フーリエ変換と超関数

木田 良才

2020 年 2 月 28 日

目 次

序文

このノートは 2016, 2017 年度の東京大学理学部数学科向けの講義と 2017, 2018, 2019 年度の東京大学教養学部統合自然科学科向けの講義に基づいている. ともに 3 年生を主対象にした講義であり, 主題はフーリエ解析と超関数である. 内容の選択に当たっては, フーリエ解析を必須としない学生も興味がもてるよう, 幅広い話題に触れつつも深入りすることは避けた. 多くの文献を参考にしたが, 最も参考にしたものを挙げるとすれば次の三冊になる:

- Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis. Third edition*, Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- E. M. スタイン, R. シャカルチ (新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳), フーリエ解析入門, プリンストン解析学講義 1, 日本評論社, 2007.
- R. S. Strichartz, *A guide to distribution theory and Fourier transforms.* Reprint of the 1994 original, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

二冊目と三冊目は講義のシラバスで参考文献としてよく挙げていたもので, とても読みやすい (それに比べ, 一冊目は専門性が高い). 実際の講義では, 例えば 2019 年度の講義では, 第 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12 講の内容を適宜省略して紹介した. 演習問題は, その多くが実際に演習や試験で出したものであり, 難易度は様々である.

第0講　ルベーグ積分

ユークリッド空間上にはたくさんの関数が存在するが, 目的に応じた関数に対して積分が定義できれば十分である. この講義で扱う関数は大抵, 連続なものを切り貼りしたり, もしくはその極限として表されるものである. そのような関数は**可測**という性質をもっており, 常識的に定義される関数はすべて可測と思ってよい. 選択公理を使えば可測でない関数の例を作ることは可能だが, この講義で扱う関数については, それが可測でないことを心配する必要はまずない.

ルベーグ積分論がすっきりしている理由の一つは, どんな非負値可測関数に対してもその積分値が, $+\infty$ になる場合も含め, 必ず確定するという点にある. もちろん, 積分値とよぶにふさわしいものが確定する. 例えば, 二つの関数 f, g が任意の点 x で不等式 $f(x) \leq g(x)$ を満たすならば, f の積分値は g のそれ以下になる. 任意の実数値可測関数 f は, その正の部分と負の部分への自然な分解 $f = f_+ - f_-$ をもつ. f のグラフをかいたとき, 上の方へ出っ張る部分が f_+ であり, 下の方へ出っ張る部分を上下反転させたのが f_- である. f_+ と f_- はともに非負値で可測なので, その積分値が必ず定まる. そして両者の積分値が有限になるとき, f は**可積分**であるといい, f_+ の積分値から f_- の積分値を引いたものを f の積分値として定義する (f_+ と f_- のうち片方だけが積分値 $+\infty$ をもつ場合でも f の積分値を $+\infty$ または $-\infty$ として定めることは可能だろうが, そういうものも積分可能であるといってしまうと, そういった関数の和が積分可能でなくなったりして面倒である). 複素数値の関数の積分については, 実部と虚部に分けて定義すればよい.

リーマン積分との比較. 任意の非負値可測関数に対し, そのルベーグ積分の値が確定する一方, もしそのリーマン (広義) 積分が確定するならば, $+\infty$ になる場合も含め, 二つの積分値は一致する. これにより具体的な関数に対する計算ではリーマン積分が大いに使えるし, ルベーグ積分の値に対してリーマン積分での感覚が通用する (例えば, 関数のグラフと x 軸が囲む面積が積分値であるなど). 非負値でない関数に対しては, 定義の都合上, 二つの積分の間に微妙な差異が生じることになるが, 基本的には関数を正負の部分に分けてゆっくり考えればよい.

可測集合と測度零の集合. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A が**可測**であるとは, A の定義関数 (すなわち, A 上で 1 になり, A の外で 0 になる関数) が可測になるときをいう. 可測部分集合 A 上で定義された関数に対し, それが可測であるとか可積分であるというのは, A の外で 0 になるように $\mathbb{R}^d$ 上に拡張した関数がその性質をもつときをいう. A 上で可積分な関数 f に対し, その積分を

$$\int_A f(x)\,dx$$

とかく. 以下, 本講では $\mathbb{R}^d$ の可測部分集合のことを単に可測集合とよぶことにする.

可測集合 A が**測度零**であるとは, その定義関数の積分値が 0 になるときをいう. A の定義関数の積分値は A の面積みたいなものなので, イメージとしては測度零の集合は非常に小さく薄い. 可

算個の点や $\mathbb{R}^2$ における線分など次元が真に小さい集合がその例である. 測度零の集合は積分の定義を必要としない特徴付けをもつ. 実際, $\mathbb{R}^d$ の可測部分集合 A が測度零であるためには次が必要十分である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 有限個の d 次元立方体が存在し, それらの和は A を覆い, そして, それらの体積の和は ε より小さい. 立方体の体積とは, 多くの人が知っているように, 各辺の長さをかけて得られる値のことである. この特徴付けからも測度零の集合の小ささをイメージできると思う. 測度零の集合の上で関数の値が変わっても, その可積分性や積分値は変わらない. そういうわけで, 積分の問題を考える上では, 対象の関数が測度零の部分で定義されていなくても, 全体で定義されているかのような言葉遣いをすることがある.

用語を一つ導入する. f を可測集合 A 上の可測関数とする. f がある測度零の集合の外で非負になるとき, “f は A のほとんどすべての点で非負である” とか “ほとんどすべての $x \in A$ に対し $f(x) \geq 0$ である” といったりする. “非負” の部分を他の性質に置き換え, この用語を汎用する.

ルベーグ収束定理. 可測集合 A 上で定義された可積分関数の列 (f_n) があって, それがほとんどすべての点で収束しているとする. つまり, ほとんどすべての $x \in A$ に対し数列 $(f_n(x))$ が収束するとする. その極限を $f(x)$ とかくと A 上の関数 f が得られ, これは可測である. リーマン積分で経験済みだと思うが, 極限と積分の順序交換

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx \tag{0.1}$$

が成り立ってほしいことがよくある. 例えば微分と積分の順序を交換したいときなどである. ただ, 一般には (0.1) は成り立たないし, f が可積分にならず右辺が定義すらできない場合もある. 等式 (0.1) が成り立つための十分条件を与えるのがルベーグ収束定理である: ほとんどすべての $x \in A$ に対し $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ となる可積分関数 φ があれば, f は可積分であり, 等式 (0.1) が成り立つ. 上からおさえる可積分関数 φ はとれれば何でもよいのだが, いつどんな φ がとれるかについて直感を得るには慣れが必要だろう. 具体的な状況では, リーマン積分での結果 ($1/x^\alpha$ が原点や無限遠の近くでいつ広義積分可能かなど) が役に立つ. 本文中では, おさえる関数が明らかでないときはもちろん明示するが, それをせず単に “ルベーグ収束定理より” とかいて済ますことも多い.

フビニの定理. これもリーマン積分で経験済みだと思うが, 二変数関数を各変数に関して逐次積分するとき, その順序を交換することで計算が進んで, その結果, 非自明な等式が得られることがある. また, 逐次積分を二変数関数の積分と見なして, 後者を極座標など変数変換によって計算し, それを一変数関数の積分の計算に応用できたりもする. これらが可能になるための十分条件を与えるのがフビニの定理である: 二つの可測集合 A, B と $A \times B$ 上の可積分関数 f に対し, 等式

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy \tag{0.2}$$

が成り立つ. f が $A \times B$ 上可積分であることをチェックするには, フビニの定理のもう一つの主張を使う. それによると, f が非負値ならば, f が可積分かどうかにかかわらず (つまり, 積分値が $+\infty$ になることも含め) 等式 (0.2) が常に成り立つ. よって, 非負とは限らない f に対して等式 (0.2) を示したいときは, 関数 $|f|$ に対して (0.2) にある三つの積分のうち有限なものを一つ見つければよい. どの積分を選べばよいかは状況によるが, どれでもよいのである. それから, これは積集合 $A \times B$ 上の関数の可測性がどう定義されるかに関わることだが, (0.2) の二つ目と三つ目の積分

が定義できるためには, f の片側の変数に関する可測性などが必要になる. しかし, これもまた f が非負値ならば常にクリアされる問題であり, 一般の場合でも f が可積分ならばクリアされる.

まとめると, $A \times B$ 上の可測関数 f に対し, まず $|f|$ に対する三つの積分が定義できるかどうかについては常にできるので気にしなくてよい. そして, もし $|f|$ に対する三つの積分のうちいずれかが有限であるとわかれば, f に対する三つの積分はいずれも定義され等しくなる.

L^p 空間. 二つの可測関数がほとんどすべての点で一致するとき, それらは同値であるということにする. $p \in [1, \infty)$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値可測関数 f で $|f|^p$ が可積分になるようなものを考え, その同値類からなる集合を $L^p(\mathbb{R}^d)$ とかく. これは自然に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になることが示される. そのような f に対し,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

とおくと, これは f の同値類にしかよらず $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上の関数を定めるが, 実は $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上のノルムになる. さらに $L^p(\mathbb{R}^d)$ はこのノルムに関して完備である (一般に, 完備なノルム空間のことをバナッハ空間という). 積分の問題を考えるときなど f とその同値類を特に区別する必要がない場合, それらを同一視してしまうことが多い. $L^p(\mathbb{R}^d)$ の元の列 (f_n) が $L^p(\mathbb{R}^d)$ の元 f に収束するとき, つまり $\|f_n - f\|_p \to 0$ となるとき, “f_n は f に L^p 収束する” または “L^p で $f_n \to f$” などという.

$\mathbb{R}^d$ 上の複素数値可測関数 f で, ある測度零の集合の外で有界になるものを考え, その同値類からなる集合を $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とかく. これも自然に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になる. そのような f に対し,

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \, M \geq 0 \mid \text{ほとんどすべての } x \in \mathbb{R}^d \text{ に対し } |f(x)| \leq M. \}$$

とおく. これは $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の完備なノルムを定める. $L^p(\mathbb{R}^d)$ の場合と同様に, $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元の列 (f_n) と $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元 f に対し $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ のとき, f_n は f に L^∞ 収束するといい, このことを “L^∞ で $f_n \to f$” ともかく.

ルベーグ測度とその正則性. 可測集合 A に対し, その定義関数の積分値は A の長さ・面積・体積といったものに相当する (次元 d によって呼び名が変わる). これを $m(A)$ とかき A の測度ということにする. 可測集合全体の上で定義されるこの関数 m のことを $\mathbb{R}^d$ 上の**ルベーグ測度**という. 可測関数を定義していないので, 可測集合も定義したことになっていないのだが, 可測集合についてはさしあたり次の事実を知っておくべきだろう: $\mathbb{R}^d$ の任意の可測部分集合 A に対し, $m(A) < \infty$ ならば, A は下からコンパクト集合で, 上から開集合で近似できる. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合 K と開集合 U が存在して, $K \subset A \subset U$ かつ $m(U \setminus K) < \varepsilon$ となる. $m(A) = \infty$ であっても, A に含まれるコンパクト集合で任意の大きさの測度をもつものがとれる. この性質はルベーグ測度 m の**正則性**と呼ばれる.

この正則性を用いると, $m(A) < \infty$ のとき, A の定義関数 χ_A を次のようにして連続関数で L^1 近似できる: $\mathbb{R}^d$ 上の距離関数を使うと, K 上で 1 で $\mathbb{R}^d \setminus U$ 上で 0 になるような, コンパクト台をもつ連続関数が得られるので, それを g とかく. すると $U \setminus K$ の外で $\chi_A = g$ であって $U \setminus K$ 上で $|\chi_A - g| \leq 1$ なので, $\|\chi_A - g\|_1 < \varepsilon$ となる. さらに $\mathbb{R}^d$ 上の可積分関数もまた, コンパクト台をもつ連続関数で L^1 近似できる. 一般の可測関数について何かを示すとき, 可測関数の定義に基づくのではなく, このような近似を経て問題を連続関数の場合に帰着させることも多い.

本来, 可測関数のルベーグ積分はルベーグ測度に基づいて定義されるので, ここでの説明とは逆の順序で論理が展開される. ルベーグ積分の定義については適当な教科書を当たってほしい. ただ, このノートの中でルベーグ積分の定義を気にした場面はそれほど多くない. 他にもここで述べなかった定理を使うことがあるが, それらは標準的な教科書で見つけられるものである. ルベーグ収束定理とフビニの定理に比較すると, それらを使う機会は稀である.

演習問題

[1] $[0,1]$ 上の可積分関数の列 (f_n) で次を満たすものを挙げよ: f_n は 0 に L^1 収束するが, どの点 $x \in [0,1]$ をとっても $f_n(x)$ は 0 に収束しない.

[2] $[0,1]$ 上の連続関数の列 (f_n) で次を満たすものを挙げよ: 任意の点 $x \in [0,1]$ で $f_n(x)$ は 0 に収束するが, f_n は 0 に $[0,1]$ 上一様収束せず, さらに L^1 収束もしない.

[3] $n \in \mathbb{N}$ に対し, $[0,1]$ 上の関数 f_n を次で定める: $x \in [0,1/n]$ のとき $f_n(x) = -2n^2x+2n$ とし, $x \in (1/n,1]$ のとき $f_n(x) = 0$ とする. $[0,1]$ 上の連続関数 φ に対し, 積分 $\int_0^1 f_n(x)\varphi(x)\,dx$ は $n \to \infty$ でどんな値に収束するか?

[4] 前の問題 [3] の f_n に対し, $[0,1]$ 上の可積分関数 φ で, 積分 $\int_0^1 f_n(x)\varphi(x)\,dx$ が $n \to \infty$ で収束しないようなものは存在するか?

[5] $[0,1]$ 上の連続関数 f で, ほとんどすべての $t \in [0,1/2]$ に対し $f(t) = 0$ であって, さらにほとんどすべての $t \in [1/2,1]$ に対し $f(t) = 1$ となるものは存在しないことを示せ.

[6] $[0,1]$ の稠密な可測部分集合で, ルベーグ測度が $1/2$ であるものを構成せよ.

[7] 区間 $[0,1]$ の可測部分集合 A で次の性質を満たすものを構成せよ: A の測度は 1 より小さく, 任意の開区間 $I \subset [0,1]$ に対し $A \cap I$ の測度は正である.

第I部

$\mathbb{T}$ 上のフーリエ変換

第1講　序論

1.1　問題の設定

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ とかき, これを (一次元) トーラスとよぶ. $\mathbb{T}$ は, 区間 $[0, 2\pi]$ において 0 と 2π を同一視して得られる空間とも見なせる. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{T}$ 上の連続関数 $t \mapsto e^{int}$ が定まる. それらの線型和

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \quad (N \text{ は非負整数}, a_n \text{ は複素数})$$

は**三角多項式**とよばれる. $a_N \neq 0$ または $a_{-N} \neq 0$ のとき, この N のことを P の**次数**という. さて, 係数 a_n は関数 P により一意に決まるだろうか? つまり, 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し等式

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} b_n e^{int}$$

が成り立つならば, 任意の n に対し $a_n = b_n$ だろうか? これは正しい. なぜなら, 係数 a_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int} \, dt$$

と表されるからである. そして, この等式は次から従う:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} \, dt = \begin{cases} 1 & m = n \text{ のとき}, \\ 0 & m \neq n \text{ のとき}. \end{cases}$$

$\mathbb{T}$ を区間 $[0, 2\pi)$ と自然に同一視し, $\mathbb{T}$ を可測空間と見なす. $\mathbb{T}$ 上の可測関数 f が $\mathbb{T}$ 上可積分であるとは $\int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt < \infty$ となるときをいう. 三角多項式 P の係数を表す積分は, もっと一般に $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f に対して定義される. $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 積分

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt$$

を f の**第 n フーリエ係数**とよぶ. こうして得られる $\mathbb{Z}$ 上の関数 $\widehat{f}$ のことを $f^\wedge$ ともかく. そして, 非負整数 N に対し, 次で定義される $\mathbb{T}$ 上の関数 $S_N(f)$ を f の**第 N フーリエ部分和**という:

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

三角多項式 $P(t)=\sum_{n=-N}^{N}a_ne^{int}$ に対しては, $\widehat{P}(n)=a_n$ であり $P(t)=\sum_{n=-N}^{N}\widehat{P}(n)e^{int}$ と表される．よって, 三角多項式はそのフーリエ係数により完全に決まる．一般の $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f に対して, そのフーリエ係数は f をどの程度記述するのだろうか?

そこで次の問題を考えてみる: $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f に対し, いつ $N\to\infty$ で $S_N(f)\to f$ となるだろうか? もし収束するとすれば, それはどんな意味でだろうか? 三角多項式 P については, その次数以上のすべての非負整数 M に対し $S_M(P)=P$ となるので, この問題は解決している.

1.2 フーリエ係数の基本性質

$\mathbb{T}$ 上の可積分関数の同値類からなるバナッハ空間を $L^1(\mathbb{T})$ とかく．$f\in L^1(\mathbb{T})$ に対し, そのノルムを

$$\|f\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|\,dt$$

とかく．次は定義から従う: 任意の $f,g\in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$(f+g)^\wedge(n)=\widehat{f}(n)+\widehat{g}(n),\quad (\alpha f)^\wedge(n)=\alpha\widehat{f}(n),\quad |\widehat{f}(n)|\le\|f\|_1.$$

フーリエ係数は関数のたたみ込みと相性がよい．ここで, たたみ込みについて復習する (たたみ込みは通常ルベーグ積分論の講義で触れられると思う):

命題 1.1. $f,g\in L^1(\mathbb{T})$ に対し, 次が成り立つ:

(1) ほとんどすべての $t\in\mathbb{T}$ に対し, $\mathbb{T}$ 上の関数 $s\mapsto f(t-s)g(s)$ は $\mathbb{T}$ 上可積分である.

(2) ほとんどすべての $t\in\mathbb{T}$ に対し

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t-s)g(s)\,ds$$

で関数 h を定めると, $h\in L^1(\mathbb{T})$ であって $\|h\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$ が成り立つ.

この関数 h を f と g の**たたみ込み**といい $f*g$ とかく.

証明. $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ 上の関数 F を $F(t,s)=f(t-s)g(s)$ で定める．F は可測である．フビニの定理より

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}|F(t,s)|\,dt\,ds=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-s)|\,dt\right)|g(s)|\,ds=\|f\|_1\|g\|_1<\infty$$

なので, F は $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ 上可積分である．再びフビニの定理より, ほとんどすべての $t\in\mathbb{T}$ に対し, 積分 $h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F(t,s)\,ds$ が定まり (つまり (1) が従い),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F(t,s)\,ds\right|dt\le\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}|F(t,s)|\,dt\,ds=\|f\|_1\|g\|_1.$$

よって (2) が従う. □

バナッハ空間 $L^1(\mathbb{T})$ はたたみ込み $*$ を積とする可換環の構造をもつ:

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t-2\pi} f(u)g(t-u)\,(-du) = (g*f)(t).$$

分配法則 $(f_1+f_2)*g = f_1*g+f_2*g$ と結合法則 $(f*g)*h = f*(g*h)$ を満たすことも容易に確かめられる. フーリエ係数との相性のよさは次の事実に基づく:

命題 1.2. 任意の $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し $(f*g)\hat{}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.

証明. フビニの定理を使うと

$$\begin{aligned}(f*g)\hat{}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f*g)(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)e^{-in(t-s)}e^{-ins}\,ds\,dt \\ &= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).\end{aligned}$$

最後の等式では t で先に積分した. □

複素数の有界列 $a=(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ からなるベクトル空間を $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ とかく. $\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|$ とおくと, これは $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 上の完備なノルムを定める. 写像 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ を $f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ で定める. この写像 $\mathcal{F}$ を**フーリエ変換**という. 命題 1.2 は, $\mathcal{F}$ は $L^1(\mathbb{T})$ での積 $*$ を $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ での各点での積にうつすことを意味する. つまり, 次の図式が可換になる:

$$\begin{tikzcd} L^1(\mathbb{T})\times L^1(\mathbb{T}) \arrow[r, "\mathcal{F}\times\mathcal{F}"] \arrow[d, "*"'] & \ell^\infty(\mathbb{Z})\times\ell^\infty(\mathbb{Z}) \arrow[d, "\text{各点での積}"] \\ L^1(\mathbb{T}) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \ell^\infty(\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

ここで各点での積とは, 二つの数列 $(a_n), (b_n) \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ に対し, 数列 (a_nb_n) を対応させることを意味する. 後で $\mathcal{F}$ が単射であることを示す. その結果 $\mathcal{F}$ を通すことで, たたみ込みを数列の世界で捉えることができ, その方がわかりやすいこともしばしばである.

例 1.3. $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{T}$ 上の関数 φ_n を $\varphi_n(t) = e^{int}$ で定める. $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し,

$$(\varphi_n * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{in(t-s)}f(s)\,ds = \widehat{f}(n)e^{int}.$$

よって, 三角多項式 $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_ne^{int}$ に対し, 等式

$$(P*f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n\widehat{f}(n)e^{int} = \sum_{n=-N}^{N}\widehat{P}(n)\widehat{f}(n)e^{int}$$

が成り立つ. 次で定義される三角多項式 D_N を $\mathbb{T}$ 上の**ディリクレ核**という:

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}.$$

すると, 上の等式は

$$(D_N * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int} = S_N(f)(t)$$

となる. つまり, フーリエ部分和はディリクレ核とのたたみ込みである. D_N をたたみ込む写像 $f \mapsto D_N * f$ を $\mathcal{F}$ でうつすと, それは第 $-N$ 座標から第 N 座標を切り取る写像になる:

$$(D_N * f)^\wedge = (\ldots, 0, 0, \underset{\widehat{-N}}{\widehat{f}(-N)}, \ldots, \underset{\widehat{0}}{\widehat{f}(0)}, \ldots, \underset{\widehat{N}}{\widehat{f}(N)}, 0, 0, \ldots).$$

1.3　チェザロ総和法

数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し, その部分和を S_N とかき, S_N の算術平均を σ_N とかく:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \qquad \sigma_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_n.$$

よく知られているように, もし級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, つまり S_N が収束するならば, σ_N も同じ値に収束する. σ_N が $N \to \infty$ で収束するとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**チェザロ総和可能**であるという. S_N が収束しなくても σ_N は収束しうる. 例えば $a_n = (-1)^{n-1}$ とすると, S_N は値として 1 と 0 を交互にとり, よって $\sigma_N \to 1/2$ である. このことから σ_N は S_N よりも収束しやすいといえる.

フーリエ部分和の話に戻る. $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f に対し, フーリエ部分和 $S_N(f)$ が $N \to \infty$ で収束するかどうかに興味がある. いくつかの場合で $S_N(f)$ が f に L^1 収束することが示されるが, 実はこれは一般には正しくない. そこで $S_N(f)$ の代わりにその算術平均である

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$$

を考え, これが f に L^1 収束するかどうかを考える. 上で示したように, $\sigma_N(f)$ の方が $S_N(f)$ より収束しやすいはずである. $\sigma_N(f)$ を f の**チェザロ和**という. ここで,

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)e^{int}$$

とおくと, $\sigma_N(f) = K_N * f$ となり, $\sigma_N(f)$ をたたみ込みとして表すことができる. この三角多項式 K_N を $\mathbb{T}$ 上の**フェイエール核**という. 後で示すが, 実は任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し $\sigma_N(f)$ は f に L^1 収束する. 証明に必要な K_N の性質をここで見ておく. 次の (2), (3) から, K_N の積分が $N \to \infty$ で原点の近くに集中していく様子が窺える.

命題 1.4.　(1) $K_N(t) = \dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{\sin \frac{N+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2$. 特に $K_N(t) \geq 0$.

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_N(t)\,dt = 1$.

(3) 任意の $\delta \in (0,\pi)$ に対し, $N \to \infty$ で $\sup_{\delta \le |t| \le \pi} K_N(t) \to 0$.

証明. $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}$ なので, 等比級数の部分和の公式より

$$D_N(t) = e^{-iNt}\frac{1-e^{i(2N+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

そして, $K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)$ なので

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\Big(\sin\tfrac{t}{2} + \sin\tfrac{3}{2}t + \cdots + \sin(N+\tfrac{1}{2})t\Big).$$

加法定理より導かれる公式 $\sin(n+\frac{1}{2})t\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(\cos nt - \cos(n+1)t)$ を用いると, 上の等式の右辺は次に等しい:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N+1}\frac{1}{2(\sin\frac{t}{2})^2}(1-\cos t + \cos t - \cos 2t + \cdots + \cos Nt - \cos(N+1)t)\\ &= \frac{1}{N+1}\frac{1}{(\sin\frac{t}{2})^2}\frac{1-\cos(N+1)t}{2} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

これで (1) が従う. (2) は, すべての非負整数 n に対し $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\,dt = 1$ であることから従う. (3) は $\delta \le |t| \le \pi$ ならば $K_N(t) \le (N+1)^{-1}(\sin(\delta/2))^{-2}$ なので従う. □

注意 1.5. 上の証明で公式 $D_N(t) = \sin(N+\frac{1}{2})t/\sin\frac{t}{2}$ を得た. フェイエール核と違って, ディリクレ核は非負でない. また, $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_N(t)\,dt = 1$ である一方, $\|D_N\|_1 \to \infty$ である (1.6 節).

1.4　総和核とその応用

フェイエール核に対して示した性質のうち, 必要な分を抽出する. 次を満たす $L^1(\mathbb{T})$ の元の列 (k_n) を $\mathbb{T}$ 上の**総和核**という:

(1) 任意の n に対し $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\,dt = 1$.

(2) ある $c > 0$ が存在して, 任意の n に対し $\|k_n\|_1 \le c$.

(3) 任意の $\delta \in (0,\pi)$ に対し, $n \to \infty$ で $\int_{\delta \le |t| \le \pi} |k_n(t)|\,dt \to 0$.

条件 (1), (3) より, k_n の積分は $n \to \infty$ で原点の近くに集中していく.

命題 1.4 より, フェイエール核 (K_N) は $\mathbb{T}$ 上の総和核である. 次の定理で示すように, 総和核を可積分関数 f にたたみ込んで得られる関数列は f に色々な意味で収束してくれる. 一方, すでに注意したように (注意 1.5), ディリクレ核 (D_N) は (2) を満たさず総和核でない. この事実がフーリエ部分和の収束の問題をデリケートかつ興味深いものにする一つの理由である.

$\mathbb{T}$ 上のすべての複素数値連続関数からなるベクトル空間を $C(\mathbb{T})$ で表す. $f \in C(\mathbb{T})$ に対し, そのノルムを $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|$ で定める.

定理 1.6. (k_n) を $\mathbb{T}$ 上の総和核とする．任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対し，$n \to \infty$ で $k_n * f$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する．

証明. $f \in C(\mathbb{T})$ をとる．$s = 0$ の近くと遠くの部分で積分を分けて，それぞれを評価する ($\delta \in (0, \pi)$ は後で決める):

$$\begin{aligned}|(k_n * f)(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} (f(t-s) - f(t)) k_n(s)\, ds\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)|\, |k_n(s)|\, ds. \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\varepsilon > 0$ をとる．f は $\mathbb{T}$ 上一様連続なので，$\delta \in (0, \pi)$ が存在して，任意の $t \in \mathbb{T}$ と任意の $s \in (-\delta, \delta)$ に対し $|f(t-s) - f(t)| < \varepsilon$. (k_n) は総和核なので，$N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |k_n(t)|\, dt < \varepsilon.$$

$t \in \mathbb{T}$ をとる．$n \geq N$ ならば (1.1) の右辺に関して，

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon |k_n(s)|\, ds \leq c\varepsilon, \\ \text{第 2 項} &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |k_n(s)|\, ds \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon. \end{aligned}$$

c は総和核の定義における定数である．ゆえに $|(k_n * f)(t) - f(t)| \leq (c + 2\|f\|_\infty)\varepsilon$. □

系 1.7 (ワイエルシュトラスの多項式近似定理)**.**

(1) $\mathbb{T}$ 上の任意の連続関数は三角多項式で一様近似できる．

(2) $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ 上の任意の連続関数は多項式で一様近似できる．

証明. (1) $f \in C(\mathbb{T})$ とする．定理 1.6 より $K_N * f$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する．$K_N * f$ は三角多項式なのでこれで示せた．

(2) 適当な平行移動とスケールを考えることで，考える閉区間は単位区間 $[0, 1]$ としてよい．f を $[0, 1]$ 上の連続関数とする．f を $[0, 2\pi]$ 上の連続関数 g で $g(0) = g(2\pi)$ となるものに拡張し，$g \in C(\mathbb{T})$ と見なす．(1) より g は三角多項式 $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ で一様近似できる．e^{int} をテイラー展開することで P は t の多項式で $[0, 1]$ 上一様近似できる． □

定理 1.8. (k_n) を $\mathbb{T}$ 上の総和核とし，$1 \leq p < \infty$ とする．このとき，任意の $f \in L^p(\mathbb{T})$ に対し $k_n * f$ は f に L^p 収束する．

証明の前に L^p 関数について準備する．$1 \leq p < \infty$ のとき，$f \in L^p(\mathbb{T})$ のノルムを次で定める:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

命題 1.9. $1 \le p < \infty$ とし, $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ とする. このとき, ほとんどすべての $t \in \mathbb{T}$ に対し, 積分

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\,ds$$

が定まる. また, $f*g \in L^p(\mathbb{T})$ であって $\|f*g\|_p \le \|f\|_p\|g\|_1$ が成り立つ (変数変換により, 積分

$$(g*f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t-s)f(s)\,ds$$

もほとんどすべての $t \in \mathbb{T}$ に対して定まり, $g*f = f*g$ である).

証明. $p=1$ のときはすでに示したので $p>1$ とする. この場合はフビニの定理に加えてヘルダー不等式を使って示される. $1/p+1/q=1$ となる $1<q<\infty$ をとる. $|g(s)| = |g(s)|^{1/p}|g(s)|^{1/q}$ と分けて, ヘルダー不等式をはじめに使う:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t-s)g(s)|\,ds\right)^p dt\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-s)|^p|g(s)|\,ds\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{T}}|g(s)|\,ds\right)^{1/q}\right)^p dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t-s)|^p|g(s)|\,ds\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(s)|\,ds\right)^{p/q} dt\\
&= \|f\|_p^p\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(s)|\,ds\right)^{1+p/q} = \|f\|_p^p\|g\|_1^p.
\end{aligned}$$

二つ目の等式では t で先に積分した. よって, ほとんどすべての $t \in \mathbb{T}$ に対し $(f*g)(t)$ が定まる. 残りの主張も上の不等式から従う. □

補題 1.10. $1 \le p < \infty$ のとき, 任意の $L^p(\mathbb{T})$ の元は $C(\mathbb{T})$ の元で L^p 近似できる.

証明. $f \in L^p(\mathbb{T})$ と $\varepsilon > 0$ をとる. f は有界な L^p 関数で L^p 近似できるので, はじめから f は有界であるとしてよい. f は単関数 $\varphi = \sum_{n=1}^N a_n\chi_{A_n}$ (a_n は複素数, A_n は $\mathbb{T}$ の可測部分集合) で一様近似できる. ここで χ_{A_n} は A_n の定義関数を表す. $\mathbb{T}$ 上のルベーグ測度 m の正則性より, $\mathbb{T}$ のコンパクト部分集合 K_n と開部分集合 U_n で

$$K_n \subset A_n \subset U_n, \quad m(U_n \setminus K_n) < \left(\frac{\varepsilon}{N(|a_n|+1)}\right)^p$$

となるものがとれる. $\mathbb{T}$ 上の距離関数を用いると, 次を満たす連続関数 g_n で χ_{A_n} を近似できる: $0 \le g_n \le 1$ であり, K_n 上で $g_n = 1$, $\mathbb{T}\setminus U_n$ 上で $g_n = 0$, そして

$$\|g_n - \chi_{A_n}\|_p^p \le m(U_n \setminus K_n) < \left(\frac{\varepsilon}{N(|a_n|+1)}\right)^p.$$

すると $\|\varphi - \sum_{n=1}^N a_n g_n\|_p < \varepsilon$ となり, φ は連続関数 $\sum_{n=1}^N a_n g_n$ で L^p 近似される. □

定理 1.8 の証明. $f \in L^p(\mathbb{T})$ とし, $\varepsilon > 0$ をとる. 補題 1.10 より, $g \in C(\mathbb{T})$ が存在して $\|f-g\|_p < \varepsilon$. 定理 1.6 より, $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \ge N$ ならば $\|k_n * g - g\|_\infty < \varepsilon$. $n \ge N$ ならば,

$$\|k_n * f - f\|_p \le \|k_n * (f-g)\|_p + \|k_n * g - g\|_p + \|g-f\|_p < (c+1+1)\varepsilon. \qquad \square$$

系 1.11. $1 \le p < \infty$ のとき, 任意の $L^p(\mathbb{T})$ の元は三角多項式で L^p 近似できる.

実際, $L^p(\mathbb{T})$ の元 f とフェイエール核 K_N に対し, $K_N * f$ は f に L^p 収束し, $K_N * f$ は三角多項式である.

系 1.12 (フーリエ係数の一意性)**.** $L^1(\mathbb{T})$ の元 f が任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{f}(n) = 0$ を満たすならば, $f = 0$ である. よって, フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon \ell^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ は単射である.

