

結び目の Kashaev 不変量の漸近展開について

大槻 知忠 (京大 数理研)

松本幸夫先生の 70 歳のお誕生日に心からお祝い申し上げます。
また、研究集会の開催にあたってお世話になりました多くの皆様に深く感謝いたします。

§0 序

1970 年代に始まった幾何構造の研究では、任意の 3 次元多様体は幾何構造をもつピースに分割され、各ピース (幾何構造をもつ 3 次元多様体) の分類はある種のリー群の離散部分群の分類に帰着される。8 種類ある幾何構造の中でも双曲構造をもつ 3 次元多様体 (3 次元双曲多様体) の分類は強敵で、リー群の言葉で言うと $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ のある種の離散部分群の分類になるが、これを実際に実行することは依然として困難である。

一方、1980 年代に低次元トポロジーと数理物理が交流し、3 次元トポロジーにおいては Chern–Simons 理論を背景として、結び目と 3 次元多様体の大量の不変量 (量子不変量) が発見された。これらの不変量やそれに関連するトポロジーを研究する研究領域は量子トポロジーと呼ばれる。結び目不変量としては、単純リー環 \mathfrak{g} とその表現を与えることに、 \mathfrak{g} の量子群とその表現から導かれる R 行列を用いて、結び目の不変量が定義される。とくに \mathfrak{sl}_2 とその N 次元既約表現から定義される不変量は色つき Jones 多項式と呼ばれる。

1970 年代に始まった双曲幾何の研究と 1980 年代に始まった量子トポロジーの研究は、当初はそれぞれ別々に発展してきたが、以下に述べる「体積予想」はその 2 つの研究領域に橋をかける重要な予想である。これについて述べる。結び目補空間の双曲体積は理想 4 面体の体積を用いて記述され、理想 4 面体の体積は 2 重対数関数を用いて記述される。2 重対数関数は 5 角関係式をみたすが、5 角関係式をみたすように 2 重対数関数を変形することにより、その量子化である量子 2 重対数関数が定義される。Kashaev は量子 2 重対数関数を用いて結び目 K の Kashaev 不変量 $\langle K \rangle_N \in \mathbb{C}$ ($N = 2, 3, 4, \dots$) を定義し ([7, 8])、その $N \rightarrow \infty$ における漸近挙動 (の古典極限) に双曲体積が現れることを予想した (Kashaev 予想 [9])。さらに、村上斉–村上順 [13] は、Kashaev 不変量は色つき Jones 多項式の 1 の N 乗根における値に等しいことを示し、Kashaev 予想を再定式化した (体積予想)。体積予想により、双曲幾何と量子トポロジーが関連づけられたことになる。最近 15 年間、体積予想をテーマとする研究集会が国内外で多く行われ、体積予想は世界的にもこの分野の中心的なテーマとなってきた。

本講演では、体積予想とその精密化である Kashaev 不変量の漸近展開について解説する。

§1 数理物理的背景

この節では、(簡単のため)閉3次元双曲多様体に対して、数理物理的観点から、なぜ量子不変量の漸近挙動に双曲体積が現れることが期待されるのかを述べる。

M を有向閉3次元多様体とする。 M 上の自明 $SU(2)$ 束 $SU(2) \times M \rightarrow M$ を考え、その $SU(2)$ 束の接続を M 上の \mathfrak{sl}_2 -値 1-form とみなす。接続 A に対して、その Chern-Simons 汎関数を

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{trace}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

で定める。 M 上の Chern-Simons 理論の相関関数は、自然数 N に対して、形式的に、

$$Z_N(M) = \int e^{2\pi\sqrt{-1}N CS(A)} \mathcal{D}A$$

で与えられる。ここで、積分は、 M 上の自明 $SU(2)$ 束の接続 (のゲージ同値類) の全体をわたる。この積分は無次元空間上の積分であって数学的にはまだ正当化されていないが、数理物理的にはこの積分が M の量子不変量を表すのであった。(詳しくは [15] を参照されたい。)

