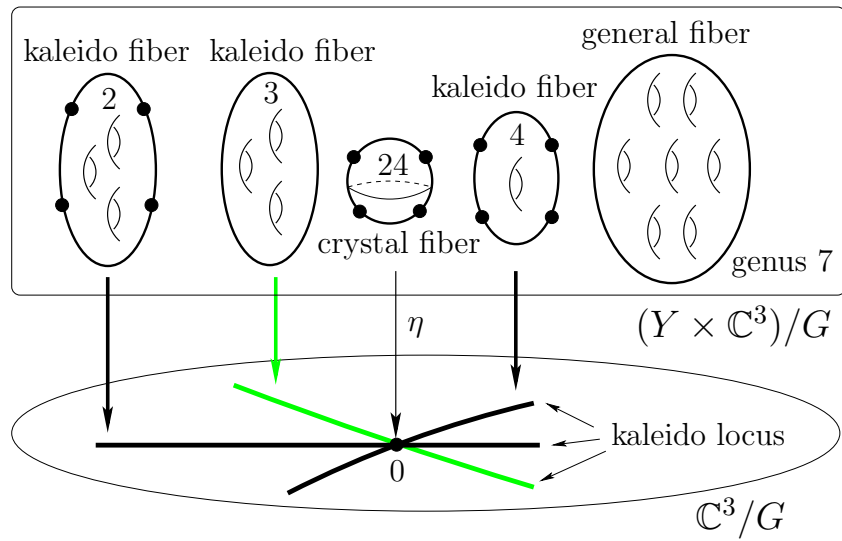


図 5: 正八面体群 $G := \text{Aut}_+(\mathcal{O})$ の埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ に付随する商族 .

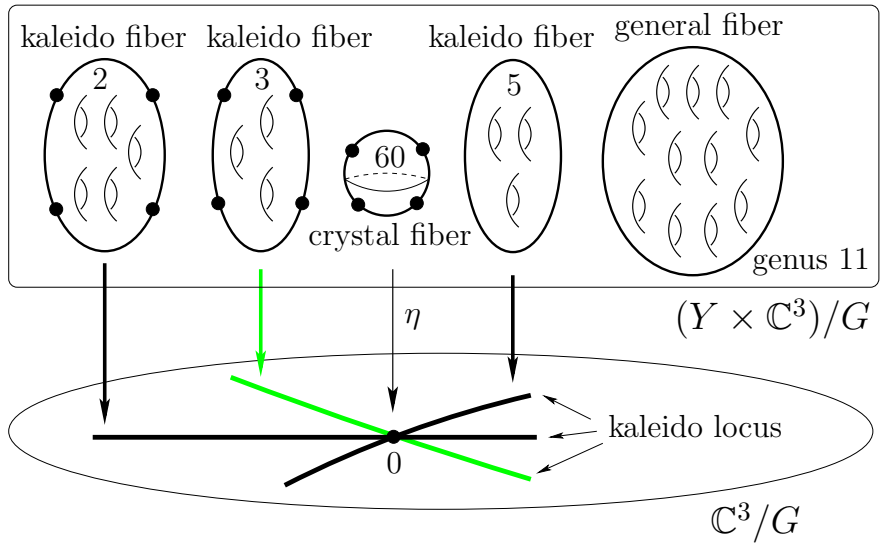


図 6: 正十二面体群 $G := \text{Aut}_+(\mathcal{D})$ の埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ に付随する商族 .

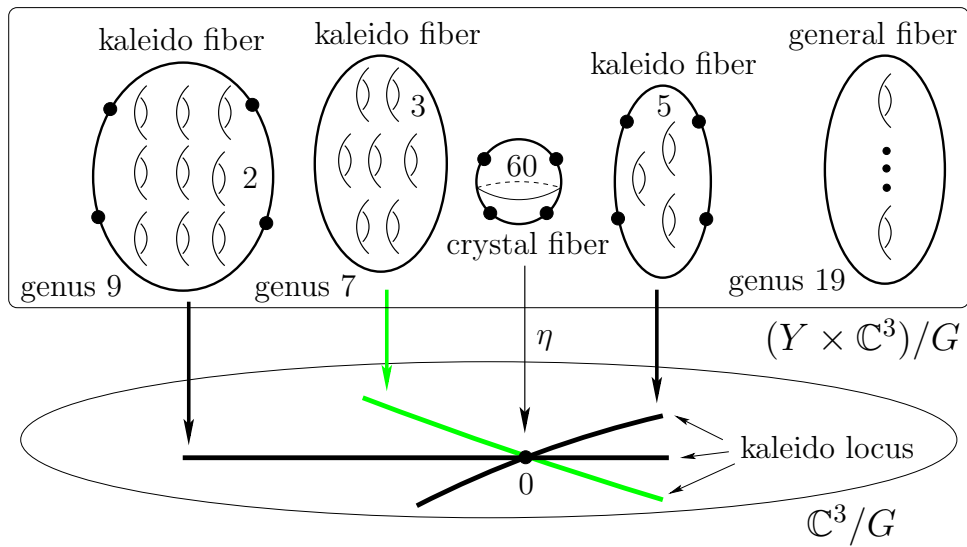


図 7: 正二十面体群 $G := \text{Aut}_+(\mathcal{I})$ の埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ に付随する商族 .

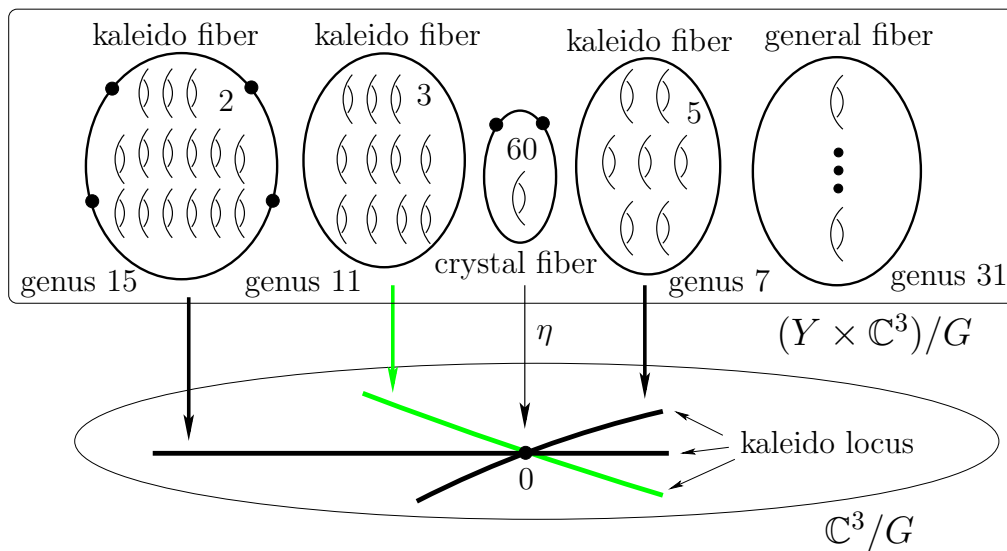


図 8: サッカーボールの向きを保つ変換群 $G := \text{Aut}_+(\mathcal{S})$ の埋め込み表現 $G \hookrightarrow SO(3)$ に付随する商族 .