証明. 定理 1.8 より $K_N * f$ は f に L^1 収束する. 一方, f のフーリエ係数がすべて 0 なので,

$$(K_N * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \widehat{f}(n) e^{int} = 0.$$

よって $f = 0$. □

系 1.13 (リーマン・ルベーグの補題)**.** 任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, $|n| \to \infty$ で $\widehat{f}(n) \to 0$.

証明. $f \in L^1(\mathbb{T})$ とし, $\varepsilon > 0$ をとる. 系 1.11 より, 三角多項式 $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ が存在して $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. $|n| \ge N + 1$ ならば, $\widehat{P}(n) = 0$ であることに注意して,

$$|\widehat{f}(n)| \le |\widehat{f}(n) - \widehat{P}(n)| + |\widehat{P}(n)| \le \|f - P\|_1 < \varepsilon.$$ □

1.5　アーベル総和法

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を数列とする. $0 \le r < 1$ に対する**アーベル和**

$$A_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n$$

を考える. 任意の $0 \le r < 1$ に対して A_r を定義する級数が収束し, さらに $r \to 1$ で A_r が有限値 α に収束するとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は α に**アーベル総和可能**であるという.

命題 1.14. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するとし, その値を α とかく. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は α にアーベル総和可能である.

証明. $0 \le r < 1$ として, 次の変形を行う: $S_0 = 0$ とおいて,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} r^n a_n = \sum_{n=1}^{N} r^n (S_n - S_{n-1}) &= \sum_{n=1}^{N-1} (r^n - r^{n+1}) S_n + r^N S_N \\ &= (1 - r) \sum_{n=1}^{N-1} r^n S_n + r^N S_N\end{aligned}$$

(二つ目の等式での変形はアーベル変換とよばれ, これは数列に対する部分積分である. 4.2 節でも扱う). S_N は有限値 α に収束するので, 右辺の第 2 項は $N \to \infty$ で 0 に収束する. さらに第 1 項は $N \to \infty$ で収束し, その極限 $(1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n$ は $r \to 1$ で α に収束する (確かめよ). □

アーベル総和可能だが収束しない級数は存在する. 例えば $a_n = (-1)^{n-1}$ のとき, $A_r = r/(1+r)$ であり, $r \to 1$ で $A_r \to 1/2$. よって一般に, 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し, 部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ の収束とアーベル和 A_r の収束を比較すると後者の方が起こりやすいといえる.

注意 1.15. 命題 1.14 は次の形に言い換えられる: 巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束半径 1 をもつとき, もし級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $[0,1]$ 上の関数 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は連続である. この主張はアーベルの連続性定理として知られている.

以上を踏まえて, フーリエ部分和の話に戻る. 1.3 節でフーリエ部分和の算術平均を考えたのと同様に, 今度は $f \in L^1(\mathbb{T})$ と $0 \le r < 1$ に対し,

$$A_r(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int}$$

とおく. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $|\widehat{f}(n)| \le \|f\|_1$ なので, 右辺の級数は絶対収束し, さらにその収束は $t \in \mathbb{T}$ に関して一様である (よって $A_r(f)$ は $\mathbb{T}$ 上の連続関数である). $A_r(f)$ を f の**アーベル・ポアソン和**という.

$r \to 1$ として $A_r(f)$ が f に収束するかどうかに興味がある. 命題 1.14 を踏まえると, $A_r(f)$ は $S_N(f)$ より収束しやすいはずである. そこで, チェザロ和 $\sigma_N(f)$ に対してそうしたように, $A_r(f)$ をたたみ込みとして表す. $\mathbb{T}$ 上の関数 P_r を

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$$

で定めると, ちょうど $A_r(f) = P_r * f$ である. 関数 P_r を $\mathbb{T}$ 上の**ポアソン核**という. フェイエール核の場合と同様に, 次の性質がポアソン核に対して示される:

命題 1.16. (1) $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$. 特に $P_r(t) \ge 0$.

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P_r(t)\,dt = 1$.

(3) 任意の $\delta \in (0,\pi)$ に対し, $r \to 1$ で $\sup_{\delta \le |t| \le \pi} P_r(t) \to 0$.

証明. (1) は等比級数の公式から従う:

$$\begin{aligned} P_r(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \frac{re^{it}}{1-re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} \\ &= 1 + \frac{re^{it} - r^2 + re^{-it} - r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}. \end{aligned}$$

(2) は積分と無限和を交換すればよい. (3) はまず $\delta \in (0,\pi/2)$ としてよく, すると $\delta \le |t| \le \pi$ のとき $1 - 2r\cos t + r^2 \ge 1 - 2r\cos\delta + r^2 = (r-\cos\delta)^2 + 1 - \cos^2\delta \ge 1 - \cos^2\delta > 0$ なので従う. □

この命題により, ポアソン核 $(P_r)_{r\in[0,1)}$ は $\mathbb{T}$ 上の総和核となる (パラメータ r は自然数でないが, 総和核の定義で適当に言い換えればよい. 後の議論に影響はない). 前節で述べた系はすべて, フェイエール核の総和核としての性質を応用して得られた. ポアソン核の応用を紹介しよう.

ポアソン核は正則関数の実部として実現される: $\mathbb{T}$ の元を表すのに, t の代わりに θ を使うことにする. $z = re^{i\theta}$ を極座標表示とする. $0 \le r < 1$ に対し,

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n + \bar{z}^n) = 1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

単位開円板 $D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$ 上の関数 P を次で定義する:

$$P(x, y) = P_r(\theta), \quad (x, y) \in D, \quad x + iy = re^{i\theta}.$$

P は D 上の正則関数の実部なので, D 上の調和関数である. つまり $\triangle P = 0$. ここで $\triangle$ はラプラシアンである:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$f \in L^1(\mathbb{T})$ とする. D 上の関数 u を $u(x, y) = (P_r * f)(\theta)$ で定める. 実は D 上で $\triangle u = 0$ が成り立つ. $\triangle P = 0$ なので, 微分と積分の順序交換をしてこれを示すこともできようが, 極座標の原点での取り扱いが面倒なのでそれはやめて級数表示する:

$$(P_r * f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n) \bar{z}^n.$$

右辺第 1 項は D 上の正則関数であり, 第 2 項は D 上の正則関数の複素共役である. よって $\triangle u = 0$.

もし f が $\mathbb{T}$ 上連続ならば, 定理 1.6 より, $r \to 1$ のとき θ に関して一様に $u(re^{i\theta}) \to f(\theta)$. ゆえにこの u は, ディリクレ境界値問題

> “与えられた ∂D 上の関数 f に対し, D 上で $\triangle u = 0$ かつ ∂D 上で $u = f$ となる関数 u を求めよ.”

の解で D 上 C^∞ 級かつ $D \cup \partial D$ 上連続なものを与える.

D を一様な物質でできている円板とする. 境界 ∂D の温度は常に f で保たれているとし, 十分時間がたち D の温度の時間変化がなくなったとする. そのときの D の温度を与えるのが解 u である.

1.6　ディリクレ核についての補足

ディリクレ核 D_N の L^1 ノルムの非有界性を指摘しておく. このことは, フーリエ部分和が複雑に振る舞うような $\mathbb{T}$ 上の関数の存在と本質的に関わる. 実際, 総和核の場合とは異なり, $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f でそのフーリエ部分和 $D_N * f$ が f に L^1 収束しないようなものが存在する. さらに加えて, $\mathbb{T}$ 上の連続関数 g で $D_N * g$ のある点での値が $N \to \infty$ で発散するようなものが存在する. このような関数 f, g は次の命題を経て具体的に構成される. 詳細は補講 A で扱う.

命題 1.17. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $\|D_N\|_1 \ge (4/\pi^2) \log N$. 特に $N \to \infty$ で $\|D_N\|_1 \to \infty$.

証明. $t \geq 0$ のとき $\sin(t/2) \leq t/2$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(N+\frac{1}{2})t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx + \int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\right) \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \geq \frac{4}{\pi^2}\log N.
\end{aligned}$$

□

演習問題

[1] $\mathbb{T}$ 上の関数 f を $t \in [0,\pi]$ ならば $f(t)=1$ とし $t \in (-\pi,0)$ ならば $f(t)=0$ として定める. $f*f$ を求めよ.

[2] $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{T}$ 上の関数 φ_n を $\varphi_n(t)=e^{int}$ で定める. 次を求めよ:

(i) $(\varphi_1+2\varphi_2)*(3\varphi_3+4\varphi_4+5\varphi_5)$

(ii) $(\varphi_{-1}+2\varphi_0+3\varphi_1)*(\varphi_0+2\varphi_1+3\varphi_2)$

[3] $\mathbb{T}$ 上の関数 $f(t)=\cos t$ に対し, f を n 個たたみ込んで得られる関数 $f*\cdots*f$ を求めよ. $\sin t$ に対しても同じものを求めよ.

[4] $\mathbb{T}$ 上の関数 f を $t \in [0,\pi]$ ならば $f(t)=1$ とし, $t \in (-\pi,0)$ ならば $f(t)=0$ として定める. f のフーリエ係数を求めよ.

[5] $\mathbb{T}$ 上の関数 $f(t)=(\cos t)^m$ $(m \in \mathbb{N})$ のフーリエ係数を求めよ.

[6] 任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, $K_N * D_N * f$ は f に L^1 収束することを示せ.

[7] (i) $K_N * K_N$ を求めよ.

(ii) 任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, $K_N * K_N * f$ は f に L^1 収束することを示せ.

(iii) 三角多項式 L_N を次で定める:

$$L_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)|n|e^{int}.$$

任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, $L_N * f$ は 0 に L^1 収束することを示せ.

[8] 関数列 $(K_N * K_N)$ は $\mathbb{T}$ 上の総和核になるか?

[9] (k_m) を $\mathbb{T}$ 上の総和核とし, $n \in \mathbb{Z}$ とする. 数列 $(\widehat{k}_m(n))_m$ はどんな値に収束するか?

[10] $f \in L^1(\mathbb{T})$ で $f*f=f$ となるものをすべて求めよ.

[11] (i) $f \in L^1(\mathbb{T})$ とする. f にディリクレ核 D_N を m 回たたみ込んで得られる関数を f_m とかく. つまり, $f_0 = f$, $f_m = D_N * f_{m-1}$ により f_m を帰納的に定める. $m \to \infty$ で f_m はどんな関数に L^1 収束するか? また, f_m は $\mathbb{T}$ 上一様収束するか?

(ii) 同様の問題を D_N の代わりにフェイエール核 K_N にして考察せよ.

[12] $f \in L^1(\mathbb{T})$ で, 任意の $g \in C^\infty(\mathbb{T})$ に対し $f * g = g$ となるものは存在しないことを示せ.

[13] 次で定義される三角多項式 L_N に対し, $\|L_N * f - f\|_1 \to 0$ となるような $f \in L^1(\mathbb{T})$ を決定せよ (フーリエ係数の言葉で f を記述してもよい).

(i) $L_N(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) e^{int}$.

(ii) $L_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)^2 e^{int}$.

(iii) $L_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)^N e^{int}$.

[14] 次で定義される三角多項式 L_N は, すべての $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し $\|L_N * f - f\|_1 \to 0$ という性質を満たすか?

(i) $L_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} + \sum_{n=N+1}^{3N+1} \left(1 - \frac{|n-2N-1|}{N+1}\right) e^{int}$.

(ii) $L_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{-1} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} + \sum_{n=0}^{2N} \left(1 - \frac{n}{2N+1}\right) e^{int}$.

(iii) $L_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{(N+1)^2}\right) e^{int}$.

[15] ディリクレ核は総和核の定義の条件 (3) を満たすか?

[16] 定理 1.8 は $p = \infty$ のとき正しくない. なぜか?

[17] $(a_n)_{n=1}^\infty$ を数列, $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ をその部分和とする. $S_0 = 0$ とすると, 次が成り立つ:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) S_n + \frac{S_N}{N}.$$

これを用いて, もし S_N が有界ならば, 級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n/n$ は収束することを示せ.

[18] (i) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $S_N = \sum_{n=1}^N \sin(nx)$ は有界であることを示せ.

(ii) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, 級数 $\sum_{n=1}^\infty n^{-1} \sin(nx)$ は収束することを示せ.

[19] 級数 $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} n$ はアーベル総和可能だが, チェザロ総和可能でないことを示せ.

[20] $\mathbb{T}$ 上の連続関数 f を $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(e^{int}+e^{-int})$ で定める．このとき, $c_1, c_2>0$ が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し $\|S_N(f)-f\|_\infty \le c_1/N$ と $\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \ge c_2(\log N)/N$ が成り立つことを示せ (こういった収束のスピードについては [猪 1, 第 9 章] が詳しい).

[21] $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ とする．$f\in L^1(\mathbb{T})$ で, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{(n-\alpha_1)\cdots(n-\alpha_m)}$$

となるものが存在し, それは $\mathbb{T}$ 上の関数 $t^k e^{-\alpha t}$ (k は非負整数, α は実部が 0 でない複素数, $t\in[0,2\pi)$) の線型結合になることを示せ.

[22] $\mathbb{T}$ 上の関数 $f(t)=\cos(e^{it})$ のフーリエ係数を求めよ.

[23] $D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\,\}$ とする．次で定まる $\mathbb{T}$ 上の関数 f を ∂D 上の関数と見なしたとき, f に対するディリクレ境界値問題の解 u を求めよ.

(i) 三角多項式 $f(t)=\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ (N は非負整数, a_n は複素数).

(ii) $f(t)=\cos(e^{it})$.

(iii) $f(t)=t$ $(0<t<2\pi)$.

ノート

三角多項式の係数の問題を動機とする導入は [Kat, I.1] に従った．実際, 第 I 部の話題の多くは [Kat] に基づいている.

第2講　フーリエ部分和の収束

f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とする ($L^1(\mathbb{T})$ での同値類ではない). 本講では, f のフーリエ部分和に $\mathbb{T}$ の点 t を代入して得られる数列 $(S_N(f)(t))_{N=0}^{\infty}$ が, いつどんな値に収束するかについて論じる. 例えば次を示す:

(1) f が t で連続であって, もし $S_N(f)(t)$ が $N \to \infty$ で収束するならば, その極限は $f(t)$ である (系 2.2).

(2) f が t で微分可能ならば, $S_N(f)(t)$ は $f(t)$ に収束する (系 2.9).

(3) f が C^1 級となる開区間があれば, それに含まれる任意の閉区間上で $S_N(f)$ は f に一様収束する (命題 2.16).

一般の f については, $S_N(f)(t)$ が $f(t)$ のよい近似を与えず, 複雑に振る舞うことが起こり得る. 実際, $\mathbb{T}$ 上の連続関数 f で $S_N(f)(0)$ が発散するようなものが存在する (A.2 節).

2.1　チェザロ和の各点収束

各 $t \in \mathbb{T}$ に対し, チェザロ和 $\sigma_N(f)(t)$ は $S_N(f)(t)$ の算術平均として得られる数列なので, 前者の方が後者より収束しやすいはずである. 実際, フェイエール核 (K_N) の総和核としての性質により, かなり一般的な状況下で $\sigma_N(f)(t)$ $(= (K_N * f)(t))$ が $f(t)$ に収束することが示される.

定理 2.1 (フェイエールの定理)**.** f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とし, $t_0 \in \mathbb{T}$ とする. もし極限

$$\alpha = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} (f(t_0 + h) + f(t_0 - h))$$

が有限の値で存在するならば, $N \to \infty$ で $\sigma_N(f)(t_0) \to \alpha$. 特に f が t_0 で連続ならば, $N \to \infty$ で $\sigma_N(f)(t_0) \to f(t_0)$.

証明. 次の等式に注目する (K_N が偶関数であることを使う):

$$\begin{aligned}
\sigma_N(f)(t_0) - \alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - t) K_N(t)\, dt - \alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(t_0 + t) + f(t_0 - t)) K_N(t)\, dt - \alpha \qquad (2.1) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - 2\alpha) K_N(t)\, dt.
\end{aligned}$$

右辺の積分を 0 の近くの部分と遠くの部分に分けてそれぞれ評価する.

$\varepsilon > 0$ をとる. 極限 α が存在するので, $\delta \in (0, \pi)$ が存在して, 任意の $t \in (-\delta, \delta)$ に対し

$$|f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - 2\alpha| < \varepsilon.$$

K_N は $N \to \infty$ で $t = 0$ の近くに集中していくので, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $N \geq N_1$ かつ $\delta \leq |t| \leq \pi$ ならば $K_N(t) < \varepsilon$. $N \geq N_1$ として, (2.1) の右辺の積分を $[0, \delta]$ と $[\delta, \pi]$ の部分に分けると,

$$\begin{aligned}
\text{(2.1) の絶対値} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta + \int_\delta^\pi |f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - 2\alpha| K_N(t)\, dt. \\
\text{右辺第 1 項} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \varepsilon K_N(t)\, dt \leq \varepsilon. \\
\text{右辺第 2 項} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi |f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - 2\alpha| \varepsilon\, dt \leq (\|f\|_1 + |\alpha|)\varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに $|\sigma_N(f)(t_0) - f(t_0)| < (1 + \|f\|_1 + |\alpha|)\varepsilon$. □

次の系は $\sigma_N(f)(t_0)$ が $S_N(f)(t_0)$ の算術平均であることから従う:

系 2.2 (フェイエールの系)**.** f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とし, $t_0 \in \mathbb{T}$ とする. 極限

$$\alpha = \frac{1}{2}\lim_{h \to 0}(f(t_0 + h) + f(t_0 - h))$$

が有限の値で存在するとする. もし $S_N(f)(t_0)$ の $N \to \infty$ での極限が存在するならば, その極限値は α に等しい. 特に, f が t_0 で連続であって, かつ $S_N(f)(t_0)$ の $N \to \infty$ での極限が存在するならば, その極限値は $f(t_0)$ に等しい.

ゆえに, $S_N(f)(t_0)$ の $N \to \infty$ での極限について, もしそれが存在することがわかれば, その値は大体把握できるといえよう.

注意 2.3. 定理 2.1 において, チェザロ和 $\sigma_N(f)$ の代わりにアーベル・ポアソン和 $A_r(f) = P_r * f$ としても同じ結論が成り立つ. フェイエール核と同様に, ポアソン核 P_r も偶関数だからである. その結果, 次が従う: $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f が $\mathbb{T}$ の点 t_0 で連続ならば, 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int_0}$ は $f(t_0)$ にアーベル総和可能である. つまり, $0 \leq r < 1$ に対し $A_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int_0}$ とおくと, $r \to 1$ で A_r は $f(t_0)$ に収束する. f に対するディリクレ境界値問題の解を u とかくと (1.5 節), これは u の境界付近での振る舞いとして捉えることができる.

2.2　フーリエ部分和の各点収束

収束するための十分条件をいくつか挙げる.

命題 2.4. (1) f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とする. もし $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$ ならば, $\mathbb{T}$ 上の連続関数 g が存在して $S_N(f)$ は g に $\mathbb{T}$ 上一様収束する. さらに, $\mathbb{T}$ のほとんどすべての点 t に対し $f(t) = g(t)$ が成り立つ.

(2) $f \in C(\mathbb{T})$ に対し, もし $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$ ならば, $S_N(f)$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する.

(3) 任意の $f \in C^2(\mathbb{T})$ に対し $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. よって $S_N(f)$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する.

証明. (1) $\mathbb{T}$ 上の関数 g を $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}$ で定義すると, 仮定よりこの級数は $\mathbb{T}$ 上一様収束する. よって g は $\mathbb{T}$ 上連続であり, 前半の主張が従う. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ が成り立ち, フーリエ係数の一意性 (系 1.12) より, g は f とほとんどすべての点で一致する.

(2) (1) より, $g \in C(\mathbb{T})$ が存在して $S_N(f)$ は g に $\mathbb{T}$ 上一様収束し, $\mathbb{T}$ のほとんどすべての点で $f = g$ である. f と g はともに $\mathbb{T}$ 上連続なので, $\mathbb{T}$ のすべての点で $f = g$ である.

(3) 任意の 0 でない整数 n に対し

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{in}f(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt\right) \quad (\text{第 1 項} = 0) \\
&= \frac{1}{2\pi in}\left(\left[-\frac{1}{in}f'(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,dt\right) \quad (\text{第 1 項} = 0) \\
&= -\frac{1}{n^2}\widehat{f''}(n).
\end{aligned}$$

よって $|\widehat{f}(n)| \le \|f''\|_1/n^2$ となり, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. □

具体的な関数のフーリエ係数を計算する. 命題 2.4 (2) を応用することで, 非自明な等式が得られる.

例 2.5. $f(t) = t^2$ $(-\pi \le t \le \pi)$ とする. 0 でない整数 n に対し

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{in}t^2 e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} 2te^{-int}\,dt\right) \quad (\text{第 1 項} = 0) \\
&= \frac{1}{\pi in}\left(\left[-\frac{1}{in}te^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,dt\right) \quad (\text{第 2 項} = 0) \\
&= \frac{2}{n^2}(-1)^n.
\end{aligned}$$

また, $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \pi^2/3$. 特に $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. 命題 2.4 (2) より, 任意の $t \in [-\pi, \pi]$ に対し $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$, つまり

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^n(e^{int} + e^{-int}) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt.$$

$t = 0$ として $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^2 = \pi^2/12$. $t = \pi$ として $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

例 2.6. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ とし, $f(t) = \cos \alpha t$ $(-\pi \le t \le \pi)$ とする. $f(t) = f(-t)$ なので $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$.

任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2}(\widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha t \cos nt \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t}{2} \, dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n \sin\pi\alpha}{\alpha+n} + \frac{(-1)^n \sin\pi\alpha}{\alpha-n}\right) = \frac{(-1)^n \alpha \sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}.
\end{aligned}$$

特に $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$. 命題 2.4 (2) より, 任意の $t \in [-\pi, \pi]$ に対し $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$, つまり

$$\cos\alpha t = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha \sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)} \cos nt.$$

$t = \pi$ とすると

$$\frac{\pi}{\tan\pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\alpha+n}. \tag{2.2}$$

一つ目の等式で $1/\alpha$ を左辺に移項した後, $0 < \alpha \leq x < 1$ で α に関して積分し log をはずすと, 任意の $x \in (0, 1)$ に対し次の等式が得られる:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

他の区間で α についての積分を考えると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対してこの等式が得られる ($k \in \mathbb{N}$ に対し, 区間 $k < \alpha \leq x < k+1$ を考えるとき, $1/\alpha$ の代わりに $1/(\alpha-k)$ を (2.2) の左辺に移項して積分する).

次の例に進む前に, $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f のフーリエ係数は f の $L^1(\mathbb{T})$ での同値類にしかよらないことに注意する. よって, 有限個の点で f の値を変えたとしても, そのフーリエ部分和は変わらず, フーリエ部分和の収束性には何ら影響しない. 有限個の点で定義されておらず, その他の点で f に一致するような関数に対しても同様である.

例 2.7. $f(t) = t$ $(0 < t < 2\pi)$ とする. 0 でない整数 n に対し

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-int} \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{in}te^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-int} \, dt\right) \quad (\text{第 2 項} = 0) \\
&= -\frac{1}{in} = \frac{i}{n}.
\end{aligned}$$

また, $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t \, dt = \pi$. この例では $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$ でない. 実際, $\mathbb{T}$ 上の連続関数で f とほとんどすべての点で一致するものは存在せず, f に対して命題 2.4 (1) の結論は成り立たない.

フーリエ部分和を求めておく:

$$S_N(f)(t) = \pi + \sum_{n=1}^{N} \frac{i}{n}(e^{int} - e^{-int}) = \pi - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nt}{n}.$$

命題 2.4 (1) を使うにはフーリエ係数についての情報が必要になる. 一方, 次の定理が示すように, 関数 f のフーリエ部分和が点 t で収束することを示すには, f が t の近くである程度よい振る舞いをすることがわかれば, 実はそれで十分である.

定理 2.8 (ディニのテスト)**.** f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とし, $t_0 \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. もし

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(t_0+t) + f(t_0-t) - 2\alpha}{t} \right| dt < \infty$$

ならば, $N \to \infty$ で $S_N(f)(t_0) \to \alpha$.

系 2.9. f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とし, $t_0 \in \mathbb{T}$ とする. 次が成り立つ:

(1) f が t_0 で微分可能ならば, $S_N(f)(t_0) \to f(t_0)$.

(2) より一般に, f が t_0 で左右極限 $f(t_0 \pm 0)$ をもち, さらに f が t_0 で左右微分をもつならば, $S_N(f)(t_0) \to (f(t_0+0) + f(t_0-0))/2$.

ここで f の t_0 での左右極限とは, 極限 $f(t_0 \pm 0) = \lim_{h \searrow 0} f(t_0 \pm h)$ を意味し, f が t_0 で左右微分をもつとは, 極限 $\lim_{h \searrow 0}(f(t_0 \pm h) - f(t_0 \pm 0))/h$ が存在することを意味する.

系 2.9 の証明. (2) を示せば十分である. $\alpha = (f(t_0+0) + f(t_0-0))/2$ とおく. $0 < t < \pi$ のとき

$$\left| \frac{f(t_0+t) + f(t_0-t) - 2\alpha}{t} \right| \le \left| \frac{f(t_0+t) - f(t_0+0)}{t} \right| + \left| \frac{f(t_0-t) - f(t_0-0)}{t} \right|.$$

右辺のどちらの項も, $t = 0$ の近くで有界なので, $0 < t < \pi$ で可積分. よってディニのテストが適用できる. □

定理 2.8 の証明の前に, 例 2.7 の関数 $f(t) = t$ $(0 < t < 2\pi)$ を考えてみる. 系 2.9 (1) より, 任意の $t \in (0, 2\pi)$ に対し $f(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}(\sin nt)/n$. よって, 任意の $t \in (0, 2\pi)$ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

また, 任意の非負整数 N に対し $S_N(f)(0) = \pi$ であり, これは確かに次と一致する:

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2}.$$

定理 2.8 の証明. リーマン・ルベーグの補題 1.13 の典型的な応用例である. 次に気をつける: 一般に $g \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, リーマン・ルベーグの補題 1.13 より $n \to \infty$ で

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos nt\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\frac{e^{int} + e^{-int}}{2}\, dt = \frac{\widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n)}{2} \to 0.$$

同様に $n \to \infty$ で $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin nt\,dt \to 0$. 定理 2.8 の記号の下で

$$\begin{aligned}
S_N(f)(t_0) - \alpha &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t_0 - t) - \alpha) D_N(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - 2\alpha) D_N(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t) - 2\alpha}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}}_{=:\,\varphi(t)} \sin(N + \tfrac{1}{2}) t\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\varphi(t)\cos\tfrac{t}{2}\sin Nt + \varphi(t)\sin\tfrac{t}{2}\cos Nt\right)\,dt.
\end{aligned}$$

上で定義した関数 φ は区間 $[0,\pi]$ 上可積分であることに注意する. 上の右辺は $N \to \infty$ で 0 に収束する. 実際, $[0,\pi]$ の定義関数を $\chi_{[0,\pi]}$ で表すと, 第 1 項の積分は

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos\frac{t}{2}\chi_{[0,\pi]}(t)\sin Nt\,dt$$

とかける. 関数 $\varphi(t)\cos\frac{t}{2}\chi_{[0,\pi]}(t)$ は $\mathbb{T}$ 上可積分なので, 最初の注意よりこの積分は 0 に収束する. 第 2 項の積分についても同様である. □

2.3　フーリエ部分和の一様収束

命題 2.4 で, $f \in C^2(\mathbb{T})$ に対し $S_N(f)$ が f に $\mathbb{T}$ 上一様収束することを示したが, その証明は $f \in C^1(\mathbb{T})$ に対しては適用できない. 実は次で示すように, より一般の f に対し $S_N(f)$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する.

定理 2.10. $\mathbb{T}$ 上の関数 f は, $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ で $\int_0^{2\pi} \varphi(s)\,ds = 0$ となるものを用いて

$$f(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds + f(0), \quad t \in \mathbb{T}$$

とかけるとする (よって f は $\mathbb{T}$ 上連続である). このとき, $S_N(f)$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する.

注意 2.11. $f \in C^1(\mathbb{T})$ ならば, φ として f' をとると定理 2.10 の仮定が満たされる. ルベーグ積分論でよく知られているように, 関数 f が定理 2.10 の仮定を満たすためには, f が $\mathbb{T}$ 上絶対連続であることが必要十分である. また, 定理 2.10 の設定でさらに $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ を仮定すると, 同じ結論に対する (かなり短い) 別証明が得られる (命題 3.9). $f \in C^1(\mathbb{T})$ ならばこの仮定も満たされる.

三つの補題を準備する. ディニのテスト 2.8 の証明でリーマン・ルベーグの補題 1.13 が本質的であったのと同様に, 定理 2.10 の証明では, 次に示すリーマン・ルベーグの補題 1.13 の一様収束版が本質的になる:

補題 2.12. $\mathbb{R}$ の有界閉区間 I から $L^1(\mathbb{T})$ への写像 $t \mapsto h_t$ で ($L^1(\mathbb{T})$ のノルム位相に関して) 連続なものに対し, $\widehat{h_t}(n)$ は $|n| \to \infty$ で I の点 t に関して一様に 0 に収束する.

証明. $\varepsilon > 0$ をとる. $I = [a, b]$ とおく. I はコンパクトなので, 写像 $t \mapsto h_t$ は I 上一様連続である. I の点の列 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ が存在して, 任意の $j = 1, \ldots, m-1$ と任意の $t \in [t_j, t_{j+1}]$ に対し $\|h_t - h_{t_j}\|_1 < \varepsilon$. 各 h_{t_j} を三角多項式 P_j で L^1 近似する: $\|h_{t_j} - P_j\|_1 < \varepsilon$. 三角多項式 $P_1, \ldots, P_{m-1}$ の次数の最大値を N とかく. $|n| > N$ のとき, 任意の $j = 1, \ldots, m-1$ と任意の $t \in [t_j, t_{j+1}]$ に対し $|\widehat{h_t}(n)| = |\widehat{h_t}(n) - \widehat{P_j}(n)| \le \|h_t - P_j\|_1 < 2\varepsilon$. □

証明を見ればわかるように, I は $\mathbb{R}$ の有界閉区間である必要はなくコンパクト空間であれば十分である. 後で使うときには上の形でしか使わない.

補題 2.13. $[-\pi, \pi]$ 上の関数 I_N を $I_N(t) = \int_0^t D_N(s)\,ds$ で定めると, $C > 0$ が存在して, 任意の非負整数 N と $t \in [-\pi, \pi]$ に対し $|I_N(t)| \le C$.

証明. D_N は偶関数なので $t \in [0, \pi]$ のときだけ考えればよい. $t \in [0, \pi]$ とする. 次のように積分を分解する:

$$\begin{aligned} I_N(t) &= \int_0^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}}\,ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{\frac{s}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{s}{2}} \right) \sin(N + \tfrac{1}{2})s\,ds + 2\int_0^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2})s}{s}\,ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

第 1 項の被積分関数は $(0, \pi]$ 上有界なので, $C_1 > 0$ が存在して, 任意の非負整数 N と $t \in [0, \pi]$ に対し, 第 1 項の絶対値は C_1 以下である. 変数変換により, 第 2 項は $2\int_0^{(N+\frac{1}{2})t} \frac{\sin x}{x}\,dx$ に等しい. この項の有界性を示すために, よく知られた次の等式を示す: λ は実数を動くとして

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{2.4}$$

これを示せば十分である. 実際, $[0, \infty)$ 上の関数 F を $F(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\sin x}{x}\,dx$ で定めると, F は連続であり, これと (2.4) により F は有界になるので, $C_2 > 0$ が存在して, 任意の $\lambda \in [0, \infty)$ に対し $|F(\lambda)| \le C_2$. (2.3) の右辺第 2 項は $2F((N + \frac{1}{2})t)$ なので, 結局, 任意の非負整数 N と $t \in [0, \pi]$ に対し $|I_N(t)| \le C_1 + 2C_2$.