体積予想は、数理物理的観点からは、上記の積分の積分領域の「 $SU(2)$ 接続の空間」を「 $SL_2\mathbb{C}$ 接続の空間」の中で動かして「無限次元の鞍点法」を形式的に実行することで、 $Z_N(M)$ の $N \rightarrow \infty$ における漸近挙動の古典極限として双曲体積が現れるのである、と理解することができる。すなわち、鞍点法 (下記参照) により、 $SL_2\mathbb{C}$ 接続の空間上の Chern-Simons 汎関数の臨界点を通るように積分領域を動かすと、その臨界点の臨界値を用いて問題の漸近挙動が記述される。さらに、Chern-Simons 汎関数の臨界点は、平坦 $SL_2\mathbb{C}$ 接続、すなわち、表現 $\rho: \pi_1(M) \rightarrow SL_2\mathbb{C}$ である。 M が双曲多様体であるとき、この表現がそのホロノミー表現であることを期待することにすると、具体的に計算することにより問題の臨界値は (複素化された) 双曲体積に等しいことを確かめることができる。これが体積予想の数理物理的な根拠である。

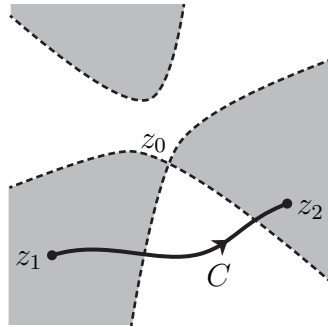
さらに、問題の漸近挙動の高次の展開項には臨界点の近傍の情報も反映されているので、この漸近展開の高次の項を調べることは、「双曲構造の量子化とは何か?」という問いにつながっているようにおもわれ、興味深い。

上述した「鞍点法」について、(簡単のため) 1次元の場合を復習する。(高次元の場合も、これを自然に拡張した主張が成立する。詳しくは [26] を参照されたい。)

命題 (鞍点法). $\psi(z)$ を、 $z_0 \in \mathbb{C}$ の近傍上の正則関数で、 $\psi'(z_0) = 0$ と $\psi''(z_0) \neq 0$ をみたくものとする。領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\psi(z) - \psi(z_0)) < 0\}$ は z_0 の近傍で2つの連結成分をもつものとする。それらの連結成分の各々から z_1 と z_2 をとり、 C を z_1 から z_2 への道とする (下図参照)。このとき、次の積分の値の漸近挙動は

$$\int_C e^{N\psi(z)} dz \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\psi''(z_0)} \cdot \sqrt{N}} \cdot e^{N\psi(z_0)}$$

のように表される。



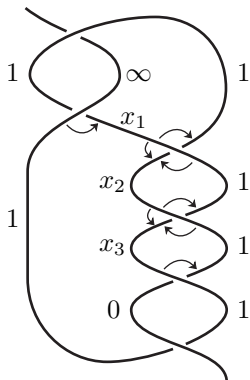
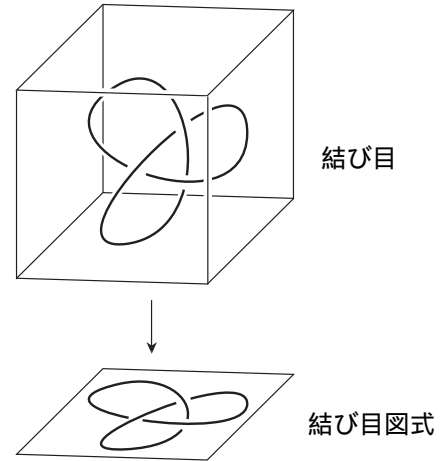
グレーの領域が
 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\psi(z) - \psi(z_0)) < 0\}$
 である。

命題の漸近挙動をさらに精密に展開すると、右辺は命題の式の右辺に $\frac{1}{N}$ のべき級数をかけた形に表される。詳しくは [26] を参照されたい。

§2 結び目補空間の双曲構造

この節では、結び目図式を用いて結び目補空間の双曲構造を与える方法について概要を述べる。この方法について詳しくは [23, 27, 28, 18] を、双曲幾何について [10, 24] を参照されたい。

円周 S^1 を 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に滑らかに埋め込んだ像を結び目という。結び目を平面 \mathbb{R}^2 に射影して、交点の上下の情報をつけたものを、結び目図式という (右図)。



結び目を 1 点で切って開いてできる 1-タングルを考え、その 1-タングルの図式を考える (例として、左図)。図式の辺 (交点から交点へのひも) に複素パラメータをつけることを考える (双曲構造パラメータとよばれる)。ここで、非有界領域に接する辺のパラメータは 1 として、交点をくぐるひもで端点とつながる辺のパラメータは ∞ として、交点を越えるひもで端点とつながる辺のパラメータは 0 として、のこりの辺のパラメータは次に述べる双曲構造方程式の解とする。

双曲構造パラメータ付きの図式の一部が次の左図のようになっているときその右にあるような方程式を考え、このような方程式からなる連立方程式を双曲構造方程式という。

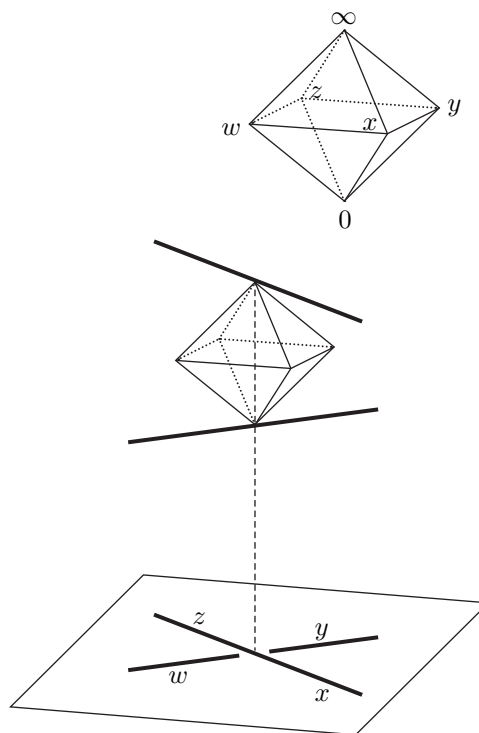
$$\begin{array}{c|c|c} y' & x & z' \\ \hline & & \\ \hline y & & z \end{array} \quad \left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{z'}{x}\right) = \left(1 - \frac{x}{y'}\right)\left(1 - \frac{z}{x}\right)$$

たとえば、上述の例の双曲構造方程式は

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x_2}{x_1} &= (1 - x_1)\left(1 - \frac{1}{x_1}\right), \\ \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{x_2}\right) &= (1 - x_2)\left(1 - \frac{x_3}{x_2}\right), \\ \left(1 - \frac{x_3}{x_2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_3}\right) &= 1 - x_3 \end{aligned}$$

のようになる。

3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 の境界 $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に4つの頂点があるような4面体で辺や面が全測地的であるようなものを理想4面体という。 \mathbb{H}^3 の等長変換群は $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ であり、1次分数変換による $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ の $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への作用で4つの頂点をうつした理想4面体も等長な理想4面体である。タングル図式の交点のところに右図のように4つの4面体をおく(図には4つの4面体を合併した8面体がかかっている)。タングル図式につけられた双曲構造パラメータを用いて、右図の右上にかかっているようにこれらの4面体に理想4面体の構造を入れる(双曲構造パラメータが0や ∞ になるところでは該当の理想4面体は退化しているとみなす)。それらの理想4面体を合併することにより、結び目補空間の双曲構造を与えることができることが知られている。



双曲構造パラメータ付きのタングル図式があったとき、そのポテンシャル関数を次のように定める。図式の交点において、隣接する2辺がつくる角を考え、その角に交点を越える辺から交点をくぐる辺への向きをつけたとき、その向きが反時計まわりか時計まわりかによって、その角に

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} x \quad y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \rightsquigarrow & \mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) - \mathrm{Li}_2(1) \\ \begin{array}{c} x \quad y \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \rightsquigarrow & \mathrm{Li}_2(1) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

のような値を対応させることを考える。ここで、

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = - \int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt$$

は2重対数関数である。さらに、上述の理想4面体分割において、非退化な4面体の角に対応する値の和をポテンシャル関数と定め、 V とかく。たとえば、前述の例の場合、ポテンシャル関数は

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) &= \mathrm{Li}_2(x_1) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x_1}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \mathrm{Li}_2(x_2) \\ &\quad - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x_2}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{x_3}{x_2}\right) - \mathrm{Li}_2(x_3) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x_3}\right) + 2\mathrm{Li}_2(1) \end{aligned}$$

のようになる。2重対数関数の微分が

$$x \frac{\partial}{\partial x} \text{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) = -\log\left(1 - \frac{x}{y}\right), \quad y \frac{\partial}{\partial y} \text{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

であることより、ポテンシャル関数の臨界点を定める連立方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V = 0 \quad (i \text{ はすべての } i \text{ をわたる})$$

は双曲構造方程式を与えることがわかる。また、4つの頂点が $a, b, c, d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}^3$ であるような理想四面体の体積は、2重対数関数を用いて、

$$\text{vol}\left(\begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad \quad \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad c \end{array}\right) = \text{Im Li}_2(z) + \log|z| \arg(1-z) \quad \text{ここで } z = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)} \quad (\text{複比})$$

のように表されることが知られており、このことより(適切な)臨界点における V の値の虚部は双曲結び目の補空間の双曲体積を与えることがわかる。

§3 結び目の Kashaev 不変量とその漸近展開

この節では、結び目の Kashaev 不変量の定義を復習し、それがどのような形に漸近展開されるとおもわれるのかを述べる。

N を 2 以上の自然数として、

$$\begin{aligned} q &= \exp(2\pi\sqrt{-1}/N), \\ (x)_n &= (1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n), \\ \mathcal{N} &= \{0, 1, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

とおく。 $i, j, k, l \in \mathcal{N}$ に対して

$$R_{kl}^{ij} = \frac{N q^{-\frac{1}{2}+i-k} \theta_{kl}^{ij}}{(q)_{[i-j]}(\bar{q})_{[j-l]}(q)_{[l-k-1]}(\bar{q})_{[k-i]}}, \quad \bar{R}_{kl}^{ij} = \frac{N q^{\frac{1}{2}+j-l} \theta_{kl}^{ij}}{(\bar{q})_{[i-j]}(q)_{[j-l]}(\bar{q})_{[l-k-1]}(q)_{[k-i]}}$$

とおく。ここで、 $[m] \in \mathcal{N}$ は m を N で割ったときの余りであり、

$$\theta_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1 & [i-j] + [j-l] + [l-k-1] + [k-i] = N-1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とおく。 K を有向結び目とする。 K を 1 点で切って開いてできる 1-タングルを考え、その 1-タングルの図式を D とする。 D を、必要なら平面のイソトピーで変形してから、水平線で輪切りにすることにより基本タングル図式に分解する。ここで、基本タングル図式とは下記の式にかかっているタングル図式である。 D のひもを交点と極大点と極小点で切ったときの各切片を考える。各切片に \mathcal{N} の元を対応させる対応のことをラベル付け

ということにする。ただし、タングルの端点につながる切片には 0 を対応させるものとする。ラベル付けされた基本タングル図式の重みを

$$\begin{aligned}
 W\left(\begin{array}{c} i & j \\ \diagdown & \diagup \\ k & l \end{array}\right) &= R_{kl}^{ij}, & W\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ k & l \end{array}\right) &= q^{-1/2}\delta_{k,l-1}, & W\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ k & l \end{array}\right) &= \delta_{k,l}, \\
 W\left(\begin{array}{c} i & j \\ \diagup & \diagdown \\ k & l \end{array}\right) &= \bar{R}_{kl}^{ij}, & W\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ i & j \end{array}\right) &= q^{1/2}\delta_{i,j+1}, & W\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ i & j \end{array}\right) &= \delta_{i,j}
 \end{aligned}$$

で定める。さらに、 $\langle K \rangle_N$ を

$$\langle K \rangle_N = \sum_{\text{ラベル付け } D \text{ の交点}} \prod W(\text{交点}) \prod_{D \text{ の極大点}} W(\text{極大点}) \prod_{D \text{ の極小点}} W(\text{極小点}) \in \mathbb{C}$$

で定める。右辺は D のとり方によらない (Reidemeister 移動で不変である) ことを示すことができ、 $\langle K \rangle_N$ は K のイソトピー不変量になることがわかる ([7, 8])。これを K の Kashaev 不変量という。

Kashaev [9] は、双曲結び目 K に対して $|\langle K \rangle_N|$ の漸近挙動に双曲体積が現れること (次の予想の実部) を予想した。

予想 (Kashaev 予想の複素化). 任意の双曲結び目 K に対して、Kashaev 不変量の漸近挙動は

$$\langle K \rangle_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\underset{?}{\sim}} e^{Nv(K)}$$

のように表されるであろう。ここで

$$v(K) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} (\text{cs}(S^3 - K) + \sqrt{-1} \text{vol}(S^3 - K))$$

とおり、cs は Chern–Simons 不変量を表し、vol は双曲体積を表す。

村上斉–村上順 [13] は、Kashaev 不変量は色つき Jones 多項式の 1 の N 乗根における値に等しいことを示し、Kashaev 予想を再定式化した (体積予想)。さらに、[14] において体積予想の複素化が定式化され、これを Kashaev 予想の言葉でかいたものが上記の予想である。体積予想の解説について [11] を、体積予想に関連する未解決問題について [19, 20] を参照されたい。さらに、Kashaev 予想や体積予想の精密化について、[5] や [3, 6, 29] や [2] で議論されている。

予想 (Kashaev 予想の精密化 [16]). 任意の双曲結び目 K と任意の自然数 d に対して、Kashaev 不変量の漸近挙動は

$$\langle K \rangle_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\underset{?}{\sim}} e^{Nv(K)} N^{3/2} \omega(K) \left(1 + \sum_{i=1}^d \kappa_i(K) \cdot \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} \right)^i + O\left(\frac{1}{N^{d+1}}\right) \right)$$

のように表されるであろう。ここで、 $\omega(K)$ と $\kappa_i(K)$ は K によって定まるある定数である。

後述するように、 K の twisted Reidemeister torsion は $\pm 2\sqrt{-1}\omega(K)^2$ に等しいことが予想されている。また、 $\kappa_i(K)$ は “新しい不変量” であるとおもわれ、量子トポロジーと双曲幾何を融合する新しい研究テーマになることを期待したい。

定理 ([16, 22, 17]). 7 交点以下の双曲結び目に対して、上記の「Kashaev 予想の精密化」の予想は成立する。

証明の概略 (詳細は [16, 22, 17](全部で約 200 ページ) を参照されたい)。

証明のおおまかな方針は [9, 23, 27] による。前述したように、 $S^3 - K$ の双曲構造の理想 4 面体分割は、結び目図式の各交点のところに 4 つの理想 4 面体をおくことにより得られる。各理想 4 面体に対応して Kashaev 不変量の定義では $(q)_n$ が現れ、 $\log(q)_n$ の漸近挙動は

$$\log(q)_n \sim -\frac{N}{2\pi\sqrt{-1}} \text{Li}_2\left(e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{n}{N}}\right)$$

のように表されることが知られている。定義より、この線型和として、ポテンシャル関数 V が得られる。このことより、結び目 K の Kashaev 不変量は (おおむね) 次の形に表されることがわかる。

$$\langle K \rangle_N = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \exp\left(NV\left(\frac{i_1}{N}, \frac{i_2}{N}, \dots, \frac{i_m}{N}\right)\right)$$

さらに、 $i_1/N = t_1, i_2/N = t_2, \dots, i_m/N = t_m$ において Poisson 和公式をつかうことにより、上記の和を次の形の積分に書き直すことができる (Poisson 和公式が適用可能であることを示すために、個々の例に対して、少なからぬ計算が必要である)。

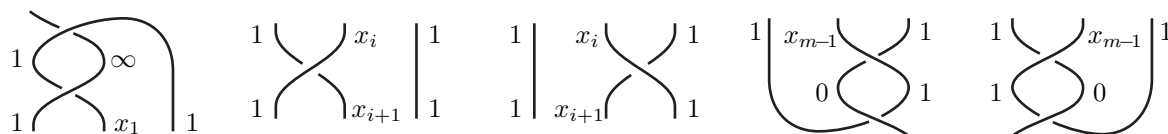
$$\langle K \rangle_N \sim N^m \int \exp\left(NV(t_1, t_2, \dots, t_m)\right) dt_1 dt_2 \dots dt_m$$

さらに、この積分に鞍点法を適用することにより、この積分の値の漸近挙動は V の臨界点における情報を用いて表すことができる (多変数の鞍点法を具体的に実行するために、個々の例に対して、少なからぬ計算が必要である)。また、前述した理由により、問題の臨界点での V の臨界値は $v(K)$ で表されることがわかる。さらに、この展開をもっと精密に計算することにより、求める展開式が得られる。□

§4 $\omega(K)$ と Reidemeister torsion

この節では、2 橋結び目 K に対して、Kashaev 不変量の漸近展開の準古典極限の項である $\omega(K)$ と twisted Reidemeister torsion $\tau(K)$ (双曲構造のホロノミー表現で係数をねじって定義されるもの) の関係について概要を述べる。この節の内容は、高田氏との共同研究 [21] による。詳しくは [21] を参照されたい。

2 橋結び目の 1 点を切ってできる 1-タングルは、 σ_1 と σ_2^{-1} のコピーの積の plat closure として、すなわち、次のタングル図式のコピーを合成することにより、得られる。



ここで、図式についているパラメータは双曲構造パラメータである。タングル図式同士を合成したときに双曲構造方程式と整合性をもたせるために、タングルの端点に次のようなパラメータを対応させる。

$$\begin{array}{c} \alpha_i \\ \left. \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} x_i \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x_{i+1} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array}} \right\} 1 \\ \alpha_{i+1} \end{array} \quad \alpha_i = \frac{1 - \frac{1}{x_i}}{1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{1 - x_{i+1}}{1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}},$$

$$\begin{array}{c} \alpha_i \\ \left. \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} x_i \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x_{i+1} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array}} \right\} 1 \\ \alpha_{i+1} \end{array} \quad \alpha_i = \frac{1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}}{1 - \frac{1}{x_i}}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}}{1 - x_{i+1}}.$$

つまり、一般に、タングルの端点に次のようなパラメータを対応させる。

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \left. \begin{array}{c} x \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array} \right\} \begin{array}{c} u' \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} x \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array}} \right\} \alpha \end{array} \quad \alpha = \frac{1 - \frac{u}{x}}{1 - \frac{u'}{x}}, \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \left. \begin{array}{c} x \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array} \right\} \begin{array}{c} u' \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} x \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array}} \right\} \alpha \end{array} \quad \alpha = \frac{1 - \frac{x}{u}}{1 - \frac{x}{u'}},$$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \left. \begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x \end{array} \right\} \begin{array}{c} u' \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x \end{array}} \right\} \alpha \end{array} \quad \alpha = \frac{1 - \frac{u}{x}}{1 - \frac{u'}{x}}, \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \left. \begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x \end{array} \right\} \begin{array}{c} u' \\ \text{---} \\ \text{---} \\ u \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x \end{array}} \right\} \alpha \end{array} \quad \alpha = \frac{1 - \frac{x}{u}}{1 - \frac{x}{u'}}.$$

端点のパラメータが一致するようにタングルを合成すると、合成してできたタングルのパラメータは該当部分において双曲構造方程式をみだす。このことより、 σ_1 と σ_2^{-1} のコピーの積を考えたとき、双曲構造パラメータは次の漸化式によって定まることがわかる。

$$x_{i+1} = \begin{cases} x_i + 1 - \frac{x_i}{x_{i-1}} & x_i \text{ のひもの前後が } \sigma_1 \text{ と } \sigma_1 \text{ か } \sigma_2^{-1} \text{ と } \sigma_2^{-1} \text{ のとき} \\ x_i + \frac{(x_i - 1)^2}{1 - \frac{x_i}{x_{i-1}}} & x_i \text{ のひもの前後が } \sigma_1 \text{ と } \sigma_2^{-1} \text{ か } \sigma_2^{-1} \text{ と } \sigma_1 \text{ のとき} \end{cases}$$

twisted Reidemeister torsion $\tau(K)$ を定義より計算すると、 $2/\tau(K)$ は次の Φ で定められる行列を合成することにより表されることがわかる。

$$\Phi \left(\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \infty \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x_1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array}} \right\} 1 \end{array} \right) = x_1(x_1 - 1) \begin{pmatrix} 1 & 2x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi \left(\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} x_i \\ \text{---} \\ \text{---} \\ x_{i+1} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array}} \right\} 1 \end{array} \right) = x_{i+1} \begin{pmatrix} 1 & 2x_{i+1} & 1 \\ 0 & -x_{i+1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_i \\ \hline 1 & x_{i+1} \end{array} \right) = x_{i+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -x_{i+1} & 0 \\ 1 & 2x_{i+1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_{m-1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \frac{x_{m-1}^3}{(x_{m-1}-1)^3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_{m-1} \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = \frac{x_{m-1}^3}{(x_{m-1}-1)^3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

一方、Kashaev 不変量の漸近展開の準古典極限の項 $\omega(K)$ について、 $\omega(K)^2$ はポテンシャル関数の Hessian を用いて表すことができる。このことより、 $1/(\sqrt{-1}\omega(K)^2)$ は次の Ψ で定められる行列を合成することにより表されることがわかる。

$$\Psi \left(\begin{array}{c|c} 1 & \infty \\ \hline 1 & x_1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ & 1-x_1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_i \\ \hline 1 & x_{i+1} \end{array} \right) = \frac{x_{i+1}}{x_i} \begin{pmatrix} -\frac{x_i(x_{i+1}-1)}{(x_i-1)x_{i+1}} & 1 \\ \frac{x_i-x_{i+1}}{x_{i+1}} & -\frac{x_i-1}{x_{i+1}-1} \end{pmatrix},$$

$$\Psi \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_i \\ \hline 1 & x_{i+1} \end{array} \right) = \frac{x_{i+1}}{x_i} \begin{pmatrix} \frac{x_i(x_{i+1}-1)}{(x_i-1)x_{i+1}} & 1 \\ \frac{x_i-x_{i+1}}{x_{i+1}} & \frac{x_i-1}{x_{i+1}-1} \end{pmatrix},$$

$$\Psi \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_{m-1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x_{m-1}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_{m-1} \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{m-1}-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ポテンシャル関数の Hessian はすべての 2 橋結び目に対して定められるので、そのことにもとづいて、上記の Ψ はすべての 2 橋結び目に対して定義できることに注意する。 $(\omega(K))$ が存在することを言うためには §3 で述べた定理が必要であり、それは現時点では 7 交点以下の双曲結び目に対してしか、示されていない。)

Chern–Simons 理論の相関関数の摂動展開では、準古典極限の項に Reidemeister torsion が現れることは以前から知られていた ([25])。さらに、1 のべき根における色つき Jones 多項式の漸近展開においても $\omega(K)$ の項は twisted Reidemeister torsion の平方根の定数倍であることが予想されている ([5, 6, 12])。この予想は、[1, 12] において 8 の字結び目に対して証明されており、[4] においていくつかの結び目に対して数値的に確認されている。この予想を §3 で述べた Kashaev 不変量の漸近展開に対して書き直すと次の statement になる。

定理 ([21]). 7 交点以下の双曲結び目 K に対して、 $2\sqrt{-1}\omega(K)^2 = \pm\tau(K)$ が成立する。

証明の概略. 7 交点以下の任意の双曲結び目は 2 橋結び目である。上記の Φ と Ψ の値が任意の 2 橋結び目に対して等しいことを示すことにより、定理は証明される。 σ_1 と σ_2^{-1} のコピーを増やしていったときにそれらの値の変化を記述する漸化式が等しいことをチェックすることにより、両者の値が等しいことを示すことができる。詳しくは [21] を参照されたい。□

上記の Φ と Ψ は、双曲構造パラメータ付きの組みひもの 3 次元「表現」と 2 次元「表現」を与えているとみなすことができる (それらは双曲構造パラメータに依存しているため、これらの「表現」は通常の意味の表現ではない)。これらの「表現」は共役ではない(ように見える)。それにもかかわらず、すべての 2 橋結び目に対して、なぜか両者の値は等しい。双曲構造パラメータ付きの組みひもの「表現」の一般論 (同値な「表現」とは何か、を記述すること) を開発することが必要であるようにおもわれる。

また、Kashaev 不変量の漸近展開の高次の項 $\kappa_i(K)$ について、“新しい不変量”であることが期待される。完備双曲構造は rigid であるので、双曲構造方程式は、変数を消去することによって、1 変数代数方程式に書き直すことができる。この代数方程式が定める有理数体の拡大体に $\kappa_i(K)$ (の適切な正規化) は属することが期待される。この拡大体は結び目 (や 3 次元多様体) に固有のものであり、この不変量は結び目 (や 3 次元多様体) の数論的側面を反映していることを期待したい。

References

- [1] Andersen, J.E., Hansen, S.K., *Asymptotics of the quantum invariants for surgeries on the figure 8 knot*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006) 479–548.
- [2] Dimofte, T., Garoufalidis, S., *The quantum content of the gluing equations*, Geom. Topol. **17** (2013) 1253–1315.
- [3] Dimofte, T., Gukov, S., Lenells, J., Zagier, D., *Exact results for perturbative Chern-Simons theory with complex gauge group*, Commun. Number Theory Phys. **3** (2009) 363–443.
- [4] Dubois, J., Garoufalidis, S., *Rationality of the $SL(2, \mathbb{C})$ -Reidemeister torsion in dimension 3*, arXiv:0908.1690 (Version 3, 2011).
- [5] Gukov, S., *Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A-polynomial*, Comm. Math. Phys. **255** (2005) 577–627.
- [6] Gukov, S., Murakami, H., *$SL(2, \mathbb{C})$ Chern-Simons theory and the asymptotic behavior of the colored Jones polynomial*, Lett. Math. Phys. **86** (2008) 79–98.
- [7] Kashaev, R.M., *Quantum dilogarithm as a $6j$ -symbol*, Modern Phys. Lett. **A9** (1994) 3757–3768.
- [8] ———, *A link invariant from quantum dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A10** (1995) 1409–1418.
- [9] ———, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39** (1997) 269–275.
- [10] 小島定吉, “3 次元の幾何学”, 朝倉書店, 2002.
- [11] Murakami, H., *An introduction to the volume conjecture*, Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory, 1–40, Contemp. Math. **541**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [12] ———, *The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of the figure-eight knot*, J. Topol. **6** (2013) 193–216.
- [13] Murakami, H., Murakami, J., *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. **186** (2001) 85–104.

- [14] Murakami, H., Murakami, J., Okamoto, M., Takata, T., Yokota, Y., *Kashaev's conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links*, Experiment. Math. **11** (2002) 427–435.
- [15] Ohtsuki, T., *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.
- [16] ———, *On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the 5_2 knot*, preprint, available at <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tomotada/paper/ki52.pdf> 43 ページ.
- [17] ———, *On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the hyperbolic knots with 7 crossings*, preprint. 104 ページ.
- [18] 大槻知忠, “結び目の不変量”, 共立出版. (出版社に完成原稿送付済み. 出版準備中.)
- [19] Ohtsuki, T. (ed.), *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, Geom. Topol. Monogr. **4**, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 377–572, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [20] Ohtsuki, T. (ed.), *Problems on low-dimensional topology 2011*, “Intelligence of Low-dimensional Topology” (edited by T. Ohtsuki and M. Wakui), RIMS Kōkyūroku **1766** (2011) 102–121.
- [21] Ohtsuki, T., Takata, T., *On the Kashaev invariant and the twisted Reidemeister torsion of two-bridge knots*, Geom. Topol. (to appear). 95 ページ.
- [22] Ohtsuki, T., Yokota, Y., *On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the knots with 6 crossings*, preprint. 50 ページ.
- [23] Thurston, D.P., *Hyperbolic volume and the Jones polynomial*, Notes accompanying lectures at the summer school on quantum invariants of knots and three-manifolds, Joseph Fourier Institute, University of Grenoble, org. C. Lescop, July, 1999. <http://www.math.columbia.edu/~dpt/speaking/Grenoble.pdf>
- [24] Thurston, W.P., *The geometry and topology of three-manifolds*, the 1980 lecture notes at Princeton University, <http://library.msri.org/books/gt3m/>
- [25] Witten, E., *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989) 351–399.
- [26] Wong, R., *Asymptotic approximations of integrals*, Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.
- [27] Yokota, Y., *On the volume conjecture for hyperbolic knots*, arXiv:math/0009165.
- [28] ———, *On the complex volume of hyperbolic knots*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011) 955–976.
- [29] Zagier, D., *Quantum modular forms*, Quanta of maths, 659–675, Clay Math. Proc. **11**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所
 電子メールアドレス: tomotada@kurims.kyoto-u.ac.jp