Non-trivial real Milnor fibrations

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto on the occasion of his 70th birthday

Osamu Saeki*

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University,

Motooka 744, Fukuoka 819-0395, Japan

e-mail: saeki@imi.kyushu-u.ac.jp

home-page: http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/

概 要

This is a joint work with R. Araújo dos Santos (University of São Paulo, Brazil), M.A.B. Hohlenwerger (University of São Paulo, Brazil), and T.O. Souza (Federal University of Uberlândia, Brazil).

We first classify Neuwirth-Stallings pairs of dimension two in the 5-sphere, using the topology of certain configuration spaces. As an appliction, we construct polynomial map germs $(\mathbf{R}^6, 0) \to (\mathbf{R}^3, 0)$ with an isolated singularity at the origin such that their associated Milnor fibrations are non-trivial, thus putting an end to Milnor's non-triviality question. Furthermore, for certain real polynomial map germs, we study the conditions under which the associated Milnor fiber has the homotopy type of a bouquet of spheres. We then construct, for every pair (n, p) with $n/2 > p > 2$, a new example of a polynomial map germ $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ with an isolated singularity at the origin such that its Milnor fiber has the homotopy type of a bouquet of a positive number of spheres.

At this occasion, I would like to thank Professor Yukio Matsumoto for having introduced me, as my supervisor, the wonderful world of Topology and Singularities. In particular, in my essentially first academic seminar in the undergraduate course, I learned singularity theory from him, which I think was very lucky and fruitful. His encouragement has always made me extremely happy and given me a lot of energy to develop my work. It is therefore a great pleasure for me to dedicate this talk at this conference to his 70th birthday.

1 概要

本講演の内容は，プレプリント [1] に基づいている．

まず実 Milnor 束について復習しよう．$n \geq p \geq 2$ とし，$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ を $f(0) = 0$ なる多項式写像とする．f のヤコビ行列 $Jf(x)$ の階数が p より真に小さくなる $\mathbf{R}^n$ の点 x を f の**特異点**と呼ぶ．原点のある近傍 U であって，U 内の特異点が高々原点のみであるとき，f は原点を**孤立特異点**に持つという．以上の仮定のもと，Milnor [8] は次を示した．

*The author has been supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number 23244008.

定理 1.1 ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して次が成り立つ.

(1) リンク $K_f = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{n-1}$ は S_ε^{n-1} の $n-p-1$ 次元正則部分多様体であり，その法束は自明である．ここで，S_ε^{n-1} は，$\mathbf{R}^n$ 内の原点を中心とする半径 ε の球面を表す.

(2) 補空間 $S_\varepsilon^{n-1} \setminus K_f$ は S^{p-1} 上の滑らかなファイバー束の全空間となる.

(3) (2) のファイバー束の射影 $\pi : S_\varepsilon^{n-1} \setminus K_f \to S^{p-1}$ として，K_f の閉管状近傍 $N(K_f)$ とその自明化 $N(K_f) \cong K_f \times D^p$ に対して，

$$\pi|_{N(K_f)\setminus K_f} : N(K_f) \setminus K_f \cong K_f \times (D^p \setminus \{0\}) \xrightarrow{p_2} D^p \setminus \{0\} \xrightarrow{r} S^{p-1}$$

となるものが取れる．ここで，p_2 は第 2 成分への射影であり，r は半径方向の射影，$r(z) = z/||z||$, $z \in D^p \setminus \{0\}$，を表す．特に π の各ファイバーの閉包 F_f は S_ε^{n-1} 内の正則なコンパクト境界付き $n-p$ 次元部分多様体であって，その境界は K_f と一致する.（F_f を ***Milnor* ファイバー**と呼ぶ.）

これは，複素多項式関数 $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$（target が複素 1 次元であることに注意）に対する，いわゆる Milnor の fibration theorem の実多項式版である．複素多項式の場合は豊富に例があり，たとえばそれに付随したリンクとして異種球面が（たくさん）現れることが発見されるなど，1970 年代から現在まで種々の興味深い現象が発見されており，また多くの研究がある.

一方，実多項式写像の場合はそれに反して，非自明な例を作ることはそれほど簡単ではない．原点を孤立特異点に持つ多項式写像を作ることがそもそも簡単ではない．そこで Milnor [8] は次の問題を提起した.

問題 1.2 どのような次元対 (n, p) に対して，非自明な実多項式写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, $f(0) = 0$, で，原点を孤立特異点に持つものが存在するか？

なお,「非自明な実多項式写像」の定義をはっきりさせる必要がある．たとえば，全射線形写像 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ に対して，その Milnor ファイバーは D^{n-p} と同相になる．そこで Milnor は，Milnor ファイバーが球体 D^{n-p} と同相になるとき，**自明な実多項式写像**である，と定義した.

これに対して，Church–Lamotke [3] は次を示した.

定理 1.3 (Church–Lamotke [3]) (a) $0 \leq n-p \leq 2$ のとき，非自明な例が存在するのは，$(n, p) = (2, 2), (4, 3), (4, 2)$ のとき，かつそのときに限る.
(b) $n - p \geq 4$ のとき，常に非自明な例が存在する.
(c) $n - p = 3$ のとき，$(n, p) = (5, 2), (8, 5)$ のときは非自明な例が存在する．さらに，もし 3 次元 *Poincaré* 予想が正しくなければ，すべての (n, p) に対して非自明な例が存在する．もし 3 次元 *Poincaré* 予想が正しければ，$(n, p) = (5, 2), (8, 5), (6, 3)$ のときを除いて，すべての例は自明である.

Perelman による 3 次元 Poincaré 予想の肯定的解決により，結局 $(n, p) = (6, 3)$ のとき以外は決着が付いていたことになる（[10] も参照）．しかしながら $(6, 3)$ の場合は問題は未解決のまま，40 年以上に渡って未解決であった！

本講演では，この問題を決着する，次の結果を紹介する.

定理 1.4 ([1]) 実多項式写像 $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^3$, $f(0) = 0$, で原点を孤立特異点に持ち，なおかつ *Milnor* ファイバーが球体と同相にならないものが（豊富に）存在する.

2　証明のアイデア

まず次の概念を定義する．

定義 2.1 (Looijenga [7]) $K = K^{n-p-1}$ を S^{n-1} 内の向き付けられた $n-p-1$ 次元閉部分多様体でその法束が自明であるものとする（$K = \emptyset$ も許す）．さらに，K の閉管状近傍 $N(K)$ の自明化 $c : N(K) \to K \times D^p$ が存在して，合成写像

$$N(K) \smallsetminus K \xrightarrow{c} K \times (D^p \smallsetminus \{0\}) \xrightarrow{p_2} D^p \smallsetminus \{0\} \xrightarrow{r} S^{p-1}$$

により定義されるファイバー束が，C^∞ 級ファイバー束 $S^{n-1} \smallsetminus K \to S^{p-1}$ に拡張すると仮定する．このとき，組 (S^{n-1}, K^{n-p-1}) を ***Neuwirth–Stallings pair***，略して ***NS-pair*** と呼ぶ．また，ファイバー束 $S^{n-1} \smallsetminus K \to S^{p-1}$ のファイバーの S^{n-1} における閉包を F と書き，**ファイバー**と呼ぶ．

なお，この概念は**ファイバー結び目**，あるいは**開本構造**と呼ばれることもある．

NS-pair に対して，連結和の操作が自然に定義できることを注意しておく．

実多項式写像で原点を孤立特異点に持つものがあれば，§1 で述べた Milnor の結果より，NS-pair が自然に対応することになる．

これについて，Looijenga は，次のような実多項式写像の存在定理を示した．

定理 2.2 (Looijenga [7]) *勝手な NS-pair* (S^{n-1}, K^{n-p-1}) *に対し，ある実多項式写像* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, $f(0) = 0$, *で，原点を孤立特異点に持ち，対応する NS-pair が連結和*

$$(S^{n-1}, K^{n-p-1}) \sharp ((-1)^n S^{n-1}, (-1)^{n-p} K^{n-p-1})$$

となるものが存在する．ここで "−1" が付く場合は向き付けを逆にすることを意味する．

NS-pair の連結和のファイバーは，もともとのファイバーの境界連結和に微分同相となる．したがって，定理 1.4 を証明するためには，ファイバーが 3 次元球体と同相にならない NS-pair (S^5, K^2) を構成すれば良いことになる．

そのために，以下の手順に沿って議論を進める．

(1) まず NS-pair (S^5, K^2) があれば K^2 は有限個の S^2 のコピーの非交和であり，ファイバーは S^3 から互いに交わらない有限個（たとえば ℓ 個）の 3 次元球体の内部を取り去ったもの $S^3_{(\ell)}$ に微分同相であることを示す．

(2) S^2 上の C^∞ 級 $S^3_{(\ell)}$-束であって，境界への制限が自明になるものを，ある種の配置空間のホモトピー群を用いて分類する．

(3) 上記で分類した C^∞ 級 $S^3_{(\ell)}$-束はある 5 次元多様体の開本構造に対応している．このうち，S^5 に対応するもの，すなわち全空間に「ふた」をして S^5 が得られるものを特定する．こうして NS-pair (S^5, K^2) が分類できたことになる．

(4) 最後に具体的に $\ell > 1$ なる C^∞ 級 $S^3_{(\ell)}$-束で,「ふた」をして S^5 が得られるものの存在を言う．

(1) はごく簡単な代数トポロジーの議論に，3 次元多様体の標準的議論と，3 次元 Poincaré 予想の解決を用いて示すことができる．

(2) は，Funar [5] の議論を用いて，$\ell - 1$ 点配置空間 $\mathbb{F}_{\ell-1}(\mathrm{Int}\, B^3) \cong \mathbb{F}_{\ell-1}(\mathbb{R}^3)$ の 2 次のホモトピー群 [4] を用いて記述できることが示される．ただしその際， Cerf–Palais によるファイブレー

ション定理 [2, Appendice], [9] や Hatcher [6] による Smale 予想の解決などを注意深く適用する必要がある．なお，再び Funar [5] の議論をもちいると，上の $\pi_2(\mathbb{F}_{\ell-1}(\mathbb{R}^3))$ は整数係数の $(\ell-1)\times(\ell-1)$ 歪対称行列 L のなす加法群と同一視される．

(3) は,「ふた」をして得られる多様体のホモロジー群を計算することでホモトピー 5 次元球面となる条件を探せばよい．その結果，上述の行列 L の行列式が ± 1 に等しいことが必要十分であることがわかる．

(4) については，したがって，各奇数 ℓ に対して該当する歪対称行列が作れるので，求める定理が証明できたことになる．

なお，非自明な例を作るだけであれば，Poincaré 予想の解決は不要であることに注意しておく．

3　高次元での新しい例

上の手法を使うと，次も証明できる．

定理 3.1 (1) 各次元対 $(2n, p)$, $2 \le p \le n$, に対して，原点を孤立特異点に持つ実多項式写像 $f : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^p$, $f(0) = 0$, であって，*Milnor* ファイバーが S^{n-1} のいくつか（個数は真に正）のブーケとホモトピー同値となるものがある．

(2) 各次元対 $(2n+1, p)$, $2 \le p \le n$, に対して，原点を孤立特異点に持つ実多項式写像 $f : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^p$, $f(0) = 0$, であって，*Milnor* ファイバーが S^{n-1} と S^n のいくつか（個数は真に正で同数）のブーケとホモトピー同値となるものがある．

上記次元対に対して，Church–Lamotke が定理 1.3 の証明で構成していたのは，すべて，Milnor ファイバーが可縮だが，リンクが単連結でないホモロジー球面となるものであった．したがって上の定理は，非自明な実多項式写像として新しい例を与えている．

参考文献

[1] R. Araújo dos Santos, M.A.B. Hohlenwerger, O. Saeki and T.O. Souza, *New examples of Neuwirth–Stallings pairs and non-trivial real Milnor fibrations*, preprint, arXiv:1406.2030 [math.GT].

[2] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* $(\Gamma_4 = 0)$, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 53, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.

[3] P.T. Church and K. Lamotke, *Non-trivial polynomial isolated singularities*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 78 = Indag. Math. **37** (1975), 149–154.

[4] E.R. Fadell and S.Y. Husseini, *Geometry and topology of configuration spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[5] L. Funar, *Global classification of isolated singularities in dimensions* $(4, 3)$ *and* $(8, 5)$, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **10** (2011), 819–861.

[6] A.E. Hatcher, *A proof of the Smale conjecture,* $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq \mathrm{O}(4)$, Ann. of Math. (2) **117** (1983), 553–607.

[7] E. Looijenga, *A note on polynomial isolated singularities*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74 = Indag. Math. **33** (1971), 418–421.

[8] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies, Vol. 61, Princeton University Press, 1968.

[9] R.S. Palais, *Local triviality of the restriction map for embeddings*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 305–312.

[10] T.O. Souza, M.A.B. Hohlenwerger, D. de Mattos, and R.N. Araújo dos Santos, *New characterization of trivial maps in* 3*-dimensional real Milnor fibers*, JP J. Geom. Topol. **12** (2012), 207–217.