等式 (2.4) を示す. 等式 (2.3) の t に π を代入する. (2.3) の左辺は計算できて,

$$I_N(\pi) = \int_0^\pi D_N(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi D_N(s)\,ds = \pi.$$

一方, リーマン・ルベーグの補題 1.13 より, (2.3) の右辺第 1 項は $N \to \infty$ で 0 に収束する. ゆえに $N \to \infty$ で $\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \to \pi/2$. また, 実数 λ が $(N + \frac{1}{2})\pi$ と $(N + 1 + \frac{1}{2})\pi$ の間に属するならば, $\left|\int_{(N+\frac{1}{2})\pi}^\lambda \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le 1/(N + \frac{1}{2}) \to 0$. これで (2.4) を得る. □

補題 2.14 (部分積分)**.** $[-\pi, \pi]$ 上の関数 f, g は $\varphi, \psi \in L^1([-\pi, \pi])$ を用いて

$$f(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds + f(0), \quad g(t) = \int_0^t \psi(s)\,ds + g(0)$$

とかけるとする. このとき, 任意の区間 $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ に対し

$$\int_a^b f(t)\psi(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b \varphi(t)g(t)\,dt.$$

証明. φ, ψ が連続なときはリーマン積分でこの等式が成り立つ. そうでないときは φ, ψ を連続関数で L^1 近似すればよい. □

定理 2.10 の証明. $f \in C(\mathbb{T})$ は $\int_0^{2\pi} \varphi(s)\,ds = 0$ を満たす $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ により $f(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds + f(0)$ とかけるとする. $\varepsilon > 0$ をとる. 次の積分区間の分解を考える:

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t))D_N(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta\le|s|\le\pi} (f(t-s) - f(t))D_N(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

$\delta \in (0,\pi)$ は後で決める. 和 $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ の定義関数を χ_δ とかくと

$$\text{(2.5) の第 2 項} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(f(t-s) - f(t))\frac{1}{\sin\frac{s}{2}}\chi_\delta(s)}_{=:\,h_t(s)} \sin(N+\tfrac{1}{2})s\,ds.$$

写像 $\mathbb{T} \ni t \mapsto h_t \in L^1(\mathbb{T})$ は連続であり, よって補題 2.12 より $N \to \infty$ で (2.5) の第 2 項は $t \in \mathbb{T}$ に関して一様に 0 に収束する. 一方, 第 1 項について見ると, 関数 $s \mapsto f(t-s) - f(t)$ と $D_N(s)$ に補題 2.14 を適用すると

$$\begin{aligned} &\text{(2.5) の第 1 項} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} (f(t-s) - f(t))D_N(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\left((f(t-\delta) - f(t))I_N(\delta) - (f(t+\delta) - f(t))I_N(-\delta) + \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t-s)I_N(s)\,ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left((f(t+\delta) + f(t-\delta) - 2f(t))I_N(\delta) + \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t-s)I_N(s)\,ds \right). \end{aligned}$$

右辺の大括弧内の第 1 項が小さくなるように δ を決める. φ を $C(\mathbb{T})$ の元で L^1 近似する: $\varphi_0 \in C(\mathbb{T})$ が存在して $\|\varphi - \varphi_0\|_1 < \varepsilon$. f は $\mathbb{T}$ 上一様連続なので, $\delta \in (0,\pi)$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{T}$ と任意の $s \in [-\delta,\delta]$ に対し $|f(t-s) - f(t)| < \varepsilon$. δ をさらに小さくとって, $\delta\|\varphi_0\|_\infty < \varepsilon$ も満たすようにしておく. すると, 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し $|f(t+\delta) + f(t-\delta) - 2f(t)| < 2\varepsilon$ であって, C を補題 2.13 の定数とすると, 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t-s)I_N(s)\,ds\right| &\le C\int_{-\delta}^{\delta} |\varphi(t-s)|\,ds < C\int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_0(t-s)|\,ds + 2\pi C\varepsilon \\ &\le 2C\delta\|\varphi_0\|_\infty + 2\pi C\varepsilon < 10C\varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに, (2.5) の第 1 項の絶対値は $\frac{1}{2\pi}(2C\varepsilon + 10C\varepsilon)$ より小さい. とった δ は点 $t \in \mathbb{T}$ にも N にもよらない. □

2.4　リーマンの局所性原理

次の定理もまたリーマン・ルベーグの補題 1.13 の応用である:

定理 2.15 (リーマンの局所性原理)**.** f, g を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数, $J \subset \mathbb{T}$ を開区間とし, J 上で $f = g$ とする. $I \subset J$ を閉区間とすると, $S_N(f) - S_N(g)$ は $N \to \infty$ で 0 に I 上一様収束する.

よって $S_N(f)$ が I 上一様収束するかどうかは, f の I のまわりでの様子にしかよらない. 特に J の点 t に対し $S_N(f)(t)$ が収束するか否かは, f の t のまわりでの様子にしかよらない. これらの事実は一見すると不思議に思える. なぜなら, $S_N(f)$ は f のフーリエ係数を使って定義され, そして f のフーリエ係数は I や t のまわりだけでなく $\mathbb{T}$ 全体での f の値を使って定義されるからである.

定理 2.15 の証明. $I = [a, b] \subset J$ とかき, $[a - \delta, b + \delta] \subset J$ となる $\delta > 0$ をとる. $t \in I$ とする. 積分区間の分解

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) - S_N(g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t-s) - g(t-s))D_N(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \le |s| \le \pi}(f(t-s) - g(t-s))D_N(s)\,ds \end{aligned}$$

において, J 上 $f = g$ なので右辺第 1 項は 0 である. 和 $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ の定義関数を χ_δ とかくと, 右辺第 2 項は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{(f(t-s) - g(t-s))\frac{1}{\sin\frac{s}{2}}\chi_\delta(s)}_{=:h_t(s)}\sin(N + \tfrac{1}{2})s\,ds$$

に等しい. 写像 $I \ni t \mapsto h_t \in L^1(\mathbb{T})$ は連続なので, 補題 2.12 より, この値は $N \to \infty$ で $t \in I$ に関して一様に 0 に収束する. □

一般に, ある性質を持つ関数に対してフーリエ部分和の各点・一様収束を示すことができれば局所性原理により, ある部分区間上でその性質をもつ関数に対しても, その区間上で同じ収束の結論を示すことができる. 例えば,

命題 2.16. f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数, $J \subset \mathbb{T}$ を開区間とし, f は J 上 C^1 級とする. $I \subset J$ を閉区間とすると $S_N(f)$ は f に I 上一様収束する.

証明. $g \in C^1(\mathbb{T})$ で I を含む開区間上で $g = f$ となるものをとる. 定理 2.10 より $S_N(g)$ は g に $\mathbb{T}$ 上一様収束する. 定理 2.15 より結論を得る. □

よって, f が区分的に C^1 級であって $f' \in L^1(\mathbb{T})$ ならば, f が C^1 級になる開区間内の任意の閉区間上で $S_N(f)$ は f に一様収束する. これを例 2.7 の関数 $f(t) = t$ $(0 < t < 2\pi)$ に適用すると, 任意の閉区間 $I \subset (0, 2\pi)$ に対し $S_N(f)$ は f に I 上一様収束する. 等式

$$S_N(f)(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nt}{n}$$

を系 2.9 の直後で得ていた. これより, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin nt)/n$ は $(\pi - t)/2$ に I 上一様収束する. 一方, $S_N(f)(0) = \pi$, $f(0+0) = 0$ なので $t = 0$ の右側付近では一様収束しないし, 同様に $t = 2\pi$ の左側付近でも一様収束しない.

演習問題

[1] $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ を可積分関数とし, $t_0 \in \mathbb{T}$ とする. もし $\lim_{h\to 0}(f(t_0+h)+f(t_0-h)) = +\infty$ ならば, $\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(t_0) = +\infty$ であることを示せ.

[2] 次で定義される $\mathbb{T}$ 上の関数 f のフーリエ係数を求めよ. さらに, $S_N(f)$ が f に $\mathbb{T}$ 上一様収束することを示せ.

(i) $f(t) = |\sin t|$.

(ii) $t \in [0, \pi/2]$ のとき $f(t) = t$ とし, $t \in [\pi/2, \pi]$ のとき $f(t) = \pi - t$ とし, $t \in [-\pi, 0]$ のとき $f(t) = -f(-t)$ とする.

[3] 次で定義される $\mathbb{T}$ 上の関数 f のフーリエ係数を求めよ. さらに, すべての $t \in \mathbb{T}$ に対し, $S_N(f)(t)$ の $N \to \infty$ における極限を求めよ.

(i) $t \in [0, \pi]$ のとき $f(t) = 1$ とし, $t \in (-\pi, 0)$ のとき $f(t) = 0$ とする.

(ii) $f(t) = e^t$ $(0 < t < 2\pi)$.

[4] $[0,1]$ 上の連続関数 f, g, h を次で定める:

$$f(x) = x\sin(1/x), \quad g(x) = x^2\sin(1/x), \quad h(x) = x^3\sin(1/x).$$

ただし, どの関数も $x = 0$ での値は 0 とする. これらの関数は $x = 0$ で右微分可能か? また, 極限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$ は存在するか? g, h についても同様の極限は存在するか?

[5] 次で定義される $\mathbb{T}$ 上の関数 f に対し, そのフーリエ部分和は $\mathbb{T}$ の各点で収束することを示せ. また, その収束は $\mathbb{T}$ 上一様か?

(i) $f(t) = |t|^{1/2}$ $(-\pi \le t \le \pi)$.

(ii) $f(t) = (\sin t)^{1/3}$.

[6] $f \in L^1(\mathbb{T})$ で, 任意の 0 でない整数 n に対し $\widehat{f}(n) = 1/n^3$ となるものを一つ求めよ.

[7] $k \in \mathbb{N}$ とする. $f \in L^1(\mathbb{T})$ で, 任意の 0 でない整数 n に対し $\widehat{f}(n) = 1/n^k$ となるものは, 一変数 k 次多項式を $[0, 2\pi)$ 上に制限したものとして得られることを示せ.

[8] $f \in L^1(\mathbb{T})$ で, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{f}(n) = 2^{-|n|}/(|n|+1)$ となるものを求めよ.

[9] $C(\mathbb{T})$ の元の列 $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ は次を満たすとする: 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f_m}(n)| < \infty$ であって, $m \to \infty$ で $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f_m}(n)| \to 0$. このとき, f_m は 0 に $\mathbb{T}$ 上一様収束することを示せ.

[10] $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f は $t = 0$ で連続とする. すべての $\widehat{f}(n)$ が非負ならば, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = f(0)$ であることを示せ ($\sigma_N(f)(0)$ に注目せよ).

[11] f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とする. ほとんどすべての $t \in \mathbb{T}$ に対し, $S_N(f)(t)$ が $N \to \infty$ で収束するならば, ほとんどすべての $t \in \mathbb{T}$ に対し, $S_N(f)(t)$ は $N \to \infty$ で $f(t)$ に収束することを示せ.

[12] f を $\mathbb{T}$ 上の連続関数で区分的に一次関数になるもの, つまり, $\mathbb{T}$ をある有限個の閉区間に分割すれば, 各区間上で t について一次関数になるような連続関数とする. $S_N(f)$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束することを示せ.

[13] 任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対し, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n(f)(t)/n^2$ は $\mathbb{T}$ 上一様収束することを示せ.

[14] $f \in C(\mathbb{T})$ とする. 次で定める三角多項式 R_N は $N \to \infty$ で $\mathbb{T}$ 上一様収束することを示せ:

$$R_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\widehat{f}(n)e^{int} + \widehat{f}(-n)e^{-int}}{n}$$

また, R_N はどんな関数に収束するか?

[15] (i) 次のリーマン広義積分が収束することを示せ:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x} \sin x \, dx.$$

(ii) $\mathbb{T}$ 上の関数 $f(t) = \log|t|$ $(-\pi \le t \le \pi)$ に対し, $N \to \infty$ で $S_N(f)(0)/\log N \to -1$ であることを示せ (特に $S_N(f)(0) \to -\infty$ である).

ノート

例 2.6 は [Zor, p.530, Example 6] で見つけたもの. 定理 2.10 は [Tol, Ch. 3, §11] に基づく.

第3講　L^2 関数のフーリエ変換

線型代数における正規直交基底を思い出す. V を内積を備えた $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, その正規直交基底 $e_1, \ldots, e_N$ をとる. V の各元 v は $v = \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n \rangle e_n$ と表され, V の元と $\mathbb{C}^N$ の元が $v \leftrightarrow (\langle v, e_n \rangle)_{n=1}^{N}$ により一対一に対応する. ここで, 山括弧は内積を表す. 実は無限次元の場合でも, ヒルベルト空間という内積を備えた完備なノルム空間を導入すれば同様の一対一対応を実現することができる. ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{T})$ とその正規直交系 $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ に対し, この一対一対応はフーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ の同型と解釈され, フーリエ係数やフーリエ部分和に対する新たな視点がもたらされる. ヒルベルト空間という抽象的な枠組みを導入する動機はここにある. その結果, 任意の $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対し $S_N(f)$ が f に L^2 収束することとその理由が明確になる.

3.1　ヒルベルト空間とその完全正規直交系

$\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. $\mathcal{H}$ の**内積**とは, 関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ で次の三条件を満たすものを意味する:

- (正定値性) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対し $\langle x, x \rangle \geq 0$ であって, もし $\langle x, x \rangle = 0$ ならば $x = 0$.
- (共役対称性) 任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対し, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
- (線型性) 任意の $x, y, z \in \mathcal{H}$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し, $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で内積をもつものを**内積空間**という. 基本性質を示そう. 右側の変数に関しては, 次に示す共役線型性が成り立つ: 任意の $x, y, z \in \mathcal{H}$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\langle \alpha x + \beta y, z \rangle} = \overline{\alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle} = \overline{\alpha} \langle z, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, y \rangle.$$

命題 3.1 (コーシー・シュワルツ不等式). 任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対し, 不等式 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ が成り立つ. ここで $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ とおく.

証明. 内積の線型性により, 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対し $\langle 0, x \rangle = 0$ (よって $\langle x, 0 \rangle = 0$) であることに注意する. よって $y \neq 0$ のときに目標の不等式を示せばよい. $\alpha = -\langle x, y \rangle / \|y\|^2$ とおくと,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + \alpha y\|^2 = \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 / \|y\|^2. \end{aligned}$$ □

命題 3.2. $\| \cdot \|$ は $\mathcal{H}$ のノルムである.

証明. ノルムの公理のうち, "任意の $x \in \mathcal{H}$ に対し $\|x\| \geq 0$ であって, $\|x\| = 0$ ならば $x = 0$" と "$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$" はすぐわかる. 三角不等式を示す:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

二つ目の不等式でコーシー・シュワルツ不等式を用いた. □

$\mathcal{H}$ の元の列 (x_n) と $\mathcal{H}$ の元 x に対し, $n \to \infty$ で $\|x_n - x\| \to 0$ となるとき, x_n は x に収束するといい, $x_n \to x$ とかく.

命題 3.3. (1) $x_n \to x$ ならば $\|x_n\| \to \|x\|$.

(2) (内積の連続性) $x_n \to x$ かつ $y_n \to y$ ならば $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

証明. (1) 不等式 $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$ より従う.

(2) 不等式 $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|$ が成り立ち, (1) より $\|y_n\|$ は有界なので, 右辺は 0 に収束する. □

内積空間で, その内積からくるノルムに関して完備なものを**ヒルベルト空間**という.

例 3.4. (X, μ) を測度空間とする. $L^2(X, \mu)$ は, $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu$ を内積とするヒルベルト空間である. これの特別な場合として, 二つ指摘しておく.

一つ目は $L^2(\mathbb{T})$. $\mathbb{T}$ 上の測度はルベーグ測度を正規化したものとする. つまり, $L^2(\mathbb{T})$ の内積を次で定める: $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\, dt$.

二つ目は $\ell^2(\mathbb{Z})$. $\mathbb{Z}$ を全ての部分集合が可測であるような可測空間と見なす. そして, $\mathbb{Z}$ の各点の測度が 1 となるような測度 (数え上げ測度という) を備えた測度空間を考える. この測度空間に対する L^2 が $\ell^2(\mathbb{Z})$ である. $\ell^2(\mathbb{Z})$ の各元は $\mathbb{Z}$ を添字集合とする複素数の列と見なせる.

以下, 本節では $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする. 後で $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$ の場合を主に考えるので, $\mathcal{H}$ の元を $f, g, \ldots$ 等を使って表す. $\mathcal{H}$ の二つの元 f, g が**直交**するとは, $\langle f, g\rangle = 0$ となることを意味する. $\mathcal{H}$ の部分集合 E が $\mathcal{H}$ の**正規直交系**であるとは, E の各元のノルムは 1 であって, さらに E の相異なる任意の二元が直交するときをいう. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ を $\mathcal{H}$ の正規直交系としたとき, 複素数 $a_1, \ldots, a_N$ に対し, ノルムの等式

$$\|a_1\varphi_1 + \cdots + a_N\varphi_N\|^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_N|^2$$

が成り立つことに注意する. $\mathcal{H}$ の正規直交系 E が**完全**であるとは, E のすべての元と直交する $\mathcal{H}$ の元が 0 のみであるときをいう.

命題 3.5. $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の完全正規直交系とする. 次が成り立つ:

(1) 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対し $f = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \varphi_n\rangle\varphi_n$. つまり, 各 $N \in \mathbb{N}$ に対し $S_N = \sum_{n=1}^{N}\langle f, \varphi_n\rangle\varphi_n$ とおくと, S_N は f に収束する. そして $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle f, \varphi_n\rangle|^2$.

(2) (パーセバルの等式) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ に対し, $\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \varphi_n\rangle\overline{\langle g, \varphi_n\rangle}$.

証明. (1) 任意の N に対し, 等式 $\|f-S_N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f,\varphi_n\rangle|^2$ が成り立つ. 実際, 左辺を内積でかいて展開すればよい. 左辺は非負なので $\sum_{n=1}^N |\langle f,\varphi_n\rangle|^2 \le \|f\|^2$. よって $\sum_{n=1}^\infty |\langle f,\varphi_n\rangle|^2 \le \|f\|^2 < \infty$.

$N > M$ のとき, $\|S_N - S_M\|^2 = \|\sum_{n=M+1}^N \langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |\langle f,\varphi_n\rangle|^2$ であり, 右辺は $N, M \to \infty$ で 0 に収束するので, (S_N) は $\mathcal{H}$ のコーシー列である. $\mathcal{H}$ は完備なので, これは収束する. 極限を $g \in \mathcal{H}$ とかく. つまり $g = \sum_{n=1}^\infty \langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$ とおく.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\langle f-g,\varphi_n\rangle = \langle f,\varphi_n\rangle - \sum_{k=1}^\infty \langle f,\varphi_k\rangle\langle\varphi_k,\varphi_n\rangle = \langle f,\varphi_n\rangle - \langle f,\varphi_n\rangle = 0$. 最初の等式で内積の連続性 (命題 3.3 (2)) を用いた. (φ_n) は完全なので $f-g=0$. これで (1) の前半が示せた. 最初に得た等式 $\|f-S_N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f,\varphi_n\rangle|^2$ で $N\to\infty$ とすれば, (1) の後半の等式を得る.

(2) $f = \sum_{n=1}^\infty \langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$ とかけることと内積の連続性による. □

3.2 $L^2(\mathbb{T})$ の場合

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\varphi_n \in L^2(\mathbb{T})$ を $\varphi_n(t) = e^{int}$ で定めると, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の正規直交系である. $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対し $\widehat{f}(n) = \langle f,\varphi_n\rangle$ であることに注意する.

定理 3.6. 次が成り立つ:

(1) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の完全正規直交系である.

(2) 任意の $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対し, $S_N(f)$ は f に L^2 収束する.

(3) フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ が $\mathcal{F}f = (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ で定まり, $\mathcal{F}$ は内積を保つ同型である. 特に $\mathcal{F}$ はノルムも保つ.

ここで $\mathcal{F}$ が内積を保つとは, 任意の $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ に対し等式 $\langle\mathcal{F}f,\mathcal{F}g\rangle = \langle f,g\rangle$ が成り立つことを意味し, $\mathcal{F}$ がノルムを保つとは, 任意の $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対し等式 $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ が成り立つことを意味する.

証明. (1) フーリエ係数の一意性より従う.

(2) 等式 $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n)\varphi_n = \sum_{n=-N}^N \langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$ において, 今示した (1) と命題 3.5 (1) より, 右辺は $N\to\infty$ で f に L^2 収束する.

(3) 任意の $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対し数列 $(\widehat{f}(n))$ が $\ell^2(\mathbb{Z})$ に属することは, 命題 3.5 (1) の等式 $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f,\varphi_n\rangle|^2$ から従う. $\mathcal{F}$ が内積を保つことはパーセバルの等式の言い換えである. $\mathcal{F}$ の単射性はフーリエ係数の一意性から従う. $\mathcal{F}$ の全射性は $\ell^2(\mathbb{Z})$ の元 (a_n) に対し $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi_n$ が $L^2(\mathbb{T})$ の元を定めることから従う. □

次の例で $\mathcal{F}$ がノルムを保つことを応用してみる.

例 3.7. $f(t) = t$ $(0 < t < 2\pi)$ とする. 例 2.7 で計算したように, 0 でない整数 n に対し $\widehat{f}(n) = i/n$ であり $\widehat{f}(0) = \pi$. また, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = 4\pi^2/3$. よって $4\pi^2/3 = \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^\infty |\widehat{f}(n)|^2 = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$. ゆえに $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$. これは例 2.7 で得た等式だが, 導き方が違う.

例 3.8. $f(t)=|t|$ $(-\pi \le t \le \pi)$ とする．直接計算により, 0 でない整数 n に対し, n が偶数のとき $\widehat{f}(n)=0$, n が奇数のとき $\widehat{f}(n)=-2/(n^2\pi)$ となる．$\widehat{f}(0)=\pi/2$ であり, $\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^2\,dt=\pi^2/3$. よって

$$\frac{\pi^2}{3}=\|f\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2=\frac{\pi^2}{4}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^4\pi^2}.$$

これより $\sum_{n=0}^{\infty}1/(2n+1)^4=\pi^4/96$. さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{\pi^4}{96}$$

なので $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^4=\pi^4/90$.

最後に, $\varphi\in L^2(\mathbb{T})$ に対する等式 $\|\varphi\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(n)|^2$ を用いて次を示す:

命題 3.9. $\mathbb{T}$ 上の関数 f は, $\varphi\in L^2(\mathbb{T})$ で $\int_0^{2\pi}\varphi(s)\,ds=0$ となるものを用いて

$$f(t)=\int_0^t\varphi(s)\,ds+f(0),\quad t\in\mathbb{T}$$

とかけるとする．このとき, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|<\infty$. よって命題 2.4 (2) より, $S_N(f)$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する.

これは定理 2.10 とよく似ているが, それとの違いは, ここでは $\varphi\in L^2(\mathbb{T})$ と仮定している一方, 定理 2.10 では $\varphi\in L^1(\mathbb{T})$ と仮定しているという点である．少し強い仮定を課している分, この命題の方は等式 $\|\varphi\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(n)|^2$ を使ってかなり容易に示すことができる．$f\in C^1(\mathbb{T})$ ならばこの命題の仮定が満たされることも指摘しておく.

命題 3.9 の証明. 補題 2.14 で示した部分積分の公式により, 任意の 0 でない整数 n に対し $\widehat{f}(n)=(in)^{-1}\widehat{\varphi}(n)$. 自然数 $N>M$ に対し

$$\sum_{M+1\le|n|\le N}|\widehat{f}(n)|\le\underbrace{\left(\sum_{M+1\le|n|\le N}|\widehat{\varphi}(n)|^2\right)^{1/2}}_{\le\|\varphi\|_2}\left(\sum_{M+1\le|n|\le N}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}.$$

最初の不等式はコーシー・シュワルツ不等式による．右辺は $N,M\to\infty$ で 0 に収束する. □

演習問題

[1] $f\in L^1(\mathbb{T})$ とする．$\widehat{f}(n)=O(1/|n|^{1/10})$ (つまり $|n|^{1/10}\widehat{f}(n)$ は有界) ならば, 十分大きいすべての $m\in\mathbb{N}$ に対し, f を m 個たたみ込んだ関数 $f*\cdots*f$ は $L^2(\mathbb{T})$ に属することを示せ.

[2] $f,g\in L^2(\mathbb{T})$ とする．すべての $x\in\mathbb{R}$ に対し $(f*g)(x)$ が定まり, $S_N(f*g)$ は $f*g$ に $\mathbb{T}$ 上一様収束することを示せ.

[3] 例 3.7, 3.8 に倣って, 和 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^6$ を求めよ.

[4] $f \in L^2(\mathbb{T})$ で $f * f \notin C^1(\mathbb{T})$ となる例を与えよ.

[5] $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 $f(t) = \log(1 - e^{it})$ のフーリエ係数を求めたい. ただし, $\log z$ の虚部は $-\pi$ と π の間の値をとるものとする. log の級数展開から, $n > 0$ のとき $\widehat{f}(n) = 1/n$ で $n \le 0$ のとき $\widehat{f}(n) = 0$ と期待される. 次の三つの方法を検証せよ:

(1) 留数計算で求める.

(2) まず, $g \in L^1(\mathbb{T})$ で $n > 0$ のとき $\widehat{g}(n) = 1/n$ で $n \le 0$ のとき $\widehat{g}(n) = 0$ となるものが存在することを示す. 次に, 任意の $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ に対し, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{int}/n$ が収束することをアーベル変換を用いて示す (命題 4.11 を見よ). 最後に, アーベル・ポアソン和 $A_r(g)$ は $r \to 1$ で g に L^1 収束する一方, 任意の $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ で f に収束することを示す.

(3) $r \in (0,1)$ に対し $f_r(t) = \log(1 - re^{it})$ と定め, $r \to 1$ で f_r が f に L^1 収束することを示す. f_r を級数展開することにより f_r のフーリエ係数がわかるので, その $r \to 1$ での極限をとることで f のフーリエ係数がわかる.

[6] (i) $f \in L^1(\mathbb{T})$ で, $n > 0$ のとき $\widehat{f}(n) = 1/n^{2/3}$ で $n \le 0$ のとき $\widehat{f}(n) = 0$ となるものが存在することを示せ.

(ii) $S_N(f)$ は f に L^1 収束することを示せ.

(iii) f は $L^\infty(\mathbb{T})$ に属さないことを示せ ($S_N(f)(0)$ と $\sigma_N(f)(0)$ に注目せよ).

(iv) $n > 0$ のとき $\widehat{g}(n) = (-1)^{n-1}/n^{2/3}$ で $n \le 0$ のとき $\widehat{g}(n) = 0$ となる $g \in L^1(\mathbb{T})$ についてはどうか?

ちなみに命題 4.11 を使えば, f は $t = 0$ の近傍の外では連続であることがわかる.

[7] $\varphi_n(t) = e^{int}$ とおく. $\{\, \varphi_n \mid |n| \le N \,\}$ で生成される $L^2(\mathbb{T})$ の部分空間を $\mathcal{H}_N$ とかく. 任意の $f \in L^2(\mathbb{T})$ に対し, 等式 $\|f - S_N(f)\|_2 = \inf_{g \in \mathcal{H}_N} \|f - g\|_2$ を示せ.

[8] (i) (中線定理) $\mathcal{H}$ を内積空間とする. 任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対し, 次を示せ:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(ii) $L^1(\mathbb{T})$ は, 任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し $\langle f, f \rangle = \|f\|_1^2$ となる内積をもたないことを示せ.

[9] $C(\mathbb{T})$ は, 任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対し $\langle f, f \rangle = \|f\|_\infty^2$ となる内積をもたないことを示せ.

ノート

命題 3.9 は [Kat, I.5, Exercise 4] に基づく. L^2 だけでなく, 実は任意の $p \in (1, \infty)$ に対し, 次が成り立つ: 任意の $f \in L^p(\mathbb{T})$ に対し, $S_N(f)$ は f に L^p 収束する ([猪 1, 第 8 章], [Kat, II.1.5]).

第4講　三角級数

4.1　問題の設定

$f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, フーリエ係数からなる数列 $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ を $\widehat{f}$ で表し, フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ を $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ で定義した. 関数 f と数列 $\widehat{f}$ の相関について考える. これまで示したことをまとめる:

(1) (フーリエ係数の一意性, 系 1.12) $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ は単射である.

(2) (リーマン・ルベーグの補題 1.13) $\mathcal{F}$ の像は次の $c_0(\mathbb{Z})$ に含まれる:

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{\, (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \mid |n| \to \infty \text{ で } a_n \to 0. \}.$$

(3) (定理 3.6) $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ は内積を保つ線型同型である.

次の命題もまた関数 f と数列 $\widehat{f}$ との関連を示すものである:

命題 4.1. f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とする. $C^\infty(\mathbb{T})$ の元で $\mathbb{T}$ のほとんどすべての点で f と一致するものが存在するためには, 数列 $\widehat{f} = (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ が急減少であることが必要十分である. ここで, 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が**急減少**であるとは, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $a_n = o(|n|^{-k})$ $(|n| \to \infty)$ となることを意味する.

証明. $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ とする. 部分積分により, 任意の 0 でない整数 n に対し $\widehat{f}(n) = (in)^{-1}(f')^\wedge(n)$. 繰り返すことで, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\widehat{f}(n) = (in)^{-k}(f^{(k)})^\wedge(n)$. よって $\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$.

逆に $\widehat{f}$ は急減少とする. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$ なので, フーリエ部分和 $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int}$ は $\mathbb{T}$ 上一様収束する. 極限の関数を g とかく. 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}$ であり, 数列 $\widehat{f}$ は急減少なので, この級数は何回でも項別微分できる. よって g は $\mathbb{T}$ 上 C^∞ 級である. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ なので, フーリエ係数の一意性 1.12 より $\mathbb{T}$ のほとんどすべての点で $g = f$ である. □

注意 4.2. $k \in \mathbb{N}$ とする. 命題 4.1 の証明から次が従う: $f \in C^k(\mathbb{T})$ ならば $\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$. 逆に, $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f が $\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k-1})$ を満たすならば, $g \in C^{k-1}(\mathbb{T})$ が存在して f と g はほとんどすべての点で一致する. つまり一般に, f が滑らかであればあるほど, 数列 $\widehat{f}$ の無限遠における減衰のスピードが速くなり, そして逆も成り立つ.

写像 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ は全射だろうか? もしこれが正しければ関数と数列の間のわかりやすい一対一対応が得られるのだが, 次に示す通り実は正しくない.

命題 4.3. 任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, 和 $\sum_{1\le|n|\le N} \widehat{f}(n)/n$ は $N \to \infty$ で収束する.

証明. f の代わりに $f - \widehat{f}(0)$ を考えることで $\widehat{f}(0) = 0$ としてよい. すると $\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt = 0$ となり, $\mathbb{T}$ 上の関数 F を $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ で定めると, これは $\mathbb{T}$ 上連続である. 定理 2.10 より, フーリエ部分和 $S_N(F)$ は F に $\mathbb{T}$ 上一様収束する. 特に $S_N(F)(0) \to F(0) = 0$. 任意の 0 でない整数 n に対し, 部分積分により $\widehat{F}(n) = (in)^{-1}\widehat{f}(n)$. 等式 $S_N(F)(0) = \widehat{F}(0) - i\sum_{1\le|n|\le N} \widehat{f}(n)/n$ より, 命題の結論を得る. □

注意 4.4. 命題 4.3 の証明では定理 2.10 を使ったが, 和 $\sum_{1\le|n|\le N} \widehat{f}(n)/n$ が N について有界であることは, より初等的な補題 2.13 を使って示せる (そして, 次の例 4.5 で応用するにはこれで十分である). 実際, $\mathbb{T}$ 上の関数 I_N を $I_N(t) = \int_0^t D_N(s)\,ds$ で定めると, 補題 2.13 より, これは N と t について有界である. そして, $I_N(t) = t + 2\sum_{n=1}^N (\sin nt)/n$ であって,

$$\sum_{1\le|n|\le N} \frac{\widehat{f}(n)}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)}{n} = -\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sum_{n=1}^N \frac{\sin nt}{n}\,dt.$$

右辺の和の部分の関数は N と t について有界なので結論を得る.

例 4.5. 数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を次で定める: $n = 0, 1$ のとき $b_n = 0$ とし, $n \ge 2$ のとき $b_n = 1/\log n$ とし, そして $n < 0$ のとき $b_n = 0$ とする. この数列は $c_0(\mathbb{Z})$ に属する. 次に注意する:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{b_n}{n} = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n} \ge \int_2^\infty \frac{dx}{x\log x} = \Big[\log(\log x)\Big]_2^\infty = \infty.$$

命題 4.3 より, (b_n) はフーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ の像に入らない.

　では $\mathcal{F}$ の像について, リーマン・ルベーグの補題 1.13 の他にもっと制約を付けることは可能だろうか? 例えば $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, 数列 $\widehat{f}$ の無限遠における減衰のスピードについて何か言えるだろうか? 実は何も言えない. 実際, 無限遠で 0 に収束するような任意の数列に対し, それより遅く 0 に収束するようなフーリエ係数の列をもつ可積分関数が存在する (系 4.18).

　本講では $\mathcal{F}$ の像に関連して次の問題を考える: 複素数の列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ は $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ を満たすとする. どんな数列に対し, 三角級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nt, \qquad \sum_{n=1}^\infty b_n \sin nt$$

は $L^1(\mathbb{T})$ の元のフーリエ級数展開になるだろうか? つまり, $f \in L^1(\mathbb{T})$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $S_N(f)(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt$ (または $\sum_{n=1}^N b_n \sin nt$) となるのはいつだろうか? さらに, もしそのような f が存在するならば $S_N(f)$ は f に L^1 収束するだろうか?

注意 4.6. $f\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ を可積分関数とする. f が偶関数ならば, $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ なので,

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n)e^{int} = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^N \widehat{f}(n)\cos nt.$$

f が奇関数ならば, $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$ なので,

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{int} = 2i \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}(n) \sin nt.$$

上の形のコサイン級数とサイン級数はこのようにして得られる.

例 4.7. コサイン級数 $f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ は $\mathbb{T}$ 上一様収束するとする. このとき, 関数 f は $\mathbb{T}$ 上連続であり, (積分と和が交換できて) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n) = a_n/2$. ゆえに, このコサイン級数は f のフーリエ級数展開になる. サイン級数についても同様である.

例 4.8. $f \in L^1(\mathbb{T})$ を $f(t) = (\pi - t)/2$ $(0 < t < 2\pi)$ で定める. 例 2.7 の計算結果から $S_N(f)(t) = \sum_{n=1}^{N} (\sin nt)/n$. よって, サイン級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nt)/n$ は f のフーリエ級数展開である. 一方, 系 2.9 の後で見たように, 任意の $t \in (0, 2\pi)$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nt)/n = (\pi - t)/2$. 例 4.7 のものとは違い, 極限の関数が $\mathbb{T}$ 上連続でないので, このサイン級数は $\mathbb{T}$ 上一様収束しない.

次節以降で三角級数を調べるための準備をする. まず, ディリクレ核 D_N と共役ディリクレ核 $\tilde{D}_N$ の表示を得る. 等式

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{N} (e^{int} + e^{-int}) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nt$$

より, $D_N(t)$ は $1 + 2\sum_{n=1}^{N} e^{int}$ の実部である. この虚部として得られる関数を**共役ディリクレ核**という:

$$\tilde{D}_N(t) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{N} (e^{int} - e^{-int}) = 2 \sum_{n=1}^{N} \sin nt.$$

第 1 講で示したように, $D_N(t) = \sin(N + \frac{1}{2})t / \sin\frac{t}{2}$ であった. これに対応して, 次の公式が等比級数の部分和の公式を用いて得られる:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_N(t) &= \frac{1}{i}\left(\frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} e^{it} - \frac{1 - e^{-iNt}}{1 - e^{-it}} e^{-it} \right) \\
&= \frac{1}{i}\left(\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{\frac{it}{2}}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} - \frac{e^{-\frac{it}{2}} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{i} \frac{2\cos(N+\frac{1}{2})t - 2\cos\frac{t}{2}}{2i \sin\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

補題 4.9. $C > 0$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $\|\tilde{D}_N\|_1 \le 2 \log N + C$.

証明. 等式 $\cos\frac{t}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})t = (1 - \cos Nt)\cos\frac{t}{2} + \sin Nt \sin\frac{t}{2} = 2\sin^2\frac{Nt}{2}\cos\frac{t}{2} + \sin Nt \sin\frac{t}{2}$ と不等式 $\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi}$ $(0 \le t \le \pi)$ に注意して,

$$\|\tilde{D}_N\|_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\cos\frac{t}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{t}{2}}\, dt \le \int_0^{\pi} \frac{2\sin^2\frac{Nt}{2}}{t}\, dt + C_1,$$

$$\text{右辺第 1 項} = 2\int_0^{\frac{N}{2}\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \le 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{N}{2}\pi} \frac{dx}{x} + C_2 = 2\log N + C_2. \qquad \square$$

補題 4.10. $C>0$ が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し $\|D_N\|_1\le(4/\pi^2)\log N+C$.

証明. 次の一つ目の不等式は, 関数 $\frac{2}{t}-(\sin\frac{t}{2})^{-1}$ が $(0,\pi]$ 上有界であることによる:

$$\begin{aligned}\|D_N\|_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{|\sin(N+\frac12)t|}{\sin\frac{t}{2}}\,dt\le\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{|\sin(N+\frac12)t|}{t}\,dt+C_1\\&\le\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N\int_{\frac{n\pi}{N+\frac12}}^{\frac{(n+1)\pi}{N+\frac12}}\frac{|\sin(N+\frac12)t|}{t}\,dt+C_2\\&\le\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N\frac{N+\frac12}{n\pi}\int_{\frac{n\pi}{N+\frac12}}^{\frac{(n+1)\pi}{N+\frac12}}|\sin(N+\tfrac12)t|\,dt+C_2=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^N\frac{1}{n}+C_2.\end{aligned}$$

□

4.2　アーベル変換と凸数列

アーベル変換とは数列に対する部分積分である. 数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ に対し, n が非負整数のとき $\sigma_n=b_0+b_1+\cdots+b_n$ とおき, $\sigma_{-1}=0$ とおく. 整数 $N>M\ge0$ に対し, 次が成り立つ:

$$\sum_{n=M}^N a_nb_n=\sum_{n=M}^{N-1}(a_n-a_{n+1})\sigma_n+a_N\sigma_N-a_M\sigma_{M-1}.$$

実際, 左辺は $\sum_{n=M}^N a_n(\sigma_n-\sigma_{n-1})$ に等しく, これは右辺に等しい. この左辺から右辺への変形を**アーベル変換**という. 本講の残りではこれを多用する. 数列 (a_n) が次を満たすとき, $a_n\searrow0$ とかく: 任意の n に対し $a_n\ge0$ かつ $a_n\ge a_{n+1}$ であって, $n\to\infty$ で a_n は 0 に収束する.

命題 4.11. $a_n\searrow0$, $b_n\searrow0$ とする. このとき, 任意の $t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}$ に対し, 二つの級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos nt,\qquad\sum_{n=1}^\infty b_n\sin nt$$

はともに収束する. さらに, 任意の $\varepsilon\in(0,\pi)$ に対し, この収束は $[-\pi,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\pi]$ 上一様である. よって, この二つの級数は $\mathbb{T}\setminus\{0\}$ 上の連続関数を定める.

証明. コサイン部分和 $s_N(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^N a_n\cos nt$ を考える. 前節で得た公式 $D_n(t)=1+2\cos t+2\cos2t+\cdots+2\cos nt$ を思い出す. アーベル変換により

$$2s_N(t)=a_0+\sum_{n=1}^N a_n\cdot2\cos nt=\sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})D_n(t)+a_ND_N(t)-a_0\cdot0.$$

$t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ をとる. $|D_N(t)|\le1/|\sin\frac{t}{2}|$ より, $N\to\infty$ で $a_ND_N(t)\to0$. そして $N>M$ のとき, a_n が単調減少なので, $N,M\to\infty$ で

$$\left|\sum_{n=M}^{N-1}(a_n-a_{n+1})D_n(t)\right|\le\sum_{n=M}^{N-1}\frac{a_n-a_{n+1}}{|\sin\frac{t}{2}|}=\frac{a_M-a_N}{|\sin\frac{t}{2}|}\to0.$$

よって $s_N(t)$ は $N\to\infty$ で収束する. $\varepsilon\in(0,\pi)$ をとったとき, 今示した 0 への収束は $|t|\ge\varepsilon$ となる t に関して一様である.

同様に, サイン部分和 $\tilde{s}_N(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt$ に対し

$$2\tilde{s}_N(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \cdot 2\sin nt = \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1})\tilde{D}_N(t) + b_N \tilde{D}_N(t) - b_1 \cdot 0.$$

不等式 $|\tilde{D}_N(t)| \leq 2/|\sin \frac{t}{2}|$ を用いれば, 収束性が同様にして示される. □

上の証明では, 和 $2s_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot 2\cos nt$ をアーベル変換したが, さらにもう一度アーベル変換してみる: $(n+1)K_n(t) = \sum_{k=0}^n D_k(t)$ (K_n はフェイエール核) なので,

$$\begin{aligned}
2s_N(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1})D_n(t) + a_N D_N(t) \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} \Delta^2 a_{n+1}(n+1)K_n(t) + (a_{N-1} - a_N)NK_{N-1}(t) - (a_0 - a_1) \cdot 0 + a_N D_N(t) \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} (n+1)\Delta^2 a_{n+1} K_n(t) + N(a_{N-1} - a_N)K_{N-1}(t) + a_N D_N(t).
\end{aligned}$$

ここで, $\Delta^2 a_{n+1}$ を次で定める:

$$\Delta^2 a_{n+1} = (a_n - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_{n+2}) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

$\Delta^2 a_{n+1} = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n)$ とも変形できるので, 値 $\Delta^2 a_{n+1}$ は関数 $n \mapsto a_n$ の点 $n+1$ における "二回微分" の値に相当する. そこで, 関数の凸性と同様に, 数列の凸性を次で定める: 実数の列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ が**凸**であるとは, 任意の非負整数 n に対し $\Delta^2 a_{n+1} \geq 0$ となるときをいう. 例えば, 正の実数 α に対する数列 $(n^{-\alpha})_{n=1}^\infty$ と数列 $(1/\log n)_{n=2}^\infty$ はともに凸である (関数 $x^{-\alpha}$, $1/\log x$ が $x > 0$ でともに凸なので).

補題 4.12. 実数の列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ は凸であって $a_n \to 0$ とする. 次が成り立つ:

(1) 任意の非負整数 n に対し $a_n \geq a_{n+1}$.

(2) $n \to \infty$ で $n(a_n - a_{n+1}) \to 0$.

(3) $\sum_{n=0}^\infty (n+1)\Delta^2 a_{n+1} = a_0$.

証明. (1) $a_n - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_{n+2} \geq a_{n+2} - a_{n+3} \geq \cdots \to 0$.

(2) n が偶数のときと奇数のときに分けて示す. まず,

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2n(a_{2n} - a_{2n+1}) \leq 2((a_{2n} - a_{2n+1}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) + \cdots + (a_n - a_{n+1})) \\
&= 2(a_n - a_{2n+1}) \to 0.
\end{aligned}$$

そして,

$$0 \leq (2n+1)(a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq (2n+1)(a_{2n} - a_{2n+1}) \to 0.$$

(3) $N \geq 2$ として, アーベル変換により,

$$\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) \cdot 1 = \sum_{n=0}^{N-2} \Delta^2 a_{n+1}(n+1) + (a_{N-1} - a_N)N - (a_0 - a_1) \cdot 0.$$

左辺は $a_0 - a_N$ に等しく, これは $N \to \infty$ で a_0 に収束する. (2) より $(a_{N-1} - a_N)N \to 0$. □

4.3　単調減少な係数をもつ三角級数

4.1 節で述べた問題について考察する.

定理 4.13. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ を凸数列とし, $a_n \to 0$ とする. このとき, 補題 4.12 (1) より $a_n \searrow 0$ であり, コサイン級数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

は任意の $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ で収束することに注意する. 次が成り立つ:

(1) f は $\mathbb{T}$ 上非負値かつ可積分であって, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $t \in \mathbb{T}$ に対し, 等式

$$S_N(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt.$$

(2) もし $a_N \log N \to 0$ ならば, $S_N(f)$ は f に L^1 収束する.

証明. (1) すでに得たコサイン部分和の表示に注目する:

$$2s_N(t) = \sum_{n=0}^{N-2} (n+1)\Delta^2 a_{n+1} K_n(t) + N(a_{N-1} - a_N) K_{N-1}(t) + a_N D_N(t)$$

補題 4.12 を考慮しつつ $N \to \infty$ とする. 右辺第 1 項は L^1 収束し ($\|K_n\|_1 = 1$ と $L^1(\mathbb{T})$ の完備性より), 各 $t \neq 0$ で収束する ($0 \le K_n(t) \le 1/((n+1)\sin^2 \frac{t}{2})$ より). 右辺第 2 項は 0 に L^1 収束し, 各 $t \neq 0$ で 0 に収束する (理由は第 1 項と同様). 右辺第 3 項は各 $t \neq 0$ で 0 に収束する ($a_n \to 0$ と $|D_n(t)| \le 1/|\sin \frac{t}{2}|$ より). ゆえに, 任意の $t \neq 0$ に対し, 等式

$$2f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_{n+1} K_n(t)$$

が成り立つ. 右辺は非負である. $\sum_n (n+1)\Delta^2 a_{n+1} < \infty$ と $\|K_n\|_1 = 1$ より, f は $\mathbb{T}$ 上可積分である. また, 非負整数 n に対し

$$\begin{aligned} 2\widehat{f}(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\Delta^2 a_{j+1} \widehat{K_j}(n) = \sum_{j=n}^{\infty} (j+1)\Delta^2 a_{j+1} \left(1 - \frac{n}{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} (j+1-n)\Delta^2 a_{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\Delta^2 a_{j+n+1} = a_n. \end{aligned}$$

最後の等式は補題 4.12 (3) より従う. f は偶関数なので $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n) = a_n/2$. ゆえに $S_N(f)(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt$.

(2) (1) より $S_N(f) = s_N$ である. $a_N \log N \to 0$ ならば, 上で考えた第 3 項 $a_N D_N(t)$ は補題 4.10 より 0 に L^1 収束する. ゆえに $S_N(f)$ は, ある $g \in L^1(\mathbb{T})$ に L^1 収束する. 一方, 各 $t \neq 0$ で $S_N(f)(t)$ は $f(t)$ に収束する. よって $f = g$. 実際, ファトゥの補題より

$$\int_{\mathbb{T}} |f - g| \, dt = \int_{\mathbb{T}} \lim_{N \to \infty} |S_N(f) - g| \, dt \le \liminf_{N \to \infty} \int_{\mathbb{T}} |S_N(f) - g| \, dt = 0. \qquad \square$$

注意 4.14. もし $a_N \log N \to 0$ でなければ (例えば $a_N = 1/\log N$ ならば), $S_N(f)$ は L^1 収束しない.

証明. まず, 数列 (c_N) が $c_N \geq 1/\log N$ を満たすならば, $c_N D_N$ は L^1 収束する部分列をもたないことを示す. 実際, もし $f_N := c_N D_N$ が L^1 収束する部分列 $(f_{N_i})_i$ をもち, それが $g \in L^1(\mathbb{T})$ に L^1 収束するとすれば, $\|D_N\|_1 \geq (4/\pi^2)\log N$ (命題 1.17) なので, $c_{N_i} \log N_i$ は上に有界であり, 特に $c_{N_i} \to 0$. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{f_{N_i}}(n) \to \widehat{g}(n)$ であって, $|n| \leq N_i$ ならば $\widehat{f_{N_i}}(n) = c_{N_i}$ なので, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{g}(n) = 0$ となり $g = 0$. しかし, $\|f_{N_i}\|_1 = c_{N_i}\|D_{N_i}\|_1 \geq 4/\pi^2$ なのでこれは矛盾.

もし $a_N \log N \to 0$ でなければ, 部分列をとると, $c > 0$ が存在して $a_{N_i} \geq c/\log N_i$ となり, 上で示したことから $a_{N_i} D_{N_i}$ は L^1 収束しない. □

定理 4.15. 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ は $a_n \searrow 0$ を満たすとする. 命題 4.11 より, コサイン級数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

は任意の $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ で収束することに注意する. もし

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \log n < \infty \tag{4.1}$$

ならば, f は $\mathbb{T}$ 上可積分であって, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $t \in \mathbb{T}$ に対し,

$$S_N(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt.$$

そして, $S_N(f)$ は f に L^1 収束する.

証明. まず $a_n \log n \to 0$ を示す. これは次から従う:

$$0 \leq a_n \log n = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \log n \leq \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \log k \to 0.$$

定理 4.13 の証明では $2s_N(t)$ を二回アーベル変換したが, ここでは一回だけアーベル変換する:

$$2s_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) D_n(t) + a_N D_N(t).$$

$N \to \infty$ とする. 右辺第 1 項は (4.1) より L^1 収束し, $|D_n(t)| \leq 1/|\sin \frac{t}{2}|$ より各 $t \neq 0$ で収束する. 右辺第 2 項は $a_N \log N \to 0$ より 0 に L^1 収束し, 各 $t \neq 0$ で 0 に収束する. よって, 任意の $t \neq 0$ に対し

$$2f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) D_n(t).$$

(4.1) より f は $\mathbb{T}$ 上可積分である. また, 任意の非負整数 n に対し

$$2\widehat{f}(n) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a_{j+1}) \widehat{D_j}(n) = \sum_{j=n}^{\infty} (a_j - a_{j+1}) = a_n.$$

あとの証明は定理 4.13 と同様である. □

次にサイン級数について考える.

定理 4.16. 数列 $(b_n)_{n=0}^\infty$ は $b_n \searrow 0$ を満たすとする. 命題 4.11 より, サイン級数

$$g(t) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin nt$$

は任意の $t \in \mathbb{T}$ で収束することに注意する. もし

$$\sum_{n=1}^\infty (b_n - b_{n+1}) \log n < \infty$$

ならば, g は $\mathbb{T}$ 上可積分であって, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $t \in \mathbb{T}$ に対し,

$$S_N(g)(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt.$$

そして, $S_N(g)$ は g に L^1 収束する.

証明は定理 4.15 と同様である. ディリクレ核 D_n の代わりに共役ディリクレ核 $\tilde{D}_n$ を使い, サイン部分和 $\tilde{s}_N(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt$ のアーベル変換を考えればよい:

$$2\tilde{s}_N(t) = \sum_{n=1}^N b_n \cdot 2\sin nt = \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1})\tilde{D}_n(t) + b_N \tilde{D}_N(t) - b_1 \cdot 0.$$

フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ の像は, いくらでも遅く 0 に収束する数列を含むことを示す.

命題 4.17. 数列 $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ は $\varepsilon_n \geq 0$ と $\varepsilon_n \to 0$ を満たすとする. このとき, 凸数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ が存在して $a_n \to 0$ であって, 任意の n に対し $a_n > \varepsilon_n$.

証明. 平面上に関数 $n \mapsto a_n$ のグラフを描くとよい. $N_1 \in \mathbb{N}$ を $n \geq N_1 \Rightarrow \varepsilon_n < 1/2$ となるようにとる. $a_{N_1} = 1$ とおく. $r > 0$ を大きくとって, 各 $0 \leq n < N_1$ に対し $a_n = -r(n - N_1) + 1$ と定めたとき, $a_n > \varepsilon_n$ となるようする.

$N_2 > N_1$ を $n \geq N_2 \Rightarrow \varepsilon_n < 1/3$ かつ $(1 - \frac{1}{2})(N_2 - N_1)^{-1} < r$ となるようにとる. 点 $(N_1, 1)$ と点 $(N_2, 1/2)$ を結ぶ線分を ℓ_2 とし, $N_1 < n \leq N_2$ に対し a_n を, 点 (n, a_n) が線分 ℓ_2 上の点になるように定める. 念のため, もう一回繰り返してみる. $N_3 > N_2$ を $n \geq N_3 \Rightarrow \varepsilon_n < 1/4$ かつ

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)(N_3 - N_2)^{-1} < \left(1 - \frac{1}{2}\right)(N_2 - N_1)^{-1}$$

となるようにとる. 点 $(N_2, 1/2)$ と点 $(N_3, 1/3)$ を結ぶ線分を ℓ_3 とし, $N_2 < n \leq N_3$ に対し a_n を, 点 (n, a_n) が線分 ℓ_3 上の点になるように定める. こうして得られる a_n が求めるものになる. $\square$

これと定理 4.13 (1) より次が従う:

系 4.18. 数列 $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ で $\varepsilon_n \geq 0$ かつ $\varepsilon_n \to 0$ となるものに対し, 偶関数 $f \in L^1(\mathbb{T})$ が存在して, 任意の非負整数 n に対し $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n) > \varepsilon_n$.

最後に, 凸数列 $(n^{-\alpha})_{n=1}^{\infty}$ (α は正の実数) と $(1/\log n)_{n=2}^{\infty}$ から得られる三角級数を考える.

例 4.19. $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\cos nt$ とする. 定理 4.13 より $f\in L^1(\mathbb{T})$ であって, この級数は f のフーリエ級数展開である. また, $n^{-\alpha}\log n\to 0$ なので $S_N(f)$ は f に L^1 収束する.

例 4.20. $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\sin nt$ とする. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-\alpha}-(n+1)^{-\alpha})\log n<\infty$ である. 定理 4.16 より $f\in L^1(\mathbb{T})$ であって, この級数は f のフーリエ級数展開である. そして, $S_N(f)$ は f に L^1 収束する.

例 4.21. $f(t)=\sum_{n=2}^{\infty}(\cos nt)/\log n$ とする. 定理 4.13 より $f\in L^1(\mathbb{T})$ であり, この級数は f のフーリエ級数展開である. しかし, 注意 4.14 より $S_N(f)$ は f に L^1 収束しない.

例 4.22. $f(t)=\sum_{n=2}^{\infty}(\sin nt)/\log n$ とする. これは任意の $t\in\mathbb{T}$ で収束し, $\mathbb{T}\setminus\{0\}$ 上の連続関数を定める. しかし, サイン級数 $\sum_{n=2}^{\infty}(\sin nt)/\log n$ は $L^1(\mathbb{T})$ の元のフーリエ級数展開にはならない (これは例 4.5 と同様にして示される). さらに, 次の命題 4.23 より f は $\mathbb{T}$ 上可積分でない.

命題 4.23. 数列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ は $b_n\searrow 0$ を満たすとする. 命題 4.11 より, サイン級数

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nt$$

は任意の $t\in\mathbb{T}$ で収束することに注意する. このとき, f が $\mathbb{T}$ 上可積分であるためには,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})\log n<\infty$$

であることが必要十分である.

一般に数列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し, $b_n\searrow 0$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})\log n<\infty$ ならば $b_n\log n\to 0$ である (これは定理 4.15 の証明のはじめで示した). よって命題 4.23 より, 例 4.22 の関数 f は $\mathbb{T}$ 上可積分でない.

命題 4.23 の証明には, 変形共役ディリクレ核

$$\tilde{D}_N^*(t)=\frac{1}{2}(\tilde{D}_{N-1}(t)+\tilde{D}_N(t))=\frac{1-\cos Nt}{\tan\frac{t}{2}}$$

を用いる. これの利点は, 核関数として $\tilde{D}_N$ とほぼ同じ役割を果たしつつ, 区間 $(0,\pi)$ 上で非負になることである. 次の評価を準備しておく:

補題 4.24. 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し, $\int_0^{\pi}\tilde{D}_N^*(t)\,dt\geq 2\log N-2$.

証明. 区間 $(0,\pi)$ 上で $\sin(t/2)\leq t/2$ かつ $\cos(t/2)\geq 1-t/\pi$ なので,

$$\int_0^{\pi}\tilde{D}_N^*(t)\,dt\geq\int_0^{\pi}(1-\cos Nt)\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{\pi}\right)dt=2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos Nt}{t}\,dt-2.$$

下から評価すると,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos Nt}{t}\,dt&=\int_0^{N\pi}\frac{1-\cos s}{s}\,ds=\sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos s}{s}\,ds\\&\geq\sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos s}{(n+1)\pi}\,ds=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\geq\log N+\frac{1}{N}.\end{aligned}$$

□

命題 4.23 の証明. 十分性は定理 4.16 で示した. 必要であることを示す. 定理 4.16 でも指摘したように, サイン部分和 $\tilde{s}_N(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt$ をアーベル変換すると

$$2\tilde{s}_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1})\tilde{D}_n(t) + b_N \tilde{D}_N(t).$$

関数 $\tilde{s}_N^*$ を $\tilde{s}_N^*(t) = (\tilde{s}_{N-1}(t) + \tilde{s}_N(t))/2$ で定めると,

$$2\tilde{s}_N^*(t) = \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1})\tilde{D}_n^*(t) + b_N \tilde{D}_N^*(t).$$

また, 任意の $t \neq 0$ に対し $\tilde{s}_N^*(t) \to f(t)$. よって, 任意の $t \neq 0$ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$2f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})\tilde{D}_n^*(t).$$

$(0,\pi)$ 上で $\tilde{D}_n^* \geq 0$ なので, 補題 4.24 より, $f \in L^1(\mathbb{T})$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) \log n < \infty$. □

演習問題

[1] $k \in \mathbb{N}$ とする. $f \in C^k(\mathbb{T})$ ならば, $\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k})$, つまり $|n| \to \infty$ で $|n|^k \widehat{f}(n) \to 0$ となることを示せ.

[2] (i) $\mathbb{T}$ 上の関数 $f(t) = |\sin(t/2)|$ のフーリエ係数を求めよ.

(ii) $\mathbb{T}$ 上の関数 g は, $t = 0$ の近傍で $g(t) = |t|$ であって $\mathbb{T} \setminus \{0\}$ 上で C^∞ 級であるとする. $\widehat{g}(n) = O(n^{-2})$ $(|n| \to \infty)$ を示せ ($g - 2f$ を考えよ).

[3] (i) $\mathbb{T}$ 上の関数 $f(t) = |\sin(t/2)|^3$ のフーリエ係数を求めよ.

(ii) $\mathbb{T}$ 上の関数 g は, $t = 0$ の近傍で $g(t) = |t|^3$ であって $\mathbb{T} \setminus \{0\}$ 上で C^∞ 級であるとする. $\widehat{g}(n) = O(n^{-4})$ $(|n| \to \infty)$ を示せ.

[4] コサイン級数 $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ はある $f \in L^1(\mathbb{T})$ のフーリエ級数展開であるとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \geq 0$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ならば, f は $L^\infty(\mathbb{T})$ に属さないことを示せ (サイン級数に対する類似は, 例 4.8 より正しくない).

[5] f を $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数とし, $(0,\infty)$ 上で f は C^2 級であって $f'' \geq 0$ とする. さらに $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ とする. 次を示せ:

(i) f は単調減少である.

(ii) $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 0$.

(iii) $\int_0^\infty xf''(x)\,dx = f(0)$.

[6] $a_n \searrow 0$ のとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \log n$ が収束するためには, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ が収束することが必要十分であることを示せ.

[7] $\tilde{D}_N^*$ の算術平均の L^1 ノルムは有界でないことを示せ. また, $\tilde{D}_N$ の算術平均の L^1 ノルムも有界でないことを示せ.

[8] 補題 4.9 の評価の係数 2 を $2/\pi$ にせよ.

[9] (i) 自然数 $N \geq 2$ と $Nt \in [0, \pi/2]$ となる $t \in \mathbb{T}$ に対し, 不等式 $\tilde{D}_N^*(t) \geq 2\sqrt{2}N^2 t/\pi^2$ を示せ.

(ii) $b_n \searrow 0$ とする. 任意の $t \in \mathbb{T}$ でサイン級数

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})\tilde{D}_n^*(t)$$

が収束することに注意する. もし任意の $M > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{n=N}^{2N}(b_n - b_{n+1})n > M$$

となるならば, f は $t = 0$ の近傍で非有界になることを示せ ($t = \pi/(4N)$ での値に注目せよ).

(iii) $0 < \alpha < 1$ とする. サイン級数 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin nt$ は $t = 0$ の近傍で非有界になることを示せ (詳しい挙動については [猪 1, §6.2], [Zyg, V.2] を参照せよ).

(iv) サイン級数 $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty}(\sin nt)/(\log n)^2$ に対し, $f \in L^1(\mathbb{T})$ であって, この級数は f のフーリエ級数展開であることを示せ. さらに, f は $t = 0$ の近傍で非有界になることを示せ.

[10] 命題 4.23 のコサイン級数版は正しくないことを示せ. 定理 4.13 のサイン級数版はどうか?

ノート

[猪 1, 第 6 章], [Kat, I.4], [Tol, Ch. 4], [Zyg, V.1] を主に参考にした. 補題 4.10 の評価は [Kat, II.1, Exercise 1] にあったもの. 命題 4.23 は [Zyg, Ch. V, Theorem 1.14] にあった.

この講の本質的な道具はアーベル変換のみであり, 三角級数の部分和に対しアーベル変換を一回もしくは二回行えば, 級数が収束するための条件が自然に現れる. ちなみに, $a_n \searrow 0$ のとき, コサイン級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ が $\mathbb{T}$ 上一様収束するためには $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ であることが必要十分である. これは命題 4.11 と併せればすぐわかる. 一方, $b_n \searrow 0$ のとき, サイン級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$ が $\mathbb{T}$ 上一様収束するためには $nb_n \to 0$ であることが必要十分である ([猪 1, 定理 6.2]).

フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ の像を捉えるのは確かに難しいが, $\mathbb{T}$ 上の複素ボレル測度にまで枠組みを広げ, そのフーリエ変換を考えれば, 像を捉えることができるようになる. そしてこの事実はユニタリ作用素のスペクトル分解定理へとつながっていく ([Kat, I.7]).

補講 A　病的なフーリエ部分和をもつ関数

A.1　L^1 収束しない例

D_n を $\mathbb{T}$ 上のディリクレ核とする．命題 1.17 で $n \to \infty$ で $\|D_n\|_1 \to \infty$ であることを示した．本節ではこれを用いて, $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f でフーリエ部分和 $S_n(f)$ $(= D_n * f)$ の L^1 ノルムが非有界になるものを構成する．

K_n を $\mathbb{T}$ 上のフェイエール核とする．自然数の増大列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ に対し, $\mathbb{T}$ 上の関数 f を次で定める:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} K_{n_k}(t). \tag{A.1}$$

任意の $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ に対し $|K_n(t)|$ は n について有界なので (命題 1.4 (1)), 右辺の級数は収束する ($t = 0$ のときは n_k の増え方によっては発散しうる)．また, $\|K_n\|_1 = 1$ であることと $L^1(\mathbb{T})$ が完備であることから, 右辺の級数は L^1 ノルムに関しても収束する．特に $f \in L^1(\mathbb{T})$ である．

定理 A.1. 自然数の増大列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ として十分速く増大するものをとれば, (A.1) で定義される $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f に対し, $S_n(f)$ の L^1 ノルムは非有界になる．特に $S_n(f)$ は f に L^1 収束しない．

証明のアイデアを述べる．そのためには $\widehat{f}$ のグラフに注目するとよい．まず, $\widehat{K_n}$ のグラフを考えてみる．これは 0 で頂上になり $-n-1$ と $n+1$ で山裾になる山の形をしている．原点について左右対称なグラフなので, 以後, 正の部分だけを考える．$n_1, \ldots, n_{k-1}$ が与えられた段階で, n_k を n_{k-1} に比べて非常に大きく取ると, $\widehat{K_{n_k}}$ のグラフは n_{k-1} より右側のある程度のところまでは平らに近くなる (この “ある程度のところ” を表す自然数を $m_k > n_{k-1}$ とかく)．平らに近いということは, $\widehat{K_{n_k}}$ のグラフを $n_{k-1}+1$ から m_k まで切り取って得られるグラフは $\widehat{D_{m_k}} - \widehat{D_{n_{k-1}}}$ のグラフに近い (後者は本当に平らなグラフである)．任意の $l > k$ に対し $\widehat{K_{n_l}}$ のグラフはさらに平らになるため, それを $n_{k-1}+1$ から m_k まで切り取って得られるグラフもまた $\widehat{D_{m_k}} - \widehat{D_{n_{k-1}}}$ のグラフに近い．

次に $\widehat{f}$ のグラフを考えてみる．これは $\widehat{K_{n_k}}$ のグラフを $1/2^k$ 倍の高さにして, それらを積み重ねたものである．$S_{m_k}(f) - S_{n_{k-1}}(f)$ の L^1 ノルムを大きくすることが目標である．この関数をフーリエ変換すると, そのグラフは $\widehat{f}$ のグラフを $n_{k-1}+1$ から m_k まで切り取ったものになる．この部分で $\widehat{K_{n_1}}, \ldots, \widehat{K_{n_{k-1}}}$ はいずれも 0 である．よって $g_k = \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l} K_{n_l}$ とおくと, 次の等式が成り立つ:

$$S_{m_k}(f) - S_{n_{k-1}}(f) = S_{m_k}(g_k) - S_{n_{k-1}}(g_k).$$

$\widehat{g_k}$ のグラフのうち $n_{k-1}+1$ から m_k までの部分を切り取る．それは $l \geq k$ に対する $2^{-l}\widehat{K_{n_l}}$ のグラフを切り取り積み重ねたものになる．前の段落で述べた通り, その各々は $2^{-l}(\widehat{D_{m_k}} - \widehat{D_{n_{k-1}}})$ の

グラフに近い. 以上により, $S_{m_k}(f)-S_{n_{k-1}}(f)$ の L^1 ノルムは $\sum_{l=k}^{\infty}2^{-l}\|D_{m_k}-D_{n_{k-1}}\|_1$ に近い. $\|D_n\|_1\to\infty$ なので, m_k を n_{k-1} に比べて大きくとっておけば, この L^1 ノルムは大きくできる. 次の証明で正確な評価を与える.

定理 A.1 の証明. $n_{k-1}<|n|\le n_k$ となる $n\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$\widehat{f}(n)=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}\widehat{K_{n_j}}(n)=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(1-\frac{|n|}{n_j+1}\right)=\widehat{f}(-n).$$

$n_{k-1}<m<n_k$ となる $m\in\mathbb{N}$ に対し, 次の不等式が成り立つ:

$$\|S_m(f)-S_{n_{k-1}}(f)\|_1\ge\frac{1}{2^{k-1}}(\|D_m\|_1-\|D_{n_{k-1}}\|_1)-\frac{2m^2}{n_k+1}. \tag{A.2}$$

実際, $\psi_n(t)=e^{int}+e^{-int}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\|S_m(f)-S_{n_{k-1}}(f)\|_1&=\left\|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{m}\widehat{f}(n)\psi_n\right\|_1=\left\|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{m}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(1-\frac{n}{n_j+1}\right)\psi_n\right\|_1\\&\ge\left\|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{m}\frac{1}{2^{k-1}}\psi_n\right\|_1-\left\|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{m}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{n}{n_j+1}\psi_n\right\|_1\\&\ge\frac{1}{2^{k-1}}\|D_m-D_{n_{k-1}}\|_1-\frac{2m^2}{n_k+1}\end{aligned}$$

となり, よって不等式 (A.2) が従う. $\|D_n\|_1\to\infty$ より, $n_1,\dots,n_{k-1}$ が与えられたとき, $m_k>n_{k-1}$ を大きくとって

$$\frac{1}{2^{k-1}}(\|D_{m_k}\|_1-\|D_{n_{k-1}}\|_1)>k+1+\|S_{n_{k-1}}(f)\|_1$$

となるようにできる. 次に, $n_k>m_k$ を大きくとって $2m_k^2/(n_k+1)<1$ となるようにすれば,

$$\|S_{m_k}(f)-S_{n_{k-1}}(f)\|_1>k+\|S_{n_{k-1}}(f)\|_1$$

となり, よって $\|S_{m_k}(f)\|_1>k$. このように帰納的に m_k,n_k を定めていくと, $S_{m_k}(f)$ の L^1 ノルムは無限大に発散する. □

A.2　ある点での値が収束しない例

再び $\|D_n\|_1\to\infty$ であることを用いて, 今度は $\mathbb{T}$ 上の連続関数 f で値 $|S_n(f)(0)|$ が非有界になるものを構成する. 前節と同様, $\widehat{f}$ のグラフに注目すると構成のアイデアがわかりやすい.

$n\in\mathbb{N}$ を固定する. 次の等式に注目する: $\psi\in L^1(\mathbb{T})$ に対し,

$$S_n(\psi)(0)=(D_n*\psi)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\psi(t)D_n(-t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\psi(t)D_n(t)\,dt.$$

ψ として D_n の符号を対応させる関数をとる. つまり $\psi(t)=D_n(t)/|D_n(t)|$ と定める ($D_n(t)=0$ となる点 t は有限個なので, これで $L^1(\mathbb{T})$ の元 ψ が定まる). すると $S_n(\psi)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|D_n(t)|\,dt=\|D_n\|_1$. ψ を $\|\psi_n\|_\infty\le 1$ を満たす $\psi_n\in C(\mathbb{T})$ で L^1 近似すると $|S_n(\psi_n-\psi)(0)|<1$ とできて,

$$|S_n(\psi_n)(0)|\ge|S_n(\psi)(0)|-|S_n(\psi_n-\psi)(0)|>\|D_n\|_1-1.$$

十分大きい $N \in \mathbb{N}$ に対し, フェイエール核 K_N とのたたみ込み $K_N * \psi_n$ をとると, それは ψ_n を一様近似する三角多項式であり, さらに $\|K_N * \psi_n\|_\infty \le \|K_N\|_1 \|\psi_n\|_\infty \le 1$. $\|D_n\|_1 \to \infty$ であることと併せて次が従う:

補題 A.2. 任意の $M > 0$ に対し, 三角多項式 p と自然数 n で $\|p\|_\infty \le 1$ かつ $|S_n(p)(0)| > M$ を満たすものが存在する.

M として 1 以上の数をとったとき, この補題でとれる n は p の次数より小さいことに注意する. 実際もしそうでなければ, $S_n(p) = p$ となり補題の結論に反する.

目標の関数 f を構成する. 補題 A.2 を用いて, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, 三角多項式 p_k と $n_k \in \mathbb{N}$ で $\|p_k\|_\infty \le 1$ かつ $|S_{n_k}(p_k)(0)| > 2^k k$ となるものをとる. p_k の次数を d_k で表し, 非負整数 L_k を帰納的に $L_1 = 0$, $L_{k+1} = L_k + d_k + 1 + d_{k+1}$ で定める. そして, 三角多項式 q_k を $q_k(t) = e^{iL_k t} p_k(t)$ で定め, $\mathbb{T}$ 上の関数 f を次で定める:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} q_k(t). \tag{A.3}$$

$\|q_k\|_\infty = \|p_k\|_\infty \le 1$ なので, 右辺の級数は $\mathbb{T}$ 上一様収束する. よって f は $\mathbb{T}$ 上連続である.

$\widehat{q_k}$ のグラフに注目する. $\widehat{q_k}(n) \neq 0$ となる $n \in \mathbb{Z}$ の集合を $\widehat{q_k}$ の台とよぶことにする. q_k は p_k に $e^{iL_k t}$ をかけることで定義されるため, $\widehat{q_k}$ のグラフは $\widehat{p_k}$ のグラフを右に L_k だけずらしたものになる. よって, 任意の $k \neq l$ に対し $\widehat{q_k}$ の台と $\widehat{q_l}$ の台は交わらない (そうなるように L_k を定義した). そして $\widehat{f}$ のグラフは, これら $\widehat{q_k}$ のグラフを $1/2^k$ 倍の高さにして並べたものになる.

フーリエ部分和 $S_{L_k+n_k}(f)$ を考えてみる. $\widehat{f}$ のグラフを $-L_k - n_k$ から $L_k + n_k$ まで切り取る. フーリエ変換のグラフがその切り取られたグラフになるような三角多項式が $S_{L_k+n_k}(f)$ である. $-d_1$ から $L_k - d_k$ までの部分に $\widehat{q_1}, \dots, \widehat{q_{k-1}}$ の台はすべて含まれる. そして $l > k$ のとき, $\widehat{q_l}$ の台は $L_k + d_k$ より右側にある. $n_k < d_k$ に注意すると, 次の等式が従う:

$$S_{L_k+n_k}(f) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} q_j + \frac{1}{2^k} S_{L_k+n_k}(q_k).$$

同様に, フーリエ部分和 $S_{L_k-n_k-1}(f)$ に関して次の等式が得られる:

$$S_{L_k-n_k-1}(f) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} q_j + \frac{1}{2^k} S_{L_k-n_k-1}(q_k).$$

一方, $\widehat{q_k}$ のグラフは $\widehat{p_k}$ のグラフをちょうど L_k だけ右にずらしたものであることから, 次の等式がすべての $t \in \mathbb{T}$ に対して成り立つ:

$$S_{L_k+n_k}(q_k)(t) - S_{L_k-n_k-1}(q_k)(t) = e^{iL_k t} S_{n_k}(p_k)(t).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} |S_{L_k+n_k}(f)(0) - S_{L_k-n_k-1}(f)(0)| &= \frac{1}{2^k} |S_{L_k+n_k}(q_k)(0) - S_{L_k-n_k-1}(q_k)(0)| \\ &= \frac{1}{2^k} |S_{n_k}(p_k)(0)| > k. \end{aligned}$$

以上により, 次が示された:

定理 A.3. 等式 (A.3) で定義される $\mathbb{T}$ 上の連続関数 f に対し, $|S_n(f)(0)|$ は n について非有界である.

A.3　一様有界性原理とその応用

A.1 節と A.2 節での関数の構成は, ディリクレ核の L^1 ノルム $\|D_N\|_1$ が非有界であることを利用したものであった. 本節では, 同じ性質をもつ関数の存在を一様有界性原理を用いて示す. その結果, そのような関数の存在が $\|D_N\|_1$ の非有界性に起因するということをより直接的な形で表現することができる. ノルム空間とその間の線型作用素について用語を準備した後, 一様有界性原理を示す. 一様有界性原理は関数解析の基本定理の一つであり, 本節で述べる内容の多くは関数解析の教科書で見つけることができる.

以下, ノルム空間といえば $\mathbb{C}$ 上のノルム空間を意味する. 一般に, ノルムを備えたベクトル空間は, ノルムから定まる距離をもち, そしてその距離からくる位相をもつ. **バナッハ空間**とは, ノルム空間でそのノルムから定まる距離が完備なものを意味する. ノルム空間の間の線型写像のことを**線型作用素**とよぶことが多い. X, Y をノルム空間とし, $T\colon X \to Y$ を線型作用素とする. $x \in X$ に対し, 簡単のため $T(x)$ のことを Tx としばしばかく. T が**連続**であるとは, X と Y のノルムからくる位相に関して T が連続であるときをいう. T が**有界**であるとは, 次の等しい値

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X,\, \|x\|=1} \|Tx\|$$

が有限であるときをいう. このとき, この値を $\|T\|$ とかき, T の**作用素ノルム**という. T が有界なとき, 任意の $x \in X$ に対し $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ が成り立つ. 任意の $x \in X$ に対し不等式 $\|Tx\| \leq M\|x\|$ を満たすような非負実数 M で最小のものが T の作用素ノルムである.

命題 A.4. X, Y をノルム空間とし, $T\colon X \to Y$ を線型作用素とする. このとき, T が連続であることと T が有界であることは同値である.

証明. T が有界ならば, X の元の列 (x_n) が $x \in X$ に収束するとき, $\|Tx_n - Tx\| \leq \|T\|\|x_n - x\|$ より Tx_n は Tx に収束する. よって T は連続である. T が有界でなければ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $x_n \in X$ が存在して $\|x_n\| = 1$ かつ $\|Tx_n\| \geq n$. $y_n = x_n/n$ とおくと, y_n は 0 に収束するが $\|Ty_n\| \geq 1$ なので Ty_n は 0 に収束しない. よって T は連続でない. □

このため, 連続な線型作用素のことを有界線型作用素とよぶことが多い. 後で必要になる線型作用素の例のみを挙げる.

例 A.5. $N \in \mathbb{N}$ を固定する. $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し $S_N(f) = D_N * f$ を対応させることで, S_N は $L^1(\mathbb{T})$ からそれ自身への線型作用素と見なせる. 任意の $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し $\|S_N f\|_1 \leq \|D_N\|_1\|f\|_1$ なので, S_N は有界であって $\|S_N\| \leq \|D_N\|_1$.

等式 $\|S_N\| = \|D_N\|_1$ を示す. 自然数 $M > N$ に対し,

$$S_N(K_M)(t) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{M+1}\right)e^{int}$$

であって, $M \to \infty$ で $S_N K_M$ は D_N に L^1 で近づく. $\|K_M\|_1 = 1$ なので $\|S_N\| \geq \|D_N\|_1$.

例 A.6. 再び $N \in \mathbb{N}$ を固定する. 線型作用素 $T_N\colon C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ を

$$T_N f = S_N(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_N(-t)f(t)\,dt$$

で定める. 任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対し $|T_N f| \leq \|D_N\|_1 \|f\|_\infty$ なので, $\|T_N\| \leq \|D_N\|_1$.

等式 $\|T_N\| = \|D_N\|_1$ を示す. これは補題 A.2 の証明の議論から従う. すなわち, D_N の符号を対応させる関数 $\psi(t) = D_N(t)/|D_N(t)|$ を考え, これを $\|\xi\|_\infty \leq 1$ を満たす $\xi \in C(\mathbb{T})$ で L^1 近似する. すると $S_N(\psi)(0) = \|D_N\|_1$ であって, $|S_N(\psi)(0) - S_N(\xi)(0)|$ は小さい. よって $|S_N(\xi)(0)|$ は $\|D_N\|_1$ に近い. $\|\xi\|_\infty \leq 1$ なので $\|T_N\| \geq \|D_N\|_1$.

X を位相空間とし, A をその部分集合とする. A の点 a が A の (X での) 内点であるとは, X の開部分集合 U が存在して $a \in U \subset A$ となるときをいう. 一様有界性原理をはじめ, 完備性に伴う関数解析の諸定理は次の定理から導かれる:

定理 A.7 (ベールの定理)**.** X を完備距離空間とする. $A_1, A_2, \ldots$ を可算個の X の閉部分集合とし, その各々は X での内点をもたないとする. このとき, 和集合 $\bigcup_n A_n$ は X より真に小さい.

証明. $x \in X$ と $r > 0$ に対し, $B(x,r)$ で x を中心とする半径 r の X での開球を表す:

$$B(x,r) = \{\, y \in X \mid d(x,y) < r \,\}$$

(d は X の距離である). A_1 は内点をもたないので X より真に小さい. A_1 は閉なので, $x_1 \in X$ と $0 < r_1 < 1$ が存在して $B(x_1, r_1) \subset X \setminus A_1$.

次に, A_2 は内点をもたないので, A_2 は $B(x_1, r_1)$ を含まない. よって, $B(x_1, r_1)$ の点 x_2 で A_2 に含まれないものが存在する. A_2 は閉なので, $0 < r_2 < 1/2$ が存在して $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \setminus A_2$. ここで, 必要ならば r_2 をさらに小さくとって $B(x_2, r_2)$ の閉包が $B(x_1, r_1) \setminus A_2$ に含まれるとしてよい.

この操作を繰り返す. その結果, X の点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ と $0 < r_n < 1/n$ が存在して, $B(x_n, r_n)$ の閉包は $B(x_{n-1}, r_{n-1}) \setminus A_n$ に含まれる. 球 $B(x_n, r_n)$ は n について単調減少であり, よって任意の $m \geq n$ に対し $x_m \in B(x_n, r_n)$. $r_n \to 0$ より (x_n) はコーシー列になり, X の完備性により収束する. その極限を $x \in X$ とかく. 任意の n に対し, $m \geq n$ ならば $x_m \in B(x_n, r_n)$ なので, $m \to \infty$ とすれば x が $B(x_n, r_n)$ の閉包に属することが従う. ゆえに x は A_n に属さない. これがすべての n についていえるので x は $\bigcup_n A_n$ に属さず, 定理の結論を得る. □

系 A.8 (一様有界性原理)**.** X をバナッハ空間とし, Y をノルム空間とする. Λ を集合とし, Λ の元 λ で添字付けられた有界線型作用素 $T_\lambda\colon X \to Y$ が与えられたとする. もし任意の $x \in X$ に対し $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda x\|$ が有限ならば, $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\|$ も有限である.

証明. 自然数 n に対し, X の部分集合 A_n を

$$A_n = \{\, x \in X \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } \|T_\lambda x\| \leq n \,\}$$

で定める. 各 T_λ は連続なので, A_n は X の閉部分集合である. また仮定より $X = \bigcup_n A_n$ である. 定理 A.7 より, ある n が存在して A_n は X での内点をもつ. その内点を x とかくと, $\varepsilon > 0$ が存

在して $B(x,\varepsilon) \subset A_n$. ここで $B(x,\varepsilon)$ は前の定理の証明と同様, x を中心とした半径 ε の X での開球を表す.

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\|T_\lambda\| \leq 4n/\varepsilon$ となることを示す. $\lambda \in \Lambda$ をとり, $y \in X$ で $\|y\| = 1$ となるものをとる. $x + \varepsilon y/2$ は $B(x,\varepsilon)$ に属し, そして $B(x,\varepsilon) \subset A_n$ なので $\|T_\lambda(x+\varepsilon y/2)\| \leq n$. また, x も $B(x,\varepsilon)$ に属するので $\|T_\lambda x\| \leq n$. よって $\|T_\lambda y\| \leq 2(n + \|T_\lambda x\|)/\varepsilon \leq 4n/\varepsilon$. □

次の系は系 A.8 の特別な場合である.

系 A.9. X をバナッハ空間とし, Y をノルム空間とする. X から Y への有界線型作用素からなる列 $(T_n)_{n=1}^\infty$ に対し, もし作用素ノルム $\|T_n\|$ が n について非有界ならば, $x \in X$ が存在して Y の元の列 $(T_n x)_{n=1}^\infty$ は収束しない.

この系を例 A.5 の S_N と例 A.6 の T_N に適用する. $L^1(\mathbb{T})$ と $C(\mathbb{T})$ はともにバナッハ空間であることに注意する. $\|S_N\| = \|D_N\|_1 \to \infty$ なので, 系 A.9 より $f \in L^1(\mathbb{T})$ が存在して $S_N(f)$ は L^1 収束しない. また, $\|T_N\| = \|D_N\|_1 \to \infty$ なので, 同様に $g \in C(\mathbb{T})$ が存在して $T_N g = S_N(g)(0)$ は収束しない. A.1 節と A.2 節で構成したのは, このような f と g の例である. 一様有界性原理により, こういった病的な関数の存在の本質は, 考えている関数空間の完備性とノルム $\|D_N\|_1$ の非有界性にあるといえる.

系 4.18 で示したように, 0 に減衰するどんな正の実数列に対しても, フーリエ係数がそれより遅く減衰するような $\mathbb{T}$ 上の可積分関数が存在する. 一様有界性原理を使えば, 次の事実を示すことができる:

命題 A.10. $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を正の実数からなる列とし, $|n| \to \infty$ で $\varepsilon_n \to 0$ とする. このとき, $f \in C(\mathbb{T})$ が存在して数列 $(\widehat{f}(n)/\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は有界でない.

証明. $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 線型作用素 $T_n\colon C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ を $T_n f = \widehat{f}(n)/\varepsilon_n$ で定める. すると $\|T_n\| = 1/\varepsilon_n$ である. もし命題の結論が正しくなければ, 任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対し $\sup_n |T_n f| < \infty$. 系 A.8 より $\sup_n \|T_n\| < \infty$. これは $\varepsilon_n \to 0$ に反する. □

演習問題

[1] D_N をたたみ込む作用素を $L^2(\mathbb{T})$ 上で考えると, その作用素ノルムは 1 であることを示せ.

[2] K_N の L^2 ノルムを求めよ. そしてこれを用いて, 定理 A.1 の構成で L^1 の代わりに L^2 にするとうまくいかない理由を説明せよ.

[3] $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を正の実数からなる列とし, $|n| \to \infty$ で $\varepsilon_n \to 0$ とする. 任意の無限部分集合 $E \subset \mathbb{Z}$ に対し, $f \in C(\mathbb{T})$ で次を満たすものが存在することを示せ: 数列 $(\widehat{f}(n)/\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は有界でなく, 任意の $n \in \mathbb{Z} \setminus E$ に対し $\widehat{f}(n) = 0$.

[4] (一様有界性原理のちょっとした一般化). 次を示せ: X をバナッハ空間とし, Y をノルム空間とする. 自然数 k で添字付けられた集合 Λ_k と Λ_k の元 λ で添字付けられた有界線型作用素 $T_\lambda\colon X \to Y$ が与えられたとする. このとき, もし任意の $x \in X$ に対し, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $\sup\{\, \|T_\lambda x\| \mid \lambda \in \Lambda_k \,\}$ が有限ならば, ある $l \in \mathbb{N}$ が存在して $\sup\{\, \|T_\lambda\| \mid \lambda \in \Lambda_l \,\}$ は有限である.

[5] 次を示せ: 任意の可算部分集合 $E \subset \mathbb{T}$ に対し, ある $f \in C(\mathbb{T})$ が存在して, 任意の $t \in E$ に対し $\sup_N |S_N(f)(t)| = \infty$ (実は, E を任意の測度零の部分集合としてもこの主張は正しい. [Kat, II.3] を参照せよ).

[6] さらに次を示せ: 任意の可算部分集合 $E \subset \mathbb{T}$ と閉区間 $I \subsetneq \mathbb{T}$ で $E \cap I = \emptyset$ となるものに対し, ある $f \in C(\mathbb{T})$ が存在して, 任意の $t \in E$ に対し $\sup_N |S_N(f)(t)| = \infty$ であって, さらに任意の $t \in I$ に対し $f(t) = 0$ (もし E が I の近傍と交わらないならば, 前の問題とリーマンの局所性原理 2.15 が使える).

ノート

定理 A.1 の証明は [Kat, II.1, Exercise 2] を解いたもの. フーリエ部分和が $t = 0$ で収束しないような $\mathbb{T}$ 上の連続関数の例は, 例えば [Kat, II.2.1], [Kör, §18], [SS1, Ch. 3, §2.2] にある. 構成のアイデアは概ね同じである. 一様有界性原理のフーリエ級数に対する応用については [Ru1, Ch. 5] で見つけることができる.

第 II 部

$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^d$ 上のフーリエ変換

第5講　序論

5.1　ℝ 上のフーリエ変換を導く

ℝ 上の関数 f のフーリエ変換を考えたい. その定義を与える前に, 𝕋 上の関数のフーリエ級数展開を用いて f の積分表示を得てみる. まずは f はコンパクト台をもつとしよう (ℝ 上の色々な関数はコンパクト台をもつ関数で色々近似できるので, このくらいの仮定からはじめても差し支えないだろう). $L > 0$ を大きくとると f の台は閉区間 $[-L\pi, L\pi]$ に含まれる. $[-\pi, \pi]$ 上の関数 f_L を $f_L(t) = f(Lt)$ で定義する. f_L は 𝕋 上の関数と見なせる. これをフーリエ級数展開したい. そこで, f は ℝ 上滑らかと仮定する. そうすると f_L も 𝕋 上滑らかになり,

$$f_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_L}(n) e^{int}$$

と展開される. フーリエ係数を計算する:

$$\widehat{f_L}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_L(t) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi L}\int_{-L\pi}^{L\pi} f(y) e^{-in\frac{y}{L}}\, dy = \frac{1}{2\pi L}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{n}{L}y}\, dy.$$

最後の等式は f の台が $(-L\pi, L\pi)$ に含まれることによる. すると $x \in [-L\pi, L\pi]$ に対し,

$$f(x) = f_L(x/L) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_L}(n) e^{in\frac{x}{L}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{n}{L}y}\, dy\right) e^{i\frac{n}{L}x}\frac{1}{L}.$$

右辺をよく見ると, ℝ 上のある関数に対するリーマン和の形をしている. より詳しく述べると, ℝ 上の関数 $\widehat{f}$ を $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy$ で定めると, 上の右辺は, ℝ 上の関数 $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}$ と長さ $1/L$ の小区間への ℝ の分割に対するリーマン和である. ただし, リーマン積分におけるリーマン和は通常, 有界な区間上で定義されるので状況がちょっと違う. とはいうものの, もし関数 $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}$ が無限遠で速く 0 に減衰するならば, 遠くの部分の影響は小さくなり, L を大きくし小区間の長さを小さくしていくとリーマン和は積分に近づくはずである (実際 f は滑らかとしているので, 任意の自然数 k に対し $|\xi| \to \infty$ で $\widehat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$ であることが示される). 以上をまとめると, L を大きくすることで次の等式が得られよう:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy\right) e^{i\xi x}\, d\xi. \tag{5.1}$$

これが望んでいた f の積分表示である. 関数 $\widehat{f}$ は f が ℝ 上可積分であれば定義できるので, そう定義しよう: $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, ℝ 上の関数 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

で定義し, これを f の**フーリエ変換**という. 対応 $f \mapsto \widehat{f}$ のこともフーリエ変換とよぶ. $\widehat{f}$ のことを $f^\wedge$ とも表す.

等式 (5.1) は $\mathbb{T}$ 上の関数のフーリエ級数展開と似ている. $\mathbb{T}$ 上の関数 g は, 多くの場合

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) e^{int}$$

と展開される. つまり g は, フーリエ係数 $\widehat{g}(n)$ をウェイトとする, 関数 $t \mapsto e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$ たちの重ね合わせになる. 一方, 等式 (5.1) は, f が $\widehat{f}(\xi)$ をウェイトとする, 関数 $x \mapsto e^{i\xi x}$ $(\xi \in \mathbb{R})$ たちの重ね合わせになることを主張する. 実際 $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換は $\mathbb{T}$ 上のフーリエ変換と並行する側面が多い. 等式 (5.1) は, 関数 f がそのフーリエ変換 $\widehat{f}$ から復元されるという意味で, **反転公式**とよばれる.

任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して反転公式 (5.1) が成り立つかどうかについては, 一つ問題がある. 関数 $\widehat{f}$ は一般に $\mathbb{R}$ 上可積分とは限らず, その場合, 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$ が定義できないのである. しかし実は, (5.1) の右辺がルベーグ積分の意味で定義できるような関数 f に対しては, 等式 (5.1) がほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ で成り立つ. 本講では $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核を導入し, その総和核としての性質を応用しこれを示す. また, 後で示すように $\widehat{f}$ は $\mathbb{R}$ 上連続である. よって正の実数 λ と $x \in \mathbb{R}$ に対し, 積分

$$S_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$$

を定義することができる. では, $\lambda \to \infty$ で $S_\lambda(f)$ は f に何らかの意味で収束するだろうか? $\mathbb{T}$ の場合, フーリエ部分和の収束の問題がこれに相当する. 第 6 講でこれを扱う. 第 7 講ではシュワルツ急減少関数のクラス $\mathcal{S}$ を導入する. このクラスはフーリエ変換 $f \mapsto \widehat{f}$ の下で保存され, そしてその任意の元が反転公式 (5.1) を満たすといった性質をもつため, 大変扱いやすい. $\mathbb{T}$ の場合, このクラスは $C^\infty(\mathbb{T})$ に相当し, $C^\infty(\mathbb{T})$ の元はフーリエ変換の下で $\mathbb{Z}$ 上の急減少数列と一対一に対応する (命題 4.1).

記号を導入する. $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ とおく. $\mathbb{R}$ の座標を x で表し, $\widehat{\mathbb{R}}$ の座標を ξ で表すことが多い. これは f と $\widehat{f}$ の定義域を区別するための措置である (位相群の表現論によると, $\widehat{f}$ の定義域は f の定義域 $\mathbb{R}$ の双対として捉えられる. ハットは双対を表す記号である).

5.2　基本性質

$1 \le p < \infty$ に対し, $L^p(\mathbb{R})$ の元 f のノルムを

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}$$

で定める. 次は定義から従う: 任意の $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$ に対し

$$(f+g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi), \quad (\alpha f)^\wedge(\xi) = \alpha \widehat{f}(\xi), \quad |\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_1.$$

命題 5.1. 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, $\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上一様連続である.

証明. $\xi, \eta \in \widehat{\mathbb{R}}$ に対し,

$$|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x})\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|e^{-i\eta x} - 1|\,dx.$$

右辺の被積分関数は $2|f(x)|$ 以下であり, $\mathbb{R}$ 上可積分である. ルベーグ収束定理より $\eta \to 0$ で右辺は 0 に収束する. しかも右辺は ξ によらない. □

たたみ込みに関する次の主張は $\mathbb{T}$ の場合と同様にして示される. 証明は省略する.

命題 5.2. $1 \le p < \infty$ とし, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ とする.

(1) ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し, 関数 $y \mapsto f(x-y)g(y)$ は $\mathbb{R}$ 上可積分である.

(2) ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

で関数 $f * g$ を定めると, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ かつ $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$.

さらに $g * f$ も同様の式で定義され, 等式 $f * g = g * f$ が成り立つ. また, $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ に対し,

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

命題 5.3. 任意の $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ と $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$ に対し, $(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

証明. フビニの定理により,

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-i\xi x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy\right) e^{-i\xi x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-i\xi(x-y)}\,dx\right) g(y) e^{-i\xi y}\,dy = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

5.3 ディリクレ核とフェイエール核

これらはどう定義すればよいだろうか? $\mathbb{T}$ の場合, これらはそれぞれ

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}, \qquad K_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int}$$

であった. $\widehat{D_N}$ と $\widehat{K_N}$ を $\mathbb{Z}$ 上の関数だと思ってグラフを描いてみる (三角多項式の第 n フーリエ係数は e^{int} の係数であることを思い出す). $\mathbb{R}$ の場合もまた, ディリクレ核とフェイエール核のフーリエ変換はそのようなグラフの関数になってほしい. つまり, $\lambda > 0$ に対し

$$\widehat{D_\lambda}(\xi) = \chi_{[-\lambda,\lambda]}(\xi), \qquad \widehat{K_\lambda}(\xi) = \chi_{[-\lambda,\lambda]}(\xi)\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \tag{5.2}$$

が成り立つように $\mathbb{R}$ 上のディリクレ核 D_λ とフェイエール核 K_λ を定義したい. そこで反転公式を見越して, D_λ と K_λ を次で定義する:

$$D_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\xi x}\,d\xi, \qquad K_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

計算してみる. $x \neq 0$ のとき,

$$D_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ix}e^{i\xi x}\right]_{\xi=-\lambda}^{\lambda} = \frac{e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x}}{2\pi i x} = \frac{\sin\lambda x}{\pi x}.$$

また, $D_\lambda(x) = \lambda D_1(\lambda x)$ とかける.

注意 5.4. D_λ の定義式で x と ξ を入れ替えることで, 定義関数 $\chi_{[-\lambda,\lambda]}$ のフーリエ変換が得られる: $(\chi_{[-\lambda,\lambda]})^\wedge(\xi) = 2\pi D_\lambda(-\xi) = 2\xi^{-1}\sin\lambda\xi$. これは $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分でない.

次にフェイエール核を計算する:

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\lambda}\right)e^{i\xi x}\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{0}\left(1+\frac{\xi}{\lambda}\right)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

第 2 項は $\frac{1}{2\pi}\int_0^\lambda(1-\frac{\xi}{\lambda})e^{-i\xi x}\,d\xi$ に等しい. $x \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\lambda}\right)e^{i\xi x}\,d\xi &= \left[\frac{1}{ix}e^{i\xi x}\right]_{\xi=0}^{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left(\left[\xi\frac{1}{ix}e^{i\xi x}\right]_{\xi=0}^{\lambda} - \frac{1}{ix}\int_0^{\lambda} e^{i\xi x}\,d\xi\right)\\ &= \frac{e^{i\lambda x}-1}{ix} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda e^{i\lambda x}}{ix} - \frac{e^{i\lambda x}-1}{(ix)^2}\right) = -\frac{1}{ix} - \frac{e^{i\lambda x}-1}{\lambda x^2}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}K_\lambda(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{ix} - \frac{e^{i\lambda x}-1}{\lambda x^2}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix} - \frac{e^{-i\lambda x}-1}{\lambda x^2}\right) = \frac{1-\cos\lambda x}{\pi\lambda x^2}\\ &= \frac{2\sin^2(\lambda x/2)}{\pi\lambda x^2} = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\sin(\lambda x/2)}{\lambda x/2}\right)^2.\end{aligned}$$

また, $K_\lambda(x) = \lambda K_1(\lambda x)$ とかける. フェイエール核 K_λ を定義した経緯を思い出すと, そのフーリエ変換が (5.2) のようになることを期待し, そう定義したのであった. 本当に K_λ のフーリエ変換がそうなることは後で示す (系 5.15). 6.2 節では, K_λ と $\mathbb{T}$ 上のフェイエール核との関連を明らかにする.

5.4 総和核とその応用

5.4.1 たたみ込みによる近似

$\mathbb{R}$ 上の総和核の定義は $\mathbb{T}$ の場合と同様である. 次を満たす $L^1(\mathbb{R})$ の元の族 $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ を $\mathbb{R}$ 上の**総和核**という:

(1) 任意の $\lambda > 0$ に対し, $\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)\,dx = 1$.

(2) $C > 0$ が存在して, 任意の $\lambda > 0$ に対し $\|k_\lambda\|_1 \le C$.

(3) 任意の $\delta > 0$ に対し, $\lambda \to \infty$ で $\int_{|x|\ge\delta} |k_\lambda(x)|\,dx \to 0$.

例 5.5. $k \in L^1(\mathbb{R})$ で $\int_{\mathbb{R}} k(x)\,dx = 1$ となるものをとる. 各 $\lambda > 0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 k_λ を $k_\lambda(x) = \lambda k(\lambda x)$ で定義すれば, 族 $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ は $\mathbb{R}$ 上の総和核である. 実際, 定義の条件 (1), (2) は変数変換により確かめられ, (3) は $\int_{|x|\ge\delta} |k_\lambda(x)|\,dx = \int_{|y|\ge\lambda\delta} |k(y)|\,dy \to 0$ $(\lambda \to \infty)$ より従う.

例 5.6. ディリクレ核 $(D_\lambda)_{\lambda>0}$ は $\mathbb{R}$ 上の総和核でない (D_λ は $\mathbb{R}$ 上可積分でないので).

例 5.7. フェイエール核 $(K_\lambda)_{\lambda>0}$ は $\mathbb{R}$ 上の総和核である. これを示すには, $K_\lambda(x) = \lambda K_1(\lambda x)$ なので $\int_{\mathbb{R}} K_1(x)\,dx = 1$ を示せばよい. そしてこれは次の計算より従う:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 dx = 2\int_0^\infty \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = 2\left(\left[-\frac{\sin^2 y}{y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin y\cos y}{y}\,dy\right)$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{\sin 2y}{y}\,dy = 2\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \pi.$$

ただし, 二つ目の等号以降はリーマン広義積分である. 最後の等式は補題 2.13 の証明で得た.

$\mathbb{T}$ の場合と同様, 総和核をたたみ込むと関数のよい近似が得られる.

定理 5.8. $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ を $\mathbb{R}$ 上の総和核とする.

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数 f は $\mathbb{R}$ 上有界かつ一様連続とする. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $(k_\lambda * f)(x)$ が定まることに注意する. このとき, $\lambda \to \infty$ で $k_\lambda * f$ は f に $\mathbb{R}$ 上一様収束する.

(2) $1 \le p < \infty$ とする. 任意の $f \in L^p(\mathbb{R})$ に対し, $\lambda \to \infty$ で $k_\lambda * f$ は f に L^p 収束する.

証明. (1) $\mathbb{T}$ の場合 (定理 1.6) と同様である. $\varepsilon > 0$ をとる. f は $\mathbb{R}$ 上一様連続なので, $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $y \in (-\delta, \delta)$ に対し $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. $x \in \mathbb{R}$ をとると,

$$|(k_\lambda * f)(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,|k_\lambda(y)|\,dy.$$

右辺の積分を $|y| < \delta$ の部分と $|y| \ge \delta$ の部分に分けると,

$$\text{右辺} \le \int_{|y|<\delta} \varepsilon |k_\lambda(y)|\,dy + \int_{|y|\ge\delta} 2\|f\|_1 |k_\lambda(y)|\,dy.$$

$C > 0$ を総和核の定義における定数とすると, 第 1 項は $C\varepsilon$ より小さい. 第 2 項は, λ を大きくすると ε より小さくなる. そして, この λ のとり方は x によらない.

(2) $\mathbb{T}$ の場合この主張に対応するのは定理 1.8 であるが, その証明では $\mathbb{T}$ の測度が有限であることを使っている. そのため, ここでは違う方法をとる. まず $p > 1$ のときに示す. $\varepsilon > 0$ をとる. $\delta > 0$ が存在して, $|y| < \delta$ ならば $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p\,dx < \varepsilon$ (これは f がコンパクト台をもつ連

続関数ならば直接示せる. 一般の f に対しては, 補題 1.10 の証明と同様の方法で f をコンパクト台をもつ連続関数で L^p 近似すればよい). すると,

$$\|k_\lambda * f - f\|_p^p \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,|k_\lambda(y)|\,dy \right)^p dx. \tag{5.3}$$

$1/p+1/q=1$ となる q をとる. $|k_\lambda(y)|$ を $|k_\lambda(y)|^{1/p}|k_\lambda(y)|^{1/q}$ と分解し, ヘルダー不等式を用いる:

$$右辺 \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p |k_\lambda(y)|\,dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |k_\lambda(y)|\,dy \right)^{p/q} dx$$

一つ目の y に関する積分を $|y|<\delta$ の部分と $|y|\ge\delta$ の部分に分け, x で先に積分する:

$$右辺 \le C^{p/q} \left(\int_{|y|<\delta} \varepsilon |k_\lambda(y)|\,dy + \int_{|y|\ge\delta} (2\|f\|_p)^p |k_\lambda(y)|\,dy \right).$$

ここで, $f_y(x) = f(x-y)$ とおくと $\|f_y - f\|_p \le \|f_y\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p$ であり, この不等式を用いた. $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ が総和核であることから, 大きい $\lambda>0$ に対し, 右辺は $C^{p/q}(C\varepsilon + (2\|f\|_p)^p\varepsilon)$ より小さくなる. これで $p>1$ のときが示せた.

$p=1$ のときもほぼ同様にして示せる. $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ が存在して次が成り立つ: $|y|<\delta$ ならば $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|\,dx < \varepsilon$. 不等式 (5.3) で $p=1$ としたものが得られる. y に関する積分を $|y|<\delta$ の部分と $|y|\ge\delta$ の部分に分け, x で先に積分する. あとは同様に評価すればよい. □

$\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数でコンパクト台をもつもの全体を $C_c^\infty(\mathbb{R})$ で表す.

系 5.9. $1 \le p < \infty$ のとき, 任意の $L^p(\mathbb{R})$ の元は $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の元で L^p 近似できる.

証明. $f \in L^p(\mathbb{R})$ をとる. $M>0$ を大きくとると $\|f - f\chi_{[-M,M]}\|_p$ を小さくできるので, はじめから $|x|>M$ ならば $f(x)=0$ であるとしてよい. $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ で $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$ となるものを用意する. $\lambda>0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 φ_λ を $\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi(\lambda x)$ で定めると, 族 $(\varphi_\lambda)_{\lambda>0}$ は $\mathbb{R}$ 上の総和核になる. 定理 5.8 (2) より L^p で $\varphi_\lambda * f \to f$. 一方, ルベーグ収束定理より $\varphi_\lambda * f$ が $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級であることが従う. そして $\varphi_\lambda * f$ はコンパクト台をもつ. 実際, $L>0$ を大きくとり φ_λ の台が $[-L,L]$ に含まれるとし, $|x|>M+L$ となる x をとると, $|y|\le M$ ならば $|x-y|>L$ であり, よって $(\varphi_\lambda * f)(x) = \int_{-M}^{M} \varphi_\lambda(x-y)f(y)\,dy = 0$. □

リーマン・ルベーグの補題を示すために次を準備する:

補題 5.10. f を $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数とする. もし f も f' も $\mathbb{R}$ 上可積分ならば, 任意の $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$ に対し $(f')^\wedge(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$.

証明. $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ かつ $f' \in L^1(\mathbb{R})$ なので, $|x|\to\infty$ での $f(x)$ の極限が存在する. $f \in L^1(\mathbb{R})$ なので, この極限は 0 である. 等式

$$(f')^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-i\xi x}\,dx = \Big[f(x)e^{-i\xi x} \Big]_{x=-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$$

において, 右辺の第 1 項は 0 に等しく, 第 2 項は $i\xi\widehat{f}(\xi)$ に等しい. □

系 5.11 (リーマン・ルベーグの補題)**.** 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, $|\xi| \to \infty$ で $\widehat{f}(\xi) \to 0$.

証明. $f \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\varepsilon > 0$ をとる. 系 5.9 より, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ が存在して $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. 補題 5.10 より $|(g')^\wedge(\xi)| = |\xi\widehat{g}(\xi)|$ なので $|\widehat{g}(\xi)| \le |(g')^\wedge(\xi)|/|\xi| \le \|g'\|_1/|\xi|$. よって $|\xi|$ が大きければ $|\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon$ となり, $|\widehat{f}(\xi)| \le |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| < \|f - g\|_1 + \varepsilon < 2\varepsilon$. □

$\widehat{\mathbb{R}}$ 上の連続関数 φ のうち $|\xi| \to \infty$ で $\varphi(\xi)$ が 0 に収束するもの全体を $C_0(\widehat{\mathbb{R}})$ で表す. 系 5.11 より, フーリエ変換 $f \mapsto \widehat{f}$ は $L^1(\mathbb{R})$ から $C_0(\widehat{\mathbb{R}})$ への写像になる.

5.4.2 フェイエール核の応用

系 5.12. (1) $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $\lambda > 0$ に対し, $\sigma_\lambda(f) = K_\lambda * f$ とおく. フェイエール核 K_λ は有界な関数なので, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $(K_\lambda * f)(x)$ が定まることに注意する. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

であって, $\lambda \to \infty$ で $\sigma_\lambda(f)$ は f に L^1 収束する.

(2) フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\widehat{\mathbb{R}})$ は単射である.

証明. (1) 定理 5.8 (2) より $\sigma_\lambda(f)$ は f に L^1 収束する. また,

$$\sigma_\lambda(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x-y)f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)e^{i\xi(x-y)}\,d\xi\right)f(y)\,dy.$$

y で先に積分して (1) の等式を得る.

(2) $f \in L^1(\mathbb{R})$ は $\widehat{f} = 0$ を満たすとする. 任意の $\lambda > 0$ に対し $\sigma_\lambda(f) = 0$ であり, よって (1) より $f = 0$. □

系 5.13 (反転公式)**.** $f \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\widehat{f} \in L^1(\widehat{\mathbb{R}})$ と仮定する. このとき, ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し, 等式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

が成り立つ. 特に, 右辺は x について連続なので, f はある $\mathbb{R}$ 上の連続関数とほとんどすべての点で一致する.

証明. 系 5.12 (1) より, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\chi_{[-\lambda,\lambda]}(\xi)\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

右辺の被積分関数は $\lambda \to \infty$ で各点で $\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}$ に収束する. 被積分関数の絶対値は $|\widehat{f}(\xi)|$ 以下であって, これは $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分である. ルベーグ収束定理より, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma_\lambda(f)(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

一方, 定理 5.8 (2) より $\sigma_\lambda(f)$ は f に L^1 収束するので, $\mathbb{R}$ のほとんどすべての点 x に対し反転公式が成り立つ (定理 4.13 の証明の最後と同様, ファトゥの補題を使えばよい). □

$\mathbb{T}$ の場合, 系 5.13 に相当するのは, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{g}(n)|<\infty$ を満たすような $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 g はフーリエ級数展開できるという主張である．これは命題 2.4 で示した．そこでは, $g\in C^2(\mathbb{T})$ ならばこの仮定が満たされることも示した．対応して次が示せる:

命題 5.14. $f\in C^2(\mathbb{R})$ とし, f, f', f'' はいずれも $\mathbb{R}$ 上可積分とする (例えば f がコンパクト台をもつ $C^2(\mathbb{R})$ の元ならばこの仮定は満たされる)．このとき, $\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分である．よって系 5.13 より, f に対する反転公式が任意の $x\in\mathbb{R}$ で成り立つ．

実際, 補題 5.10 の証明のように部分積分をすると, 任意の $\xi\neq 0$ に対し $\widehat{f}(\xi)=(i\xi)^{-2}(f'')^\wedge(\xi)$. よって $|\widehat{f}(\xi)|\le|(f'')^\wedge(\xi)|/|\xi|^2\le\|f''\|_1/|\xi|^2$ となり, $\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分である ($\widehat{f}$ は連続なので, 原点の近くでの可積分性は問題ではない).

系 5.15 (フェイエール核のフーリエ変換)**.** 次の等式が成り立つ:

$$\widehat{K_\lambda}(\xi)=\chi_{[-\lambda,\lambda]}(\xi)\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right).$$

証明. 右辺を $\varphi_\lambda(\xi)$ とおく．関数 K_λ の定義は

$$K_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi_\lambda(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

であったことを思い出す．よって $K_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi_\lambda}(-x)$. これより $\widehat{\varphi_\lambda}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分であり, 系 5.13 より, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $\varphi_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\widehat{\varphi_\lambda}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$. x と ξ を入れ換えると,

$$\varphi_\lambda(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi_\lambda}(x)e^{i\xi x}\,dx=\int_{\mathbb{R}}K_\lambda(-x)e^{i\xi x}\,dx=\widehat{K_\lambda}(\xi).$$ □

系 5.16. $L^1(\mathbb{R})$ の元 g で $\widehat{g}$ がコンパクト台をもつようなもの全体は $L^1(\mathbb{R})$ で稠密である．

実際, 任意の $f\in L^1(\mathbb{R})$ は $K_\lambda * f$ により L^1 近似され, そのフーリエ変換 $(K_\lambda * f)^\wedge=\widehat{K_\lambda}\widehat{f}$ は, 系 5.15 より, コンパクト台をもつ．

注意 5.17. $L^1(\mathbb{R})$ の元 g で $\widehat{g}$ がコンパクト台をもつようなものはたくさんある一方, $L^1(\mathbb{R})$ の元 f で f も $\widehat{f}$ もコンパクト台をもつようなものは実は 0 のみである．これは次から従う:

命題 5.18. $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f がコンパクト台をもつならば, 積分 $\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\xi x}\,dx$ は任意の $\xi\in\mathbb{C}$ に対しても定義され, $\widehat{f}$ は $\mathbb{C}$ 上正則である．

実際, f が区間 $[-M,M]$ の外で 0 であれば, 任意の $\xi\in\mathbb{C}$ に対し積分 $\widehat{f}(\xi)=\int_{-M}^{M}f(x)e^{-i\xi x}\,dx$ が定まり, ルベーグ収束定理により ξ に関する微分が可能になる ($\xi\in\mathbb{C}$ のとき, $|e^{-i\xi x}|=e^{x\operatorname{Im}\xi}$ は $\xi\in\mathbb{R}$ の場合と違って大きくなり得ることに注意)．よって, もし $\widehat{f}$ が $\widehat{\mathbb{R}}$ 上の関数としてコンパクト台をもつならば, 正則関数の一致の定理より $\widehat{f}=0$. ゆえに $f=0$ である．

5.5　フーリエ変換の計算例

二つの例を紹介する．これらはある偏微分方程式を解く際に重要になるのだが, それについては第 8 講で触れる．ここではフーリエ変換を単に計算して終わりにする．

例 5.19. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = e^{-|x|}$ に対し $\widehat{f}$ を計算する:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-i\xi x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x-i\xi x}\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{x-i\xi x}\,dx \\ &= \left[-\frac{e^{-x-i\xi x}}{1+i\xi}\right]_{x=0}^{\infty} + \left[\frac{e^{x-i\xi x}}{1-i\xi}\right]_{x=-\infty}^{0} = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

$\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分なので, 反転公式 5.13 より, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{i\xi x}}{1+\xi^2}\,d\xi.$$

よって, $\mathbb{R}$ 上の関数 P を

$$P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

で定義すると $\widehat{P}(\xi) = e^{-|\xi|}$ である. P を $\mathbb{R}$ 上の**ポアソン核**という.

1.5 節で $\mathbb{T}$ 上のポアソン核 P_r $(0 \le r < 1)$ を $P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}$ で定義した. $\widehat{P_r}(n) = r^{|n|}$ なので $\widehat{P}(n) = \widehat{P_{e^{-1}}}(n)$ となり, $\widehat{P}$ と $\widehat{P_{e^{-1}}}$ のグラフの形は似ている. これが P をポアソン核とよぶ理由の一つである.

例 5.20. $\mathbb{R}$ 上の関数 G を

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

で定め, これを $\mathbb{R}$ 上の**ガウス核**という. $\widehat{G}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ である. フーリエ変換が定数倍を除いて同じ関数になるという性質が, ガウス核の特徴である.

証明. 微分方程式に持ち込む. $\widehat{G}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-i\xi x}\,dx$ であって,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\widehat{G}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}(-ix)e^{-i\xi x}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[ie^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\right]_{x=-\infty}^{\infty} - i\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}(-i\xi)e^{-i\xi x}\,dx\right) \\ &= -\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,dx = -\xi\widehat{G}(\xi).\end{aligned}$$

一方 $(e^{-\xi^2/2})' = -\xi e^{-\xi^2/2}$ であり, これより $(\widehat{G}(\xi)/e^{-\xi^2/2})' = 0$ が従う. よって $\widehat{G}(\xi)/e^{-\xi^2/2}$ は定数である. ところで, $\widehat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} G(x)\,dx = 1$ が成り立つ. これは, 等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

において, 右辺を極座標に変数変換することで示せる. ゆえに $\widehat{G}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$. □

注意 5.21. 命題 5.14 と同様にして, 次を示すことができる: 非負整数 k と $f \in C^k(\mathbb{R})$ に対し, $f, f', \ldots, f^{(k)}$ のいずれもが $\mathbb{R}$ 上可積分ならば, $|\xi| \to \infty$ で $\widehat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$ である. よって $\mathbb{T}$ の場合 (注意 4.2) と同様, f が滑らかであればあるほど $\widehat{f}$ の無限遠での減衰のスピードは速くなる.

このことは上の二つの例からも見て取れる. 実際, 関数 $f(x)=e^{-|x|}$ は原点で特異であり, そのせいで $\widehat{f}(\xi)$ は $|\xi|^{-2}$ 程度のスピードで減衰する一方, ガウス核 G は $\mathbb{R}$ 上滑らかであり, $\widehat{G}(\xi)$ はどんな $k\in\mathbb{N}$ に対しても $|\xi|^{-k}$ よりも速く減衰する.

反転公式 5.13 の後半の主張からは次が窺える: f の不連続な点の存在は $\widehat{f}$ が $\mathbb{R}$ 上可積分でなくなるほどの減衰の遅さをもたらす. 例えば, 定義関数 $\chi_{[-1,1]}$ のフーリエ変換は $2\xi^{-1}\sin\xi$ となり, これは $\mathbb{R}$ 上可積分でないが, その理由は $\chi_{[-1,1]}$ が連続でないことにあるといえる.

逆に, f の無限遠での減衰のスピードが速ければ速いほど $\widehat{f}$ は滑らかになっていく. 実際, $f\in L^1(\mathbb{R})$ と非負整数 k に対し, 関数 $x^k f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上可積分ならば, $\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上 C^k 級になる (確かめよ). そして, 命題 5.18 が示すように, f がコンパクト台をもてば, この場合は無限遠での減衰が最たる状況であり, その結果, 正則性という C^∞ 級であることよりも強い性質が $\widehat{f}$ にもたらされる.

演習問題

[1] 任意の $\lambda>0$ と $x\in\mathbb{R}$ に対し, $\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda D_\eta(x)\,d\eta=K_\lambda(x)$ を示せ.

[2] $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f が $x=0$ で連続ならば, $\lambda\to\infty$ で $\sigma_\lambda(f)(0)\to f(0)$ であることを示せ (定理 2.1 の類似).

[3] $f\in L^1(\mathbb{R})$, $k\in\mathbb{N}$ とし, 関数 $\xi^k\widehat{f}(\xi)$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分とする. このとき, f はある $\mathbb{R}$ 上の C^k 級関数とほとんどすべての点で一致することを示せ.

[4] 任意の $f\in L^1(\mathbb{R})$ と $\lambda>0$ に対し, $K_\lambda * f\in C^\infty(\mathbb{R})$ を示せ.

[5] $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核 $K=K_1$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 L_n を $L_n(x)=K(x)e^{2inx}$ で定める. $f\in L^1(\mathbb{R})$ が, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し $L_n * f=0$ を満たすならば, $f=0$ であることを示せ.

[6] (k_λ) を $\mathbb{R}$ 上の総和核とする. 任意の $M>0$ に対し, $\widehat{k}_\lambda$ は $\lambda\to\infty$ で $[-M,M]$ 上 1 に一様収束することを示せ.

[7] 留数計算により, ポアソン核 P とガウス核 G のフーリエ変換を求めよ.

[8] (i) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)=e^{-|x|}$ に対し, $f*f$ を求めよ.

(ii) $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x)=1/(1+x^2)^2$ のフーリエ変換を求めよ.

[9] $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$, $[c,d]$ に対し, $\chi_{[a,b]}*\chi_{[c,d]}$ を求めよ.

[10] $\mathbb{R}$ 上の関数 $\chi_{[a,b]}$ のフーリエ変換を求めよ. また, $f\in L^1(\mathbb{R})$ としたとき, f が $\chi_{[a,b]}$ の形の関数の線型和で L^1-近似できることを用いて, $|\xi|\to\infty$ で $\widehat{f}(\xi)\to 0$ となることを示せ.

[11] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数 f のフーリエ変換を求めよ:

(i) $f(x)=e^{-x^2-2x}$.

(ii) $f(x)=x^3e^{-x^2/2}\sin x$.

(iii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(1+x^2)}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$.

[12] $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とする. $f \in L^1(\mathbb{R})$ で, 任意の $\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$ に対し

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(\xi-\alpha_1)\cdots(\xi-\alpha_m)}$$

となるものが存在し, それは $\mathbb{R}$ 上の関数 $x^k e^{-\alpha x} H(x)$, $|x|^k e^{-\alpha|x|} H(-x)$ (k は非負整数, α は実部が正の複素数) の線型結合になることを示せ. ここで, $H(x)$ は $x \geq 0$ のとき $H(x) = 1$ とし, $x < 0$ のとき $H(x) = 0$ として定まる関数である.

[13] $x \in \mathbb{R}$ に対し, 次の積分の値を求めよ:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{(1+i\xi)^2}\,d\xi, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{|1+i\xi|^2}\,d\xi.$$

[14] (i) $\mathbb{R}$ 上の関数 f を $x \geq 0$ のとき $f(x) = e^{-x}$ とし, $x < 0$ のとき $f(x) = 0$ として定める. $k \in \mathbb{N}$ に対し $g(x) = x^k f(x)$ とおく. 関数 $|\xi|^{k+1}\widehat{g}(\xi)$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上有界であることを示せ.

(ii) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = e^{-|x|}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し, $g(x) = x^k f(x)$ とおく. 関数 $|\xi|^{k+2}\widehat{g}(\xi)$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上有界であることを示せ.

[15] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = e^{-|x|}/(1+x^2)$ を考える. 任意の $p \in [1,\infty]$ に対し, $\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ であることを示せ.

[16] $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し, $(f*g)(x)$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して定まり, 関数 $f*g$ は $\mathbb{R}$ 上連続かつ有界であることを示せ.

[17] $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対し, $f \in L^1(\mathbb{R})$ ならば $f \in L^2(\mathbb{R})$ か?

[18] $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ とする. f または g が $\mathbb{R}$ 上有界ならば, $f*g$ は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ. そうでなければ, $f*g$ は $\mathbb{R}$ 上連続とは限らないことを示せ.

[19] $\mathbb{R}$ 上のガウス核 G に対し, $G_1 = G$, $G_n = G * G_{n-1}$ により, 関数 G_n を定める.

(i) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対し $G_n(x)$ を求め, さらに $\|G_n\|_1$ を求めよ.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|G_n\|_2 = 0$ を示せ.

[20] $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする. f に G を n 回たたみ込んだ関数 $G^{*n} * f$ は $n \to \infty$ で $\mathbb{R}$ 上一様に 0 に収束することを示せ.

[21] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = |x|e^{-x^2/2}$ を考える.

(i) 関数 $g(x) = f(x) + e^{-|x|}$ は $x = 0$ で何回まで微分可能か?

(ii) $\widehat{\mathbb{R}}$ 上の関数 $\xi^2\widehat{f}(\xi)$ は有界であることを示せ.

(iii) $\widehat{\mathbb{R}}$ 上の関数 $\xi\widehat{f}(\xi)$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分でないことを示せ.

[22] (i) $\mathbb{R}$ 上の関数 f を $x > 0$ のとき $f(x) = x^{-1/2}$ とし, $x \leq 0$ のとき $f(x) = 0$ として定める. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し, $(f * f)(x)$ を求めよ.

(ii) $\widehat{\mathbb{R}}$ 上の関数 g を $g(\xi) = 1/(1 + i\xi)^{1/2}$ で定める. ただし, $(1 + i\xi)^{1/2}$ は偏角が $-\pi/4$ から $\pi/4$ の間にあるものをとる. $h \in L^1(\mathbb{R})$ で $\widehat{h} = g$ となるものを求めよ.

[23] 注意 4.4 に倣って, 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, 積分 $\int_{1<|\xi|<M} \widehat{f}(\xi)/\xi \, d\xi$ は $M > 1$ に関して有界であることを示せ. また, 例 4.5 に倣って, フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\widehat{\mathbb{R}})$ の像に入らない $C_0(\widehat{\mathbb{R}})$ の元を構成せよ.

[24] 4.3 節に倣って, フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\widehat{\mathbb{R}})$ の像に入る元について考察せよ. 例えば次の主張はどうか?

g を $[0, \infty)$ 上の連続な非負値単調減少関数とし, $(0, \infty)$ 上で g は C^2 級であって $g'' \geq 0$ とする. さらに $\lim_{\xi\to\infty} g(\xi) = 0$ とし, $\lim_{\xi\to 0} g'(\xi)$ が有限値で存在するとする. g を $\mathbb{R}$ 上の偶関数に拡張し, それも g とかく. このとき, $f \in L^1(\mathbb{R})$ が存在して $\widehat{f} = g$.

ノート

フェイエール核を用いた反転公式の導出は [Kat, VI.1] に従った. $\mathbb{T}$ の場合との比較を意識したつもりだが, 一般的には第 7 講の話の流れでガウス核を使って導出する文献が多いと思う.

第6講　$\mathbb{T}$ 上のフーリエ変換との関連

これまでも $\mathbb{T}$ の場合との類似性をいくつか指摘してきたが, 単なる類似ではない関連性を二つ紹介する.

6.1　各点収束と局所性原理

5.1 節で指摘したように, $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $\lambda > 0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数

$$S_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

は $\mathbb{T}$ の場合のフーリエ部分和に相当する. 本節では, 次の各点収束の問題を考える: どんな可積分関数 f と点 x に対し $\lambda \to \infty$ で $S_\lambda(f)(x) \to f(x)$ となるか? 結論から言うと, 実はこの問題は $\mathbb{T}$ におけるフーリエ部分和の各点収束の問題に帰着する. 三つの補題を示した後, これを述べる. リーマン・ルベーグの補題がその本質である.

補題 6.1. $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする. $\varphi = f|_{[-\pi,\pi]}$ とおき, これを $L^1(\mathbb{T})$ の元と見なす. このとき, $N \to \infty$ で $S_N(f)(0) - S_N(\varphi)(0) \to 0$.

証明. フビニの定理を使って,

$$\begin{aligned} S_N(f)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\widehat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\,dx\right)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{-N}^{N} e^{-i\xi x}\,d\xi\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{2\sin Nx}{x}\,dx. \end{aligned}$$

また,

$$S_N(\varphi)(0) = (D_N * \varphi)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(-s)\varphi(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}\,dx.$$

よって,

$$\begin{aligned} &S_N(f)(0) - S_N(\varphi)(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\le\pi} f(x)\left(\frac{\sin Nx}{x/2} - \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_{|x|>\pi}\frac{f(x)}{x}\sin Nx\,dx. \end{aligned}$$

リーマン・ルベーグの補題 5.11 より, 右辺第 2 項は $N \to \infty$ で 0 に収束する. そして,

$$\text{右辺第 1 項} = \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \le \pi} f(x) \underbrace{\left(\frac{1}{x/2} - \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} \right)}_{\text{区間 } [-\pi, \pi] \text{ 上で有界}} \sin Nx \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \le \pi} f(x) \cos Nx \, dx.$$

この右辺のどちらの項もまた, リーマン・ルベーグの補題 1.13 より 0 に収束する. □

補題 6.2. $f \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\varepsilon > 0$ とする. 十分大きいすべての $N \in \mathbb{N}$ とすべての $\lambda \in [N, N+1)$ に対し, $|S_N(f)(0) - S_\lambda(f)(0)| < \varepsilon$.

証明. リーマン・ルベーグの補題 5.11 より, $|\xi|$ が十分大きければ $|\widehat{f}(\xi)| < \varepsilon/2$. よって, 十分大きいすべての $N \in \mathbb{N}$ とすべての $\lambda \in [N, N+1)$ に対し,

$$|S_N(f)(0) - S_\lambda(f)(0)| \le \int_{-\lambda}^{-N} + \int_N^\lambda |\widehat{f}(\xi)| \, d\xi < \varepsilon.$$ □

補題 6.3. $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し $F(x) = f(x_0 + x)$ とすると, $S_\lambda(F)(0) = S_\lambda(f)(x_0)$.

証明. 定義より

$$\widehat{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + x) e^{-i\xi x} \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\xi y} e^{i\xi x_0} \, dy = e^{i\xi x_0} \widehat{f}(\xi)$$

なので,

$$S_\lambda(F)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{F}(\xi) \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\xi x_0} \widehat{f}(\xi) \, d\xi = S_\lambda(f)(x_0).$$ □

以上三つの補題から次が従う:

定理 6.4. $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し, 区間 $(-\pi, \pi]$ 上の関数 φ を $\varphi(t) = f(x_0 + t)$ で定め, $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ と見なす. 二つの極限

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(f)(x_0), \qquad \lim_{N \to \infty} S_N(\varphi)(0)$$

を考える. このとき, 一方の極限が存在すれば, もう一方の極限も存在し, その値は一致する. よって $S_\lambda(f)(x_0)$ が $\lambda \to \infty$ で収束するか否かは, f を区間 $(x_0 - \pi, x_0 + \pi]$ に制限した関数のフーリエ部分和が $t = 0$ で収束するか否かによる. さらに $\mathbb{T}$ の場合の局所性原理 2.15 により, このことは f の x_0 の近傍での振る舞いにしかよらない.

例 6.5. f を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とする. 定理 6.4 より次が従う:

(1) f が点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で左右極限をもち, さらに左右微分をもつならば, $\lambda \to \infty$ で

$$S_\lambda(f)(x_0) \to \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

実際 $\mathbb{T}$ の場合, ディニのテストの系 2.9 (2) がこの主張に相当する. 特に f が x_0 で微分可能ならば, $S_\lambda(f)(x_0) \to f(x_0)$.

(2) $\mathbb{R}$ 上連続な f で $\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(f)(0)$ が存在しないものを作ることができる (A.2 節でそういう例を $\mathbb{T}$ 上で作った).

もし $\mathbb{R}$ 上の連続関数で f とほとんどすべての点で一致するものが存在しなければ, $\widehat{f}$ は $\widehat{\mathbb{R}}$ 上可積分でない (系 5.13). よって, そのような f に対しては積分 $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$ は定義されない. しかし (1) で示したように, 積分 $S_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$ の $\lambda\to\infty$ での極限は存在しうる.

$\mathbb{T}$ の場合で考察したように, 区間上での $S_\lambda(f)$ の一様収束性についても局所性原理が成り立つ. 同じことなので詳細は述べずに終わりにする.

6.2 関数の周期化とポアソンの和公式

f を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とする. $\widehat{f}$ の $\mathbb{Z}$ での値に注目する. 数列 $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ をフーリエ係数にもつ $\mathbb{T}$ 上の可積分関数は存在するだろうか? 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-inx}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x+2\pi k)e^{-inx}\,dx \tag{6.1}$$

であることを踏まえると, $\mathbb{T}$ 上の関数 F を

$$F(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi k)$$

で定めると $\widehat{f}(n) = 2\pi\widehat{F}(n)$ となりそうである. $\int_{\mathbb{T}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(t+2\pi k)|\,dt = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx < \infty$ なので, F を定義する級数は, ほとんどすべての $t\in\mathbb{T}$ で収束し, さらに L^1 収束する. 特に F は $\mathbb{T}$ 上可積分である. この F を f の**周期化**という. 等式 (6.1) より, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し $\widehat{f}(n) = 2\pi\widehat{F}(n)$ が成り立つ.

命題 6.6. f を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とし, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)| < \infty$ とする. そして, 任意の $t\in\mathbb{T}$ に対し級数 $F(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi k)$ は収束し, 関数 F は $\mathbb{T}$ 上連続とする. このとき, 任意の $t\in\mathbb{T}$ に対し次の等式が成り立つ:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int} = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi k).$$

実際, 両辺は t について連続であり, 等しいフーリエ係数をもつので, 示すべき等式が従う. この等式で t に 0 を代入すると,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2\pi k).$$

これを**ポアソンの和公式**という.

例 6.7. $\mathbb{R}$ 上のポアソン核 $P(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ を考える. $s>0$ に対し

$$P_s(x) = s^{-1}P(s^{-1}x) = \frac{1}{\pi}\frac{s}{s^2+x^2}$$

とおく. $\widehat{P}(\xi) = e^{-|\xi|}$ だったので,

$$\widehat{P_s}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} P_s(x) e^{-i\xi x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} P(y) e^{-i\xi s y}\,dy = e^{-s|\xi|}.$$

ポアソンの和公式より $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{P_s}(n) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_s(2\pi k)$, つまり

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-s|n|} = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{s}{s^2+4\pi^2k^2}.$$

この等式を使うと, 自然数 m に対し $\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2m}$ の値が求められる. 上の等式の両辺を計算する. 右辺の計算では $0 < s < 2\pi$ とする:

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} = 1 + \frac{2e^{-s}}{1-e^{-s}} = 1 + \frac{2}{e^s-1}.\\
\text{右辺} &= \frac{2}{s} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{k^2}\frac{1}{1+(\frac{s}{2\pi k})^2} = \frac{2}{s} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s}{k^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\left(\frac{s}{2\pi k}\right)^{2m-2}\\
&= \frac{2}{s} + 4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}} s^{2m-1}.
\end{aligned}$$

整理して, 次の等式を得る:

$$\frac{s}{e^s-1} = 1 - \frac{s}{2} + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}} s^{2m}.$$

ゆえに, 関数 $s/(e^s-1)$ のテイラー展開を求めれば $\zeta(2m)$ の値がわかる.

関数の周期化というプロセスを経ることにより, 今まで紹介した $\mathbb{T}$ 上の核関数と $\mathbb{R}$ 上の核関数を関連付けることができる.

例 6.8. フェイエール核を考える. 区別するため, $\mathbb{T}$ 上のフェイエール核を $K_N^{\mathbb{T}}$ とかき, $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核を $K_\lambda^{\mathbb{R}}$ とかく. どちらも, そのフーリエ変換のグラフが原点を頂点とする山型になるように定義した. つまり, 非負整数 N と $\lambda > 0$ に対し,

$$\widehat{K_N^{\mathbb{T}}}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1} & |n| \le N \text{ のとき},\\ 0 & |n| > N \text{ のとき}, \end{cases} \qquad \widehat{K_\lambda^{\mathbb{R}}}(\xi) = \chi_{[-\lambda,\lambda]}(\xi)\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)$$

となるように $K_N^{\mathbb{T}}$ と $K_\lambda^{\mathbb{R}}$ を定義した. N をとめると, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{K_{N+1}^{\mathbb{R}}}(n) = \widehat{K_N^{\mathbb{T}}}(n)$. よって, $K_{N+1}^{\mathbb{R}}$ の周期化の 2π 倍は $K_N^{\mathbb{T}}$ に等しい:

$$K_N^{\mathbb{T}}(t) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_{N+1}^{\mathbb{R}}(t+2\pi k).$$

右辺は任意の $t \in \mathbb{T}$ で収束し, 両辺は t について連続になるので, この等式は任意の $t \in \mathbb{T}$ で成り立つ. そして, フェイエール核の表示式

$$K_N^{\mathbb{T}}(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)t/2}{\sin(t/2)}\right)^2, \quad K_\lambda^{\mathbb{R}}(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\sin(\lambda x/2)}{\lambda x/2}\right)^2.$$

から次の等式が得られる: 任意の $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ と $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ に対し,

$$\frac{1}{\sin^2(t/2)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4}{(t+2\pi k)^2} \quad \text{あるいは} \quad \frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+\pi k)^2}.$$

例 6.9. ディリクレ核を考える. $\mathbb{T}$ 上のディリクレ核を $D_N^{\mathbb{T}}$ とかき, $\mathbb{R}$ 上のディリクレ核を $D_\lambda^{\mathbb{R}}$ とかく. $D_\lambda^{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上可積分でないので, 前の例のように話を進めることはできない. しかし, $D_\lambda^{\mathbb{R}}$ の周期化は直接求められる: 任意の非負整数 M に対し,

$$\sum_{k=-M}^{M} D_\lambda^{\mathbb{R}}(x+2\pi k) = \sum_{k=-M}^{M} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\xi(x+2\pi k)}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\xi x} D_M^{\mathbb{T}}(2\pi\xi)\,d\xi. \tag{6.2}$$

$\lambda > 0$ は整数でないとする. λ より小さい最大の非負整数を N とかく. (6.2) の右辺の積分区間を $[n-1/2, n+1/2]$ (n は $|n| \le N-1$ となる整数), $[N-1/2, \lambda]$, $[-\lambda, -N+1/2]$ に分ける. それぞれの積分は $\mathbb{T}$ 上のある関数のフーリエ部分和に対する 0 での値と見なすことができ, $M \to \infty$ で収束する. 実際, $|n| \le N-1$ のとき,

$$\int_{n-1/2}^{n+1/2} e^{i\xi x} D_M^{\mathbb{T}}(2\pi\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi(n-1/2)}^{2\pi(n+1/2)} e^{i(2\pi)^{-1}xt} D_M^{\mathbb{T}}(t)\,dt \to e^{inx}$$

であり, 同様に区間 $[N-1/2, \lambda]$, $[-\lambda, -N+1/2]$ 上の積分はそれぞれ e^{iNx}, e^{-iNx} に収束する. 収束はディニのテストの系 2.9 (1) から従う. ゆえに, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$2\pi \lim_{M\to\infty} \sum_{k=-M}^{M} D_\lambda^{\mathbb{R}}(x+2\pi k) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = D_N^{\mathbb{T}}(x).$$

次に λ は整数であるとし, $N = \lambda$ とおく. (6.2) の右辺の積分区間を同様に分ける. $|n| \le N-1$ に対する区間 $[n-1/2, n+1/2]$ 上の積分については同様である. 一方, 区間 $[N-1/2, N]$ 上の積分については, ディニのテストの系 2.9 (2) より

$$\int_{N-1/2}^{N} e^{i\xi x} D_M^{\mathbb{T}}(2\pi\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi(N-1/2)}^{2\pi N} e^{i(2\pi)^{-1}xt} D_M^{\mathbb{T}}(t)\,dt \to \frac{e^{iNx}}{2}.$$

区間 $[-N, -N+1/2]$ についても同様である. ゆえに, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$2\pi \lim_{M\to\infty} \sum_{k=-M}^{M} D_N^{\mathbb{R}}(x+2\pi k) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} e^{inx} + \frac{e^{iNx}+e^{-iNx}}{2} = \frac{D_{N-1}^{\mathbb{T}}(x) + D_N^{\mathbb{T}}(x)}{2}.$$

以上で $D_\lambda^{\mathbb{R}}$ の周期化が求められた. ちなみに, 最後の等式と $D_N^{\mathbb{R}}$, $D_N^{\mathbb{T}}$ の三角関数による表示式を組み合わせれば, 例 2.6 で得た等式 (2.2) が得られる.

演習問題

[1] D_λ を $\mathbb{R}$ 上のディリクレ核とする. 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $(D_\lambda * f)(x)$ が定まり, これが $S_\lambda(f)(x)$ に等しいことを示せ.

[2] $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ とし, K_λ を $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核とする. もし $\lambda \to \infty$ で $S_\lambda(f)(x)$ が有限値 α に収束するならば, $(K_\lambda * f)(x)$ も α に収束することを示せ.

[3] $K = K_1$ を $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核とする. $\lambda > 0$ に対し $S_\lambda(K)$ を計算せよ. また, $0 < \lambda < 1$ のとき $S_\lambda(K)$ は $\mathbb{R}$ 上可積分でなく, $\lambda \geq 1$ のとき $S_\lambda(K) = K$ であることを示せ.

[4] $\mathbb{R}$ 上の関数 f を $x \geq 0$ のとき $f(x) = e^{-x}$ とし, $x < 0$ のとき $f(x) = 0$ として定める. 例 6.5 (1) より, $\lambda \to \infty$ での $S_\lambda(f)(x)$ の極限は $x \neq 0$ のとき $f(x)$ で, $x = 0$ のとき $1/2$ となる. これは留数計算でも確かめることができる. 確かめよ.

[5] $x \in \mathbb{R}$ に対し, 次の極限を求めよ:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\sin\xi}{\xi} e^{i\xi x}\, d\xi, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\sin^2\xi}{\xi} e^{i\xi x}\, d\xi.$$

[6] $0 < \alpha < 1$ とする.

(i) $\xi > 0$ とする. 留数計算により, 次の等式を示せ:

$$\lim_{R\to\infty,\, \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-i\xi x}}{x^\alpha}\, dx = \frac{-ie^{\pi\alpha i/2}}{\xi^{1-\alpha}} \Gamma(1-\alpha).$$

ここで, 極限は $0 < \varepsilon < R$ の下でとる. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt$ (x は正の実数) はガンマ関数である.

(ii) $\xi \in \mathbb{R}$ に対し, 次の極限を求めよ:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{-i\xi x}}{|x|^\alpha}\, dx.$$

[7] $\mathbb{T}$ 上のポアソン核と $\mathbb{R}$ 上のポアソン核を比較せよ.

[8] $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f は C^∞ 級であって, 台は $[0, 2\pi]$ に含まれるとする. 有限個の $n \in \mathbb{Z}$ を除いて $\widehat{f}(n) = 0$ ならば, $f = 0$ であることを示せ.

ノート

例 6.7, 6.8, 6.9 は [SS1, 第 5 章, 練習 19, 14, 16] や [Pin, 4.2.1] にある. 連続な $f \in L^1(\mathbb{R})$ でポアソンの和公式が成り立たないような例が [Kat, VI.1, Exercise 15] にある. $\mathbb{R}$ 上のガウス核の周期化は 8.2.4 節で与える熱核 (の定数倍) になる.

第7講　シュワルツ急減少関数

$\mathbb{R}^d$ 上の可積分関数 f に対し, そのフーリエ変換 $\widehat{f}$ (または $f^\wedge$) を

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

で定義する. ここで $\xi\cdot x$ は $\mathbb{R}^d$ のベクトル ξ, x の標準的な内積である. つまり $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_d)$, $x = (x_1,\ldots,x_d)$ と座標表示したとき,

$$\xi\cdot x = \xi_1x_1 + \cdots + \xi_dx_d$$

である. もし f が d 個の一変数関数 $f_1,\ldots,f_d$ を用いて $f(x) = f_1(x_1)\cdots f_d(x_d)$ とかけるならば, そのフーリエ変換は $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi_1)\cdots\widehat{f}_d(\xi_d)$ とかける. そして一般の f はこのような形の関数の線型和で近似される. このため $d=1$ の場合に示した主張の多くが, 一般の d に対しても並行して示される.

本講ではシュワルツ急減少関数を導入する. この関数のクラスはフーリエ変換の下で保存されるなど非常によい振る舞いをする. この振る舞いのよさは, 第 III 部で紹介する超関数の理論でも重要になる.

記号について一つ注意しておく. 前講までは $\widehat{f}$ の定義域をハットを付けて記していたが, 今後 $\widehat{\mathbb{R}^d}$ とはかかずに単に $\mathbb{R}^d$ とかく. 今後の内容から判断するに f と $\widehat{f}$ の定義域をわざわざ違う記号を使って区別する必要はなく, 混乱する恐れもないと思われる (このように区別しておくと, $\mathbb{T}$ 上のフーリエ変換と $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換を比較しやすい). ただし, f の定義域の元を x で表し, $\widehat{f}$ の定義域の元を ξ で表すことが多いのは今後も変わらない.

7.1　導入

f を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とする. 注意 5.21 で指摘したように, 一般に f が滑らかであればあるほど, $\widehat{f}$ の無限遠での減衰は速くなる. 逆に, f の無限遠での減衰が速ければ速いほど, $\widehat{f}$ は滑らかになる. よって, 導関数も含め, 滑らさと無限遠での減衰の速さを兼ね備えた関数を考えると, そのフーリエ変換もまた同じ性質をもつ. このような関数がシュワルツ急減少関数である.

$\mathbb{R}^d$ の場合を考えたいので記号を準備する. $\mathbb{R}^d$ の元 $x = (x_1,\ldots,x_d)$ に対し, そのユークリッドノルムを $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ で表す. d 個の非負整数からなる順序付きの組を**多重指数**とよぶ. 多重指数 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ に対し $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ と表し, 単項式 x^α と偏微分作用素 ∂^α を

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}, \qquad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}$$

で定義する. x による微分であることを明示したいときは, ∂^α のことを ∂_x^α とかく. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対し, そのノルムを

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx$$

とかく. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対し, たたみ込み $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ が定まり, 不等式 $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ と等式 $(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ が成り立つ. 証明は $d = 1$ のときと同様である.

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 f が**急減少**であるとは, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $|x| \to \infty$ で $f(x) = o(|x|^{-k})$, つまり $|x| \to \infty$ で $|x|^k f(x) \to 0$ となるときをいう. $\mathbb{R}^d$ 上の**シュワルツ急減少関数**とは, $\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 級関数 f で任意の多重指数 α に対し $\partial^\alpha f$ が急減少になるようなものを意味する. $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で $\mathbb{R}^d$ 上のシュワルツ急減少関数の集合を表す. 次の命題は定義からすぐに従う:

命題 7.1. (1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$.

(2) 任意の $f \in \mathcal{S}$ と多重指数 α に対し $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}$.

(3) p を多項式 (つまり, 複素係数単項式の有限和) とすると, 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対し $pf \in \mathcal{S}$.

命題 7.2. 任意の $f \in \mathcal{S}$ と多重指数 α に対し, $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

証明. $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ に対してのみ示せば十分だろう.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) e^{-i\xi_1 x_1}\, dx_1\right) e^{-i(\xi_2 x_2 + \cdots + \xi_d x_d)}\, dx_2 \cdots dx_d$$

右辺の括弧内の積分は, f が無限遠で消えることを踏まえ部分積分すると, $i\xi_1 \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi_1 x_1}\, dx_1$ に等しいことがわかる. ゆえに, 上の右辺は $i\xi_1 \widehat{f}(\xi)$ に等しい. □

命題 7.3. 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対し, $\widehat{f}$ は $\mathbb{R}^d$ 上 C^∞ 級であって, 任意の多重指数 α に対し等式 $(x^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|}(\partial^\alpha \widehat{f})(\xi)$ が成り立つ. ここで, $x^\alpha f$ は $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $x \mapsto x^\alpha f(x)$ を表す.

証明. これもまた $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ に対してのみ示せば十分だろう. $\widehat{f}$ が ξ_1 で偏微分可能なことを見る. $\xi \in \mathbb{R}^d$ と $h \neq 0$ に対し,

$$\frac{\widehat{f}(\xi + (h, 0, \ldots, 0)) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \frac{e^{-ihx_1} - 1}{h}\, dx$$

である. また, $|(e^{-ihx_1} - 1)/h| \leq |x_1|$ である. 実際, これは

$$e^{-ihx_1} - 1 = e^{-ihx_1/2}(e^{-ihx_1/2} - e^{ihx_1/2}) = -2ie^{-ihx_1/2}\sin(hx_1/2)$$

より従う. $f \in \mathcal{S}$ より, 関数 $x_1 f$ は $\mathbb{R}^d$ 上可積分である. ルベーグ収束定理より, はじめの等式の右辺は $h \to 0$ で

$$-i\int_{\mathbb{R}^d} x_1 f(x) e^{-i\xi \cdot x}\, dx = -i(x_1 f)^\wedge(\xi)$$

に収束する. ゆえに $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) = -i(x_1 f)^\wedge(\xi)$. □

命題 7.4. 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対し $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

証明. $f \in \mathcal{S}$ とする. 命題 7.3 より $\widehat{f}$ は $\mathbb{R}^d$ 上 C^∞ 級である. 多重指数 α に対し, 命題 7.2 より $|\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)| = |(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)| \le \|\partial^\alpha f\|_1$. よって, 関数 $\xi^\alpha \widehat{f}$ は $\mathbb{R}^d$ 上有界である. これがすべての α に対して成り立つので, $\widehat{f}$ は急減少である. $(x^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|}(\partial^\alpha \widehat{f})(\xi)$ であって, 今示したことから左辺は急減少なので, 右辺もそうである. □

$\mathcal{F}$ でフーリエ変換 $f \mapsto \widehat{f}$ を表す. 命題 7.2–7.4 により, 次の二つの図式が可換になる:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\partial_x^\alpha"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "i^{|\alpha|}\xi^\alpha \text{をかける}"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "x^\alpha \text{をかける}"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}
$$

つまり, 偏微分と多項式のかけ算という二つの操作が $\mathcal{F}$ の下で映り合う. この事実は後で偏微分方程式を解く際に重要になる.

例 7.5 (ガウス核)**.** $\mathbb{R}^d$ 上の関数 G を

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/2}$$

で定め, これを $\mathbb{R}^d$ 上の**ガウス核**という. $G \in \mathcal{S}$ であって $\widehat{G}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ である. 実際, 任意の多重指数 α に対し $\partial^\alpha G = (\text{多項式}) \times G$ であり, これは急減少である. よって $G \in \mathcal{S}$. そして $d = 1$ のときの結果を用いると,

$$\widehat{G}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/2} e^{-i\xi_j x_j}\, dx_j = \prod_{j=1}^{d} e^{-\xi_j^2/2} = e^{-|\xi|^2/2}.$$

7.2 反転公式

5.4 節で $\mathbb{R}$ 上の総和核を定義した. $\mathbb{R}^d$ 上の総和核も同様に定義され, 定理 5.8 で示したような, 総和核のたたみ込みによる近似が得られる. 証明も同様である. その結果, $1 \le p < \infty$ のとき, 系 5.9 と同様にして, 任意の $L^p(\mathbb{R}^d)$ の元を $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元で L^p 近似できる. 特に $\mathcal{S}$ は $L^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密である.

命題 7.6 (リーマン・ルベーグの補題)**.** 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\widehat{f}$ は $\mathbb{R}^d$ 上連続で無限遠で 0 に収束する.

証明. $\widehat{f}$ の連続性はルベーグ収束定理より従う (より強く, $\mathbb{R}^d$ 上一様連続であることも従う). f を $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元 g で L^1 近似する. $g \in \mathcal{S}$ より $\widehat{g} \in \mathcal{S}$ となり, よって $\widehat{g}$ は無限遠で 0 に収束する. $\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty \le \|f - g\|_1$ より, $\widehat{f}$ もまた無限遠で 0 に近い値しかとらない. □

定理 7.7 (反転公式)**.** $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ とし, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ と仮定する. このとき, ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対し, 等式

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi$$

が成り立つ．特に，右辺は x について連続なので，f は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数とほとんどすべての点で一致する．そして，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対し，次の等式が成り立つ:

$$(\mathcal{F}^2 f)(x) = (\mathcal{F}\widehat{f})(x) = (2\pi)^d f(-x).$$

証明．$d = 1$ のときの証明 (系 5.13) ではフェイエール核を使ったが，フェイエール核のどんな性質が本質的だったのかを反省してみる．実は，次のような関数が用意できれば $d = 1$ のときの証明がそのまま通用する．$\mathbb{R}^d$ 上の有界な可積分関数 κ で次を満たすものをとる:

- κ は原点で連続で $\kappa(0) = 1$.
- $\mathbb{R}^d$ 上の関数 k を $k(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \kappa(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi$ で定義すると，k は $\mathbb{R}^d$ 上可積分であって $\widehat{k}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x)\,dx = 1$.

関数 k は反転公式を見越して $\widehat{k} = \kappa$ となるように定めたものである．上では，この等式 $\widehat{k} = \kappa$ が原点で成り立つことを要求している．

注意 7.8. 証明を進める前に κ の例を指摘しておく．$d = 1$ のとき，$\kappa(\xi) = \chi_{[-1,1]}(\xi)(1 - |\xi|)$ とおくと上の条件を (反転公式を使わず) 直接確かめることができる．5.3 節と例 5.7 での計算がこれにあたる．このときの k はちょうど $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核 K_1 になる．一般の d のときは，この κ を使って定義される関数 $\kappa^d(x) = \kappa(x_1)\cdots\kappa(x_d)$ が上の条件を満たす．これとは別に，G を $\mathbb{R}^d$ 上のガウス核とし，($k = G$ となるように) $\kappa = \widehat{G}$ としても上の条件を直接確かめることができる．

反転公式の証明に戻る．$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ をとり，$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ とする．$\lambda > 0$ に対し $k_\lambda(x) = \lambda^d k(\lambda x)$ とおくと，族 $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の総和核となる．よって $\lambda \to \infty$ で $k_\lambda * f$ は f に L^1 収束する．一方，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $(k_\lambda * f)(x)$ が定義され，

$$\begin{aligned}
(k_\lambda * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} k_\lambda(x-y)f(y)\,dy \\
&= \frac{\lambda^d}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\kappa(\xi)e^{i\xi\cdot\lambda(x-y)}\,d\xi\right)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\kappa(\eta/\lambda)e^{i\eta\cdot(x-y)}\,d\eta\right)f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\eta)\kappa(\eta/\lambda)e^{i\eta\cdot x}\,d\eta \\
&\to \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\eta)e^{i\eta\cdot x}\,d\eta \quad (\lambda \to \infty).
\end{aligned}$$

最後の収束は κ に対する一つ目の条件とルベーグ収束定理による (定理を適用するときに κ の有界性を使う)．あとは系 5.13 の証明と同様にファトゥの補題を用いれば，ほとんどすべての点 x での反転公式が得られる． □

系 7.9. (1) $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対し，$\widehat{f} = 0$ ならば $f = 0$ である．

(2) フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ は全単射である．

証明. 反転公式より (1) が従い, また, 写像 $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が単射であることも従う. $f \in \mathcal{S}$ をとる. 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$(\mathcal{F}^4 f)(x) = (2\pi)^d (\mathcal{F}^2 f)(-x) = (2\pi)^{2d} f(x).$$

なので $\mathcal{F}^4((2\pi)^{-2d} f) = f$. ゆえに $\mathcal{F}$ は全射である. □

フーリエ変換を使えば, 次のような事実を簡単に示すことができる:

命題 7.10. 任意の $f, g \in \mathcal{S}$ に対し $f * g \in \mathcal{S}$.

証明. 一般に $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ に対し $\varphi\psi \in \mathcal{S}$ であることはすぐにわかる. $f, g \in \mathcal{S}$ とする. $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であり, $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}$ なので $(f*g)^\wedge = \widehat{f}\,\widehat{g}$ は $\mathcal{S}$ に属する. 系 7.9 (2) より $h \in \mathcal{S}$ が存在して $(f*g)^\wedge = \widehat{h}$ となり, 系 7.9 (1) より $f * g = h$. □

7.3 プランシュレルの定理

$\mathbb{T}$ の場合と同様, フーリエ変換とよぶべき同型 $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ を構成する. この同型は次の意味でノルムを保存する: 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$\|\mathcal{F} f\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2. \tag{7.1}$$

厳密な意味で $\mathcal{F}$ は等長ではないが, ほぼ等長と言ってよいだろう (等長にしたければ $\widehat{f}$ の定義式を $(2\pi)^{-d/2}$ 倍すればよいだけである). 注意すべきことは, $\mathbb{T}$ の場合と異なり $L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ なので, 現時点では $L^2(\mathbb{R}^d)$ のすべての元に対してフーリエ変換が定義されていないという点である. そこでまず, 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対し, 等式 (7.1) が成り立つことを示す. そしてこのことと $\mathcal{S}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることから, $\mathcal{S}$ 上のフーリエ変換を等式 (7.1) を満たす線型同型 $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ に拡張する. $\mathbb{T}$ の場合では, $L^2(\mathbb{T})$ の完全正規直交系 $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ を使って $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ が等長同型であることを示した. それとは対照的に, ここでは同型 $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ を得る際, 完全正規直交系をとらない (ちなみに, 具体的な完全正規直交系をとるアプローチもある. 例えば [DM, §2.5], [Str, §7.6] を参照せよ).

補題 7.11. 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元の列 (f_n) が存在して L^1 と L^2 で $f_n \to f$.

証明. 7.2 節の冒頭でも述べたが, 系 5.9 の証明の方法に倣えば, $1 \le p < \infty$ のとき, $L^p(\mathbb{R}^d)$ の元を $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元で L^p 近似できる. この方法で得られる近似列は p によらない. よって, f が $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ の元ならば, 得られる近似列は f を L^1 かつ L^2 で近似する. □

定理 7.12 (プランシュレルの定理)**.** 線型同型 $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ で次を満たすものが唯一存在する:

(1) 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し $\mathcal{F} f = \widehat{f}$.

(2) 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し $\|\mathcal{F} f\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2$.

証明. あらすじはすでに述べたとおりである. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ とおく.

$\mathcal{S}$ の元に対する (2) の証明. $f, g \in \mathcal{S}$ をとる. $h(x) = \overline{g(x)}$ とおくと,

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} e^{-i\xi\cdot x}\,dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(x) e^{i\xi\cdot x}\,dx} = (2\pi)^d \overline{g(\xi)}.$$

最後の等式は反転公式 7.7 による. $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の関数 $(x, y) \mapsto f(x)h(y)e^{-ix\cdot y}$ は可積分なので, フビニの定理より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x)h(y)e^{-ix\cdot y}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)h(y)\,dy.$$

これより $(2\pi)^d\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle$ であり, 特に任意の $f \in \mathcal{S}$ に対し (2) の等式が成り立つ.

$\mathcal{F}$ の構成と (2) の証明. $f \in \mathcal{H}$ に対し $\mathcal{F}f \in \mathcal{H}$ を次で定義する: $\mathcal{S}$ の元の列 (f_n) で L^2 で $f_n \to f$ となるものをとる. 上で示したように, 等式 $\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f_n - f_m\|_2$ が成り立つので $(\widehat{f_n})$ は $\mathcal{H}$ のコーシー列となる. $\mathcal{H}$ は完備なのでその極限が存在し, それを $\mathcal{F}f$ と定める. 特に $f \in \mathcal{S}$ ならば $f_n = f$ とすればよく $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ である. この定義は f_n のとり方によらない. 実際, $\mathcal{S}$ の元の列 (g_n) が L^2 で $g_n \to f$ となるならば $\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f_n - g_n\|_2 \to 0$ となり $\widehat{f}_n$ と $\widehat{g}_n$ の極限は等しい. 等式 $\|\widehat{f_n}\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f_n\|_2$ において $n \to \infty$ とすると $\|\mathcal{F}f\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f\|_2$. これで (2) を得る. (2) から $\mathcal{F}$ の単射性が従うことに注意する.

(1) の証明. $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{H}$ をとる. $\mathcal{S}$ の元の列 (f_n) で L^1 と L^2 で $f_n \to f$ となるものをとる (補題 7.11). (2) より L^2 で $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$. 不等式 $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_\infty \le \|f_n - f\|_1$ より $\mathcal{F}f_n = \widehat{f_n}$ は $\widehat{f}$ に $\mathbb{R}^d$ 上一様収束する. $\mathbb{R}^d$ の任意の球 B に対し,

$$\int_B |\mathcal{F}f(\xi) - \widehat{f}(\xi)|\,d\xi \le \int_B |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}f_n(\xi)|\,d\xi + \int_B |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|\,d\xi.$$

$\widehat{f_n}$ が $\widehat{f}$ に $\mathbb{R}^d$ 上一様収束するので, 右辺第 2 項は $n \to \infty$ で 0 に収束する. コーシー・シュワルツ不等式より, 右辺第 1 項は次でおさえられる:

$$m(B)^{1/2}\left(\int_B |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}f_n(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \le m(B)^{1/2}\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n\|_2$$

(m は $\mathbb{R}^d$ のルベーグ測度である). この右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束する. ゆえに, ほとんどすべての $\xi \in B$ に対し $\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. 球 B は任意なので $\mathcal{F}f = \widehat{f}$.

$\mathcal{F}$ の全射性. 系 7.9 より $\mathcal{F}$ の像は $\mathcal{S}$ を含み, よって $\mathcal{H}$ で稠密である. そして, $\mathcal{F}$ の像は $\mathcal{H}$ で閉である (ゆえに $\mathcal{F}$ の像は $\mathcal{H}$ に一致する). 実際, $\mathcal{H}$ の元の列 (f_n) に対し, 列 $(\mathcal{F}f_n)$ が $\mathcal{H}$ の元 g に L^2 で収束するならば, 等式 $\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f_m\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f_n - f_m\|_2$ より (f_n) は $\mathcal{H}$ のコーシー列になる. その極限を f とかくと, $\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f_n - f\|_2 \to 0$ より L^2 で $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$. ゆえに $g = \mathcal{F}f$.

$\mathcal{F}$ の唯一性. (1), (2) と $L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ で稠密であることから従う. □

上の証明で, 任意の $f, g \in \mathcal{S}$ に対し, 等式 $(2\pi)^d\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle$ が成り立つことを示した. 内積の連続性 (命題 3.3 (2)) と $\mathcal{S}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることから, この等式は任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ についても成り立つ. この等式はパーセバルの等式とよばれる.

演習問題

[1] $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ に対し, $G*\chi_{[a,b]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を示せ.

[2] $K=K_1$ を $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核とする. 任意の $f\in L^1(\mathbb{R})$ に対し $K*f\in C^\infty(\mathbb{R})$ である (第 5 講, 演習問題 [4]). $K*f\notin\mathcal{S}(\mathbb{R})$ となる $f\in L^1(\mathbb{R})$ の例を与えよ. K の代わりにガウス核 G にしたらどうか?

[3] 写像 $i+\frac{d}{dx}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は全射でないことを示せ.

[4] $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ への写像 $f\mapsto G*f$ は単射か? 全射か?

[5] (i) $\xi\in\mathbb{R}$ に対し, 次の極限を求めよ:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{e^{-i\xi x}}{x+i}\,dx.$$

(ii) $\mathbb{R}$ 上の L^2 関数 $f(x)=1/(x+i)$ のフーリエ変換を求めよ.

[6] $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ をフーリエ変換とし, $f\in L^2(\mathbb{R})$, $g\in L^1(\mathbb{R})$ とする.

(i) $\mathcal{F}(f*g)=(\mathcal{F}f)\widehat{g}$ を示せ.

(ii) $f*g\notin L^1(\mathbb{R})$ となる f, g の例を与えよ.

[7] (i) 0 でない $f\in L^2(\mathbb{R})$ で $f*f=f$ となるものは存在するか?

(ii) 0 でない $f\in L^1(\mathbb{R})$ で $f*f=f$ となるものは存在するか?

[8] $f\in L^2(\mathbb{R})$ と $\lambda>0$ に対し, $S_\lambda(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}(\mathcal{F}f)(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$ とおく. $S_\lambda(f)\in L^2(\mathbb{R})$ であって, $\lambda\to\infty$ で $S_\lambda(f)$ は f に L^2 収束することを示せ.

[9] K_λ を $\mathbb{R}$ 上のフェイエール核とし, $\lambda>1$ に対し $L_\lambda=(\lambda K_\lambda-K_1)/(\lambda-1)$ とおく.

(i) $\lambda\to1$ で L_λ はディリクレ核 D_1 に L^2 収束することを示せ.

(ii) $\lambda\to1$ で $\|L_\lambda\|_1\to\infty$ となることを示せ.

(iii) $\lambda_n>1$ かつ $\lambda_n\to1$ となる数列 (λ_n) に対し, $f\in L^2(\mathbb{R})$ を $f=\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}L_{\lambda_n}$ で定める. λ_n が十分速く 1 に収束すれば, $f\notin L^1(\mathbb{R})$ であることを示せ. また, $\mathcal{F}f$ はコンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の連続関数であることを示せ.

(iii) から次が従う: コンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の連続関数で $L^1(\mathbb{R})$ の元のフーリエ変換にならないものが存在する. (ii) と開写像定理を用いてこの事実を示すこともできる.

[10] $f\in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\lambda>0$ とする. $S_\lambda(f)\in L^1(\mathbb{R})$ ならば, $|\xi|<\lambda$ のとき $S_\lambda(f)^\wedge(\xi)=\widehat{f}(\xi)$ であって $|\xi|>\lambda$ のとき $S_\lambda(f)^\wedge(\xi)=0$ であることを示せ. これにより, $S_\lambda(f)\in L^1(\mathbb{R})$ であるためには $\widehat{f}(\lambda)=0=\widehat{f}(-\lambda)$ が必要である. 十分ではないことを示せ.

ノート

この講の内容は標準的なものだと思う. [Ru2, Ch. 7], [SS1, 第 5, 6 章] などを参考にした.

第8講　いくつかの偏微分方程式

8.1　関数 $e^{-|x|}$ のフーリエ変換

本講では, 具体的な偏微分方程式を題材にして, その解を見つける際フーリエ変換がどう応用されるかを紹介する. その準備として, 本節では $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求める. この結果は次節で上半空間上のラプラス方程式を解く際に用いる.

$d=1$ のときは直接計算で求められる (例 5.19):

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

一方, $d \geq 2$ のときの計算は巧みである. まず, $(0,\infty)$ 上の関数 g を用いて $e^{-|x|}$ を次のようにガウス核の "連続和" としてかいてみる:

$$e^{-|x|} = \int_0^\infty g(t) e^{-t|x|^2}\, dt.$$

もしこれができると, ガウス核のフーリエ変換はわかっているので, 次の等式を得る:

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \int_0^\infty g(t)\mathcal{F}(e^{-t|x|^2})(\xi)\, dt = \int_0^\infty g(t)\left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4t}\, dt.$$

ここで $\mathcal{F}(e^{-t|x|^2})$ は, 変数変換をすることで右辺のように求められる. 右辺では $\mathcal{F}$ がなくなり, g によっては計算できるかもしれない.

関数 g で, 任意の $\lambda \geq 0$ に対し等式 $e^{-\lambda} = \int_0^\infty g(t) e^{-t\lambda^2}\, dt$ を満たすものを見つければよいのだが, そこで次の変形を考える: $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned} e^{-|x|} &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty e^{-(1+\xi^2)t}\, dt\right) e^{-i\xi x}\, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} e^{-i\xi x}\, d\xi\right) dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2} e^{-|x|^2/4t}\, dt. \end{aligned}$$

これで大体目標の等式が得られた (二つ目の等式の左辺から右辺への変形はなかなか非自明であるが). さて, 上の等式で x は任意の実数であり, よって $|x|$ は任意の非負実数をとれるので, 一番左と一番右の値だけを見て次が得られる: 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}} e^{-|x|^2/4t}\, dt.$$

両辺を x でフーリエ変換する. $\mathcal{F}(e^{-|x|^2/4t})(\xi) = (4\pi t)^{d/2} e^{-t|\xi|^2}$ なので,

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}}\mathcal{F}(e^{-|x|^2/4t})(\xi)\, dt = 2^d \pi^{\frac{d-1}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{d-1}{2}} e^{-(1+|\xi|^2)t}\, dt.$$

$s=(1+|\xi|^2)t$ で変数変換すると, ξ が積分の外に出る:

$$右辺 = 2^d\pi^{\frac{d-1}{2}}\int_0^\infty\left(\frac{s}{1+|\xi|^2}\right)^{\frac{d-1}{2}}e^{-s}\frac{ds}{1+|\xi|^2} = 2^d\pi^{\frac{d-1}{2}}\int_0^\infty s^{\frac{d-1}{2}}e^{-s}ds\cdot\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

最後の積分は, ガンマ関数 $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ (x は正の実数) の値である. ゆえに,

定理 8.1. $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $e^{-|x|}$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}(e^{-|x|})$ は

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = 2^d\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

さらに変数変換により, 任意の $t>0$ に対し

$$\mathcal{F}(e^{-t|x|})(\xi) = 2^d\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)\frac{t}{(t^2+|\xi|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

8.2　フーリエ変換を使って解く

8.2.1　一般的な戦略

偏微分と多項式のかけ算がフーリエ変換の下で映り合うことを利用する. p を d 変数多項式とし, 変数 x_j に $\frac{\partial}{\partial x_j}$ を入れて得られる偏微分作用素

$$P = p\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_d}\right)$$

を考える. 与えられた $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f に対し, 偏微分方程式 $Pu=f$ を満たす関数 u を見つけたい. 両辺をフーリエ変換すると $p(i\xi)\widehat{u}(\xi)=\widehat{f}(\xi)$. ここで $i\xi=(i\xi_1,\dots,i\xi_d)$ とかいた. よって $\widehat{u}(\xi)=\widehat{f}(\xi)/p(i\xi)$.

もし $\widehat{E}(\xi)=1/p(i\xi)$ となる関数 E が見つかれば, u を見つけることができる. 実際 $u=E*f$ と定めると, $\widehat{u}(\xi)=\widehat{E}(\xi)\widehat{f}(\xi)=\widehat{f}(\xi)/p(i\xi)$ となり $p(i\xi)\widehat{u}(\xi)=\widehat{f}(\xi)$. $\mathcal{F}^{-1}$ を施すと $Pu=f$ となり, u は求める解になる. ただ, $p(i\xi)$ が $\mathbb{R}^d$ 上に零点をもったりすると, $\widehat{E}(\xi)=1/p(i\xi)$ となる可積分関数 E は存在しないので色々問題はある. 一般に, 多項式 $p(i\xi)$ の性質は偏微分方程式 $Pu=f$ の性質に大きな影響を及ぼす.

簡単な例を一つ挙げる. $\mathbb{R}$ 上での微分方程式

$$\left(1-\frac{d^2}{dx^2}\right)u=f \tag{8.1}$$

を考える. フーリエ変換すると $(1-(i\xi)^2)\widehat{u}(\xi)=\widehat{f}(\xi)$ となり, よって $\widehat{u}(\xi)=\widehat{f}(\xi)/(1+\xi^2)$. こうなる u を求めたい. さて, $\widehat{E}(\xi)=1/(1+\xi^2)$ となる関数 E はあるだろうか? これはすでに得ている: $E(x)=e^{-|x|}/2$ と定めると $\widehat{E}(\xi)=1/(1+\xi^2)$. よって, 与えられた f に対し u を

$$u(x)=(E*f)(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-|x-y|}f(y)\,dy$$

と定めると, 方程式 (8.1) が満たされる. 偏微分方程式 $Pu = f$ にまつわる話題は, 超関数を導入することでさらに深まる. それを紹介するのが第 III 部の目標である.

以下で, 上とはちょっと状況が異なるがフーリエ変換を使って解ける重要な偏微分方程式を三つ紹介する. どちらの方程式も x の他に, もう一つ変数を含んでいる. 方程式を x でフーリエ変換すると x の偏微分作用素が多項式に化け, もう一つの変数のみに関する微分方程式になる. これを解くことで元の偏微分方程式の解を得るというのが三つの例に共通する流れである.

8.2.2 熱方程式

与えられた $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f に対し, 次を満たす $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ 上の関数 u を求めたい: $x \in \mathbb{R}^d$ と $t > 0$ に対し,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \triangle_x u(x,t), & (8.2) \\ u(x,0) = f(x). & (8.3) \end{cases}$$

$\triangle_x$ は変数 x についてのラプラシアン, つまり

$$\triangle_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

である. これは, $\mathbb{R}^d$ において時刻 0 での温度分布が f のとき, 時刻 t での温度分布 $u(\cdot, t)$ が満たすべき方程式である (そのため, f は初期値関数とよばれる). もちろん, ほしい解 u は $t = 0$ で連続になるなど, 境界付近で適当な条件を満たすものである.

$u_t(x) = u(x,t)$ とおき, (8.2) の両辺を x についてフーリエ変換する (フーリエ変換できるとする). (8.2) の左辺は

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-i\xi\cdot x}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)e^{-i\xi\cdot x}\,dx = \frac{\partial \widehat{u_t}}{\partial t}(\xi)$$

(とりあえず, 微分と積分は交換できるとしよう) となり, (8.2) の右辺は

$$\int_{\mathbb{R}^d} \triangle_x u(x,t)e^{-i\xi\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \triangle_x u_t(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx = -|\xi|^2\widehat{u_t}(\xi)$$

となる. よって

$$\frac{\partial \widehat{u_t}}{\partial t}(\xi) = -|\xi|^2\widehat{u_t}(\xi). \tag{8.4}$$

そして (8.3) の両辺を x についてフーリエ変換すると,

$$\widehat{u_0}(\xi) = \widehat{f}(\xi). \tag{8.5}$$

ξ をとめると, (8.4), (8.5) は t についての微分方程式であり, これを解くと $\widehat{u_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)$ となる. さて, これを満たす u_t を求めたいのだが, そのためには, $t > 0$ に対し $\widehat{H_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$ となるような $\mathbb{R}^d$ 上の関数 H_t を求めればよい. 実際, そのような H_t が見つかれば $u_t = H_t * f$ とおけばよい.

$\mathbb{R}^d$ 上のガウス核 G に対し, $\widehat{G}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ であった (例 7.5). $\widehat{H_t}(\xi) = \widehat{G}(\sqrt{2t}\,\xi)$ となればよいので,

$$H_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}$$

と定義すれば $\widehat{H_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$ となることがわかる. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対し $u(x,t) = (H_t * f)(x)$ とおけば, (8.2) が満たされる.

族 $(H_t)_{t>0}$ は $t \to 0$ に関して $\mathbb{R}^d$ 上の総和核になる (これは等式 $H_t(x) = (2t)^{-d/2} G(x/\sqrt{2t})$ と例 5.5 より従う). ゆえに $t \to 0$ で $u(\cdot,t) = H_t * f$ は f に L^1 収束する. もし f が連続で適当な条件を満たせば, $u(\cdot,t)$ は f に $\mathbb{R}^d$ 上一様収束し, (8.3) が満たされる. これで解けた. さらに (8.4) と (8.5) を満たす解の一意性から, (8.2) と (8.3) を満たす解の一意性が適当な条件下で示される.

8.2.3　上半空間上のラプラス方程式

$\mathbb{R}^{d+1}_+ = \{\, (x_1, \ldots, x_d, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid y > 0 \,\}$ とおく. 与えられた $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f に対し, 次を満たす $\mathbb{R}^{d+1}_+$ 上の関数 u を求めたい: $x \in \mathbb{R}^d$ と $y > 0$ に対し

$$\begin{cases} \left(\triangle_x + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = 0, & (8.6) \\ u(x,0) = f(x). & (8.7) \end{cases}$$

つまり, $\mathbb{R}^{d+1}_+$ 上の調和関数で境界上で f に一致するものを求めたい. 境界での連続性など適当な条件を u に課すのは前の例と同様である.

$u_y(x) = u(x,y)$ とおき, (8.6) の両辺を x についてフーリエ変換すると

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\triangle_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) e^{-i\xi\cdot x}\, dx = -|\xi|^2 \widehat{u_y}(\xi) + \frac{\partial^2 \widehat{u_y}}{\partial y^2}(\xi)$$

となり, よって

$$\frac{\partial^2 \widehat{u_y}}{\partial y^2}(\xi) = |\xi|^2 \widehat{u_y}(\xi). \tag{8.8}$$

そして (8.7) の両辺を x についてフーリエ変換すると,

$$\widehat{u_0}(\xi) = \widehat{f}(\xi). \tag{8.9}$$

ξ をとめると (8.8), (8.9) は y についての微分方程式であり, これを解くと $\widehat{u_y}(\xi) = e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi)$ となる (ここで $\widehat{u_y}(\xi) = e^{y|\xi|}\widehat{f}(\xi)$ も解になるが, $|\xi| \to \infty$ で $e^{y|\xi|} \to \infty$ となり, リーマン・ルベーグの補題 7.6 に反するので, この解は採用しない). さて, これを満たす u_y を求めたいのだが, そのためには, $y > 0$ に対し $\widehat{P_y}(\xi) = e^{-y|\xi|}$ となるような $\mathbb{R}^d$ 上の関数 P_y を求めればよい. 実際, そのような P_y が見つかれば, $u_y = P_y * f$ とおけばよい.

等式 $\widehat{P_y}(\xi) = e^{-y|\xi|}$ の両辺をフーリエ変換して $(2\pi)^d P_y(-x) = \mathcal{F}(e^{-y|\xi|})(x)$. 右辺は定理 8.1 で計算した. それによると,

$$P_y(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} 2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right) \frac{y}{(y^2 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{y}{(y^2 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

と定義すれば $\widehat{P_y}(\xi) = e^{-y|\xi|}$ となる. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対し $u(x, y) = (P_y * f)(x)$ とおくと, (8.6) が満たされる.

族 $(P_y)_{y>0}$ は $y \to 0$ について $\mathbb{R}^d$ 上の総和核になる (これは等式 $P_y(x) = y^{-d}P_1(x/y)$ と例 5.5 より従う). ゆえに $y \to 0$ のとき, 適当な意味で $u(\cdot, y)$ は f に収束し (8.7) も満たされる. これで解けた. 熱方程式の場合と同様に, 解の一意性も適当な条件下で示すことができる.

上で得た族 $(H_t)_{t>0}$, $(P_y)_{y>0}$ はそれぞれ $\mathbb{R}^d$ 上の**熱核**, **ポアソン核**とよばれる. フーリエ変換を使うと, 次の等式が容易に得られる:

命題 8.2 (半群の性質)**.** 等式 $H_t * H_s = H_{t+s}$ と等式 $P_y * P_w = P_{y+w}$ が成り立つ.

証明. フーリエ変換すると

$$(H_t * H_s)^\wedge(\xi) = \widehat{H_t}(\xi)\widehat{H_s}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}e^{-s|\xi|^2} = e^{-(t+s)|\xi|^2} = \widehat{H_{t+s}}(\xi)$$

なので, 一つ目の等式が従う. 二つ目についても同様である. □

時刻 0 での $\mathbb{R}^d$ 上の温度分布が f であるとき, 時刻 t での温度分布が $u(\cdot, t) = H_t * f$ になる. それを考慮すれば等式 $H_t * H_s = H_{t+s}$ が成り立つのは当然である. なぜなら, $H_t * (H_s * f)$ も $H_{t+s} * f$ も時刻 $t + s$ での温度分布になるからである. ポアソン核についても同様である.

8.2.4 $\mathbb{T}$ 上の熱方程式

$\mathbb{R}^d$ 上の熱方程式を扱ったので, ここで $\mathbb{T}$ 上の熱方程式にも触れておきたい. 基本的には $\mathbb{R}^d$ を $\mathbb{T}$ に置き換えて考えればよい. 与えられた $\mathbb{T}$ 上の関数 f に対し, 次を満たす $\mathbb{T} \times [0, \infty)$ 上の関数 u を求める: $x \in \mathbb{T}$ と $t > 0$ に対し,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & (8.10) \\ u(x, 0) = f(x). & (8.11) \end{cases}$$

時刻 0 での温度分布を f としたとき, 時刻 t での温度分布が $u(\cdot, t)$ である. 解 u は $t = 0$ で連続になるなど, 境界付近で適当な条件を満たすことを要求する.

これまでと同様, $u_t(x) = u(x, t)$ とおいて (8.10) の両辺を x についてフーリエ変換すると, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\frac{\partial \widehat{u_t}}{\partial t}(n) = -n^2\widehat{u_t}(n)$. また, (8.11) の両辺を x についてフーリエ変換すると, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{u_0}(n) = \widehat{f}(n)$. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, この二つの等式は t についての微分方程式を定め, これを解くと $\widehat{u_t}(n) = e^{-n^2 t}\widehat{f}(n)$.

$t > 0$ に対し, $\mathbb{T}$ 上の関数 W_t を

$$W_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx}$$

で定めると, これは任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 等式 $\widehat{W_t}(n) = e^{-n^2 t}$ を満たす. 族 $(W_t)_{t>0}$ を $\mathbb{T}$ 上の**熱核**という. $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し $u(x, t) = (W_t * f)(x)$ とおけば, (8.10) が満たされる. そして実は, 族 $(W_t)_{t>0}$ は $t \to 0$ に関して $\mathbb{T}$ 上の総和核になる ([猪 1, §3.4, VI], [SS1, 第 5 章, 系 3.4]). よって, もし f が $\mathbb{T}$ 上の連続関数ならば, $t \to 0$ のとき $u(\cdot, t)$ は f に $\mathbb{T}$ 上一様収束する.

演習問題

[1] $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し, 次の微分方程式を満たす $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が唯一存在することを示せ. さらに, この u を f とある関数のたたみ込みの形で表せ.

(i) $(1+\frac{d}{dx})u = f$.

(ii) $(1+i+\frac{d}{dx})u = f$.

[2] (i) $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $|x|e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(ii) $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $f(x) = e^{-|x|}$ に対し, $f * f$ を求めよ.

[3] $-1 < \lambda < 0$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 x_+^λ, x_-^λ を次で定義する:

$$x_+^\lambda(x) = \begin{cases} x^\lambda & x > 0, \\ 0 & x \le 0, \end{cases} \qquad x_-^\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \ge 0, \\ |x|^\lambda & x < 0. \end{cases}$$

(i) $t > 0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 $x_+^\lambda e^{-t|x|}$, $x_-^\lambda e^{-t|x|}$ のフーリエ変換を求めよ ([GS, p.170]).

(ii) $t > 0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 $|x|^\lambda e^{-t|x|}$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}(|x|^\lambda e^{-t|x|})(\xi) = 2\Gamma(\lambda+1)\frac{\cos(\lambda+1)\theta}{(t^2+\xi^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}}$$

となることを示せ. ここで, θ は $t+i\xi$ の偏角で $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間にあるものを表す (右辺が $\lambda \to 0$ で $\mathcal{F}(e^{-t|x|})(\xi) = 2t/(t^2+\xi^2)$ に近づくことに注意).

(iii) $t > 0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 $|x|^{\lambda+1}e^{-t|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

[4] $\alpha > 1$ として, 次の等式を考える:

$$\frac{1}{(1+|x|)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}e^{-t|x|}\,dt.$$

左辺を $\mathbb{R}$ 上の関数と見なしたとき, そのフーリエ変換の無限遠での挙動を $\sum_{n=1}^\infty a_n/\xi^n$ の形で求めよ. $\mathbb{R}^d$ 上の関数と見なしたときはどうか?

[5] 同様に, 次の等式から何がいえるかをを考察せよ:

$$\frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}e^{-t|x|^2}\,dt.$$

ノート

関数 $e^{-|x|}$ のフーリエ変換の計算は [Str, 4.2.4] に従った ([Pin, 2.2.2.3], [SW, I.1.14] にもある). 他の計算法が [猪 1, p.216] にある. 波動方程式など他の重要な方程式については [SS1, 第 6 章], [Str, Ch. 5] を参照してほしい.

第III部

シュワルツ超関数

第 9 講　序論

9.1　超関数とその動機

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 f はしばしば, 色々な関数 φ とのペアリング

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx$$

から復元される. 例を挙げよう.

$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ とし, G を $\mathbb{R}^d$ 上のガウス核とする. $\lambda > 0$ に対し, 関数 G_λ を $G_\lambda(x) = \lambda^d G(\lambda x)$ で定義すると, すべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$(G_\lambda * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_\lambda(x-y) f(y)\,dy$$

が定義されるが, これは f と関数 $y \mapsto G_\lambda(x-y)$ とのペアリングと見なせる. 一方, $(G_\lambda)_{\lambda>0}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の総和核なので, $\lambda \to \infty$ で $G_\lambda * f$ は f に L^1 収束する. よって f は, 関数 $y \mapsto G_\lambda(x-y)$ とのペアリングから復元されるといえる.

次のような例もある: $L^2(\mathbb{R}^d)$ の内積

$$\langle f, g \rangle_\star = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

は f と $\overline{g}$ のペアリングである. $L^2(\mathbb{R}^d)$ の完全正規直交系 $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ を用意すれば, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は $\langle f, \varphi_n \rangle_\star$ から復元される. 実際, f は $\sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n \rangle_\star \varphi_n$ の $N \to \infty$ での L^2 極限である.

このように f が与えられたとき, 色々な φ とのペアリングをとるという "実験" を行うことで, その "観測値" $\langle f, \varphi \rangle$ から f を復元することができる. 見方を変えると, f は汎関数 $\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ と同一視できるともいえる. そこで φ のことを**テスト関数**とよぶ.

さて, $\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 級関数でコンパクト台をもつもの全体を

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

とかく. $\mathcal{D}$ の元は何かと扱いやすい関数であり, とりあえずこの $\mathcal{D}$ をテスト関数のクラスとして採用する. 積分で定義されるペアリング $\langle f, \varphi \rangle$ は φ に関して線型であり, また連続でもある (つまり, φ_1 と φ_2 が何らかの意味で近ければ, $\langle f, \varphi_1 \rangle$ と $\langle f, \varphi_2 \rangle$ は近い値になる). そこで, この二つの性質を満たす汎関数 $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を関数の一般化という意味合いで超関数とよぶ.

正確に定義する. $\mathcal{D}$ の元 φ の**台**とは集合 $\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \varphi(x) \neq 0 \}$ の閉包を意味し, $\operatorname{supp}\varphi$ で φ の台を表す. $\mathcal{D}$ の元の列 (φ_n) と $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, φ_n が φ に $\mathcal{D}$ で**収束する**とは, $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分集合 K が存在して, K はすべての $\operatorname{supp}\varphi_n$ と $\operatorname{supp}\varphi$ を含み, さらに任意の多重指数 α に対し

$\partial^\alpha \varphi_n$ が $\partial^\alpha \varphi$ に $\mathbb{R}^d$ 上一様収束するときをいう．このとき "$\mathcal{D}$ で $\varphi_n \to \varphi$" とかく．$\mathbb{R}^d$ 上の**超関数**とは, $\mathbb{C}$ 上の線型写像 $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ で次の意味で連続なものを意味する: φ_n が φ に $\mathcal{D}$ で収束するならば, $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$. $\mathbb{R}^d$ 上の超関数の集合を

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) = \{\, T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C} \mid T \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上線型かつ連続である.}\}$$

とかく．$T(\varphi)$ のことを $\langle T, \varphi \rangle$ とかいた方がわかりやすい場合もあり, そうかくことが多い.

例 9.1. $\mathbb{R}^d$ 上の**局所可積分関数**とは, 任意の $\mathbb{R}^d$ の球の上で可積分な関数を意味する．$\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 f に対し, 写像 $T_f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\, dx$$

で定めると, $T_f \in \mathcal{D}'$ である．この例は, 関数である超関数である．T_f が $\mathcal{D}'$ に属することを確かめる．T_f の線型性は積分のそれから従う．もし $\mathcal{D}$ で $\varphi_n \to \varphi$ ならば, コンパクト集合 K が存在して, K はすべての $\operatorname{supp} \varphi_n$ と $\operatorname{supp} \varphi$ を含む．ルベーグ収束定理より

$$\langle T, \varphi_n \rangle = \int_K f(x)\varphi_n(x)\, dx \to \int_K f(x)\varphi(x)\, dx = \langle T, \varphi \rangle.$$

よって T_f は連続である．K が n によらないため, この収束が従うことに注意する．$\langle T_f, \varphi \rangle$ のことを $\langle f, \varphi \rangle$ ともかく．次の命題により関数 f は汎関数 T_f と同一視される．そのため, 混乱がなければ T_f を f と略記することもある.

命題 9.2. $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 f に対し, $T_f = 0$ ならば $f = 0$ (この主張は変分法の基本補題とよばれる).

証明. $\mathbb{R}^d$ の開球 B をとる．開集合 $U \subset B$ に対し, $\varphi_n \in \mathcal{D}$ で, $0 \le \varphi_n \le 1$ かつ各点で φ_n が定義関数 χ_U に単調増大で収束するものをとる．仮定とルベーグ収束定理より

$$0 = \int_B f(x)\varphi_n(x)\, dx \to \int_B f(x)\chi_U(x)\, dx = \int_U f(x)\, dx.$$

よって, 任意の開集合 $U \subset B$ に対し $\int_U f(x)\, dx = 0$.

f の実部と虚部をそれぞれ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ とかく．もし測度正の集合 $A \subset B$ が存在して A 上で $\operatorname{Re} f > 0$ となるならば, ルベーグ測度の正則性より測度正のコンパクト集合 $K \subset A$ が存在し, すると $\int_K \operatorname{Re} f\, dx > 0$. 一方, B も $B \setminus K$ も B の開部分集合なので, 前の段落で示したことから $\int_B \operatorname{Re} f\, dx = 0$ かつ $\int_{B \setminus K} \operatorname{Re} f\, dx = 0$ であり, よって $\int_K \operatorname{Re} f\, dx = 0$. 矛盾を得た．ゆえに, B のほとんどすべての点で $\operatorname{Re} f \le 0$. 同様の議論により B のほとんどすべての点で $f = 0$. B は任意なので, 結局 $\mathbb{R}^d$ 上で $f = 0$. □

例 9.3 (ディラックのデルタ)**.** 写像 $\delta\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

で定義する．これは $\mathcal{D}'$ に属し, 局所可積分関数でない超関数の例である (実際, $\delta = T_f$ となる局所可積分関数 f が存在するとすれば, 命題 9.2 の証明に倣って, $B \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ となる任意の開球

B に対し, B のほとんどすべての点で $f=0$ となることが示され, よって $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ のほとんどすべての点で $f=0$ であり, 結局, $\mathbb{R}^d$ のほとんどすべての点で $f=0$. すると $T_f=0$ となるが, 一方 $\delta \neq 0$ なので, これは矛盾). もっと一般に $\mathbb{R}^d$ 上の複素ボレル測度 μ に対し, $T_\mu \in \mathcal{D}'$ が

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mu$$

で定義される. T_μ の連続性はルベーグ収束定理から従う. ラドン・ニコディムの定理より, T_μ が関数からくるかどうかは μ がルベーグ測度に関して絶対連続かどうかによる.

超関数の動機を二つの偏微分方程式を通して説明する.

動機 1 (波動方程式)**.** $\mathbb{R}$ 上の波動方程式とは, k を正の定数とする次の形の方程式である:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{R}$ 上で二回微分可能な関数 f に対し, 等式 $u(x,t)=f(x-kt)$ で定まる関数 u はこの方程式の解となる. この u は f を時刻 $t=0$ での波形とする, 速さ k で右へ移動していく波を表す. f が微分可能でないと厳密な意味で u は方程式の解にはならないが, とがった波形をもつ f に対してもこのような u は波を表している. 一方, 超関数はその定義により常に微分可能であり, 任意の $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 f に対して, 関数 $u(x,t)=f(x-kt)$ は等式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_u = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_u$$

を満たす. 超関数を導入すれば, f のグラフがとがっていても u を解と見なすことができる.

動機 2 (ポアソン方程式)**.** 偏微分作用素

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

を $\mathbb{R}^d$ 上の**ラプラシアン**とよぶ. $\mathbb{R}^d$ 上のポアソン方程式とは $\triangle u = f$ の形をした方程式であり, 与えられた $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f に対し解 u を見つけたい. そのためには実は, 超関数の微分方程式 $\triangle T = \delta$ の解が見つかれば十分である. δ はディラックのデルタである. 実際, 与えられた f に対し $u = T * f$ とおくと, これは次を満たす:

$$\triangle u = \triangle(T * f) = (\triangle T) * f = \delta * f = f.$$

色々と注意しなければならない. まず $f \in \mathcal{D}$ ならば, 超関数のたたみ込み $T * f$ が定義され, 実はそれは C^∞ 級関数になる. 上の二つ目の等式に関しては, T が関数のとき適当な条件下で成り立つのだが, 実は T が超関数であっても成り立つ. 四つ目の等式は δ が満たす一般的な性質である (以上のことは第 10 講で示す). これで任意の $f \in \mathcal{D}$ に対する解 u が得られた.

例えば, $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 $E(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$ は等式 $\triangle T_E = \delta$ を満たす (定理 9.11). よって任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ に対し, 次で定義される関数 u は等式 $\triangle u = f$ を満たす:

$$u(x) = (E * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \log|x-y| \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

そして, 次の一般的な事実が知られている (14.2 節):

定理 9.4 (マルグランジュ・エーレンプライスの定理). 任意の 0 でない d 変数多項式 p に対し, 偏微分作用素

$$P = p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$$

の**基本解**が存在する. つまり, $PE = \delta$ となる $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ が存在する.

これより, 任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対し, 偏微分方程式 $Pu = f$ は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する解 $u = E * f$ をもつことが上と同様に従う. E が具体的であれば, u が f にどう依存するかも調べられよう.

9.2 微分

超関数が関数のように扱えることを見ていく. 例えば, 超関数の微分, たたみ込み, フーリエ変換などを考えたい. これらの操作は, 通常の関数に対する等式に基づいて定義される.

f を $\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 級関数とし α を多重指数とすると, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, 等式

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial^\alpha f)(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\partial^\alpha \varphi)(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \tag{9.1}$$

が成り立つ (二つ目の等式は部分積分による. $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ のときに確かめてみるとよい). そこで $T \in \mathcal{D}'$ に対し, $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'$ を

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

で定義する. 実際, $\partial^\alpha T$ は $\mathcal{D}'$ の元である. 線型性はすぐにわかり, 連続性は次のようにして従う: $\mathcal{D}$ で $\varphi_n \to \varphi$ ならば, $\mathcal{D}$ で $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ なので

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi_n \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi_n \rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle.$$

$d = 1$ のときは, 微分 $\frac{d}{dx}T$ を T' とかいたり, n 回微分 $\frac{d^n}{dx^n}T$ を $T^{(n)}$ とかいたりする. 微分の例をいくつか見る.

例 9.5. ヘヴィサイド関数 H を次で定義する:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x < 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

これは $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数であって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し,

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0).$$

右辺は $\langle \delta, \varphi \rangle$ に一致し, よって $(T_H)' = \delta$.

これは H が微分作用素 $\frac{d}{dx}$ の基本解であることを意味する. 9.1 節の動機 2 で述べたことを確かめてみる: 任意の $f \in \mathcal{D}$ に対し, たたみ込み $H * f$ は等式

$$(H * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(x - y)f(y)\,dy = \int_{-\infty}^x f(y)\,dy$$

を満たし, よって $H * f$ は微分方程式 $\frac{d}{dx}u = f$ の解になる.

例 9.6. α を多重指数とする. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し,

$$\langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi)(0).$$

例 9.7. $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ と $|\alpha| \le k$ となる多重指数 α に対し $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$. これは等式 (9.1) と同様にして示される.

例 9.8. $\mathbb{R}$ 上の関数 f は, $\mathbb{R}$ 上のある局所可積分関数 g により $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt + f(0)$ と表されるとする. このとき, $(T_f)' = T_g$. 実際, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\left(\Big[f(x)\varphi(x) \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\ dx \right) = \langle g, \varphi \rangle.$$

例 9.9. $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 $f(x) = \log|x|$ の微分を考える. $\log|x|$ を原点以外で通常の意味で微分すると $1/x$ となるが, これは局所可積分でない. そのため例 9.8 は適用できない.

$(T_f)'$ と $1/x$ の差を考えてみる. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ をとる. $\varepsilon > 0$ に対し, 差

$$-\int_{|x|\ge\varepsilon} \varphi'(x)\log|x|\,dx - \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

は部分積分により, 次に等しい:

$$-\Big[\varphi(x)\log|x|\Big]_{\varepsilon}^{\infty} - \Big[\varphi(x)\log|x|\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} = (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\log\varepsilon.$$

平均値の定理より, 右辺は $\varepsilon \searrow 0$ で 0 に収束する. よって

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\log|x|\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

$\varphi \in \mathcal{D}$ に対して右辺を値にする超関数は $\mathrm{pv}(1/x)$ とかかれ, $1/x$ の主値とよばれる.

関数の場合と同様に次が成り立つ:

命題 9.10. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ が $T' = 0$ を満たすならば, T は定数関数である.

証明. $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ で $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\,dx = 1$ なるものを一つとって固定する. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し $\psi \in \mathcal{D}$ が存在して $\varphi = \psi' + \alpha\varphi_0$ とかける. ここで $\alpha = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$ とおく. 実際, ψ を

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} (\varphi(t) - \alpha\varphi_0(t))\,dt$$

で定義すればよい. ψ の台がコンパクトであることに注意する. $c = \langle T, \varphi_0 \rangle$ とおくと, $T' = 0$ かつ $\alpha = \langle 1, \varphi \rangle$ なので

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi' \rangle + \alpha\langle T, \varphi_0 \rangle = -\langle T', \psi \rangle + \alpha c = c\langle 1, \varphi \rangle.$$

ゆえに T は定数関数 c である. □

9.3 微分の計算例

9.1 節の動機 2 で紹介した次の事実を示す:

定理 9.11. $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 $E(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$ はラプラシアン $\triangle$ の基本解である.

証明. 目標は $\triangle T_E = \delta$, つまり, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し $\langle \triangle T_E, \varphi\rangle = \varphi(0)$ を示すことである. ここでは $\mathbb{R}^2$ の座標を (x_1, x_2) ではなく (x, y) とかくことにする. すると $E(x, y) = \frac{1}{4\pi}\log(x^2 + y^2)$ であって, 目標の等式は

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\triangle\varphi)E\,dx\,dy = \varphi(0, 0)$$

になる. 左辺の被積分関数は原点で特異なので, $\varepsilon > 0$ に対し, 領域

$$\Omega = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2\,\}$$

上での積分を計算し, その後 ε を 0 に近づけることにする. 通常の関数として原点以外で $\triangle E = 0$ であることに注目して, 左辺の被積分関数の $\triangle$ を φ から E の方へ移したい. そこで, 部分積分の一般化であるストークスの定理を用いる. これは Ω 上のコンパクト台をもつ 1 次微分形式 ω に対し, 等式

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

が成り立つことを主張する (微分形式に対するストークスの定理は形がきれいなので覚えやすい). $\omega = \varphi_x E\,dy$ とおくと $d\omega = (\varphi_{xx}E + \varphi_x E_x)\,dx \wedge dy$ なので, 上の等式より

$$\int_\Omega \varphi_{xx}E\,dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} \varphi_x E\,dy - \int_\Omega \varphi_x E_x\,dx \wedge dy.$$

これで下付きの x を一つ φ から E へ移せた. 右辺第 2 項に対し同じことをすると,

$$\int_\Omega \varphi_{xx}E\,dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} (\varphi_x E - \varphi E_x)\,dy + \int_\Omega \varphi E_{xx}\,dx \wedge dy.$$

同様に x と y を交換したものが得られる:

$$\int_\Omega \varphi_{yy}E\,dy \wedge dx = \int_{\partial\Omega} (\varphi_y E - \varphi E_y)\,dx + \int_\Omega \varphi E_{yy}\,dy \wedge dx.$$

ゆえに

$$\int_\Omega (\triangle\varphi)E\,dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} (\varphi_x E - \varphi E_x)\,dy - \int_{\partial\Omega} (\varphi_y E - \varphi E_y)\,dx + \int_\Omega \varphi(\triangle E)\,dx \wedge dy.$$

これで $\triangle$ を φ から E へ移せた. 右辺の第 3 項は 0 である. 第 1 項と第 2 項を極座標 (r, θ) で計算する. 境界 $\partial\Omega$ 上で E は定数 $(2\pi)^{-1}\log\varepsilon$ であって, $E_x = x/(2\pi\varepsilon^2)$, $E_y = y/(2\pi\varepsilon^2)$. 偏微分の連鎖律により

$$\varphi_x = \varphi_r \cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}\varphi_\theta, \qquad \varphi_y = \varphi_r \sin\theta + \frac{\cos\theta}{r}\varphi_\theta.$$

円周 $\partial\Omega$ には時計回りの向きが入っていることに注意し, $\varepsilon \to 0$ とすると

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi_x E\,dy - \varphi_y E\,dx) = -\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_r|_{\partial\Omega}\,d\theta \to 0,$$
$$\int_{\partial\Omega} (\varphi E_y\,dx - \varphi E_x\,dy) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi|_{\partial\Omega}\,d\theta \to \varphi(0,0).$$

一つ目の収束は, 原点以外で $\varphi_r = \varphi_x\cos\theta + \varphi_y\sin\theta$ であって, これが有界であるため従う. □

ストークスの定理は, E の超関数としての微分と関数としての微分との差が何であるかを教えてくれる. 状況に応じて領域 Ω のとり方を工夫する必要がある.

命題 9.12. E を $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数とする. 通常の関数の意味で E は原点以外で x について偏微分可能であって, その偏導関数 E_x は $\mathbb{R}^2$ 上局所可積分とする (原点で定義されていなくても局所可積分かどうかは意味をもつことに注意する). このとき, 超関数としての偏導関数 $\frac{\partial}{\partial x}T_E$ は E_x に等しい.

証明. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, 等式 $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_x E\,dx\,dy = -\int_{\mathbb{R}^2} \varphi E_x\,dx\,dy$ を示せばよい. 左辺を

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_x E\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_x E\,dx\right) dy$$

と逐次積分で表す. 任意の $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し, 右辺の括弧内の積分は

$$\Big[\varphi(x,y)E(x,y)\Big]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \varphi E_x\,dx$$

であり, 第 1 項は 0 である. □

命題 9.12 は $d \geq 3$ でも同様に成り立つ. $d = 1$ のときは成り立たない. 実際, E をヘヴィサイド関数とすれば結論は正しくない. しかし $d = 1$ のときでも, E がさらに原点で連続であることを要求すれば結論は正しい. これは例 9.8 と微分定理 ([Ru1, Theorem 7.21]) より従う.

最後にコーシー・リーマン作用素の基本解を求める. $\mathbb{R}^2$ の座標を (x,y) とかき, 対応 $(x,y) \leftrightarrow z = x + iy$ により $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視する.

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \bar\partial = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

とおく. $\bar\partial$ を**コーシー・リーマン作用素**とよぶ.

命題 9.13. $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 $(2\pi z)^{-1}$ は $\bar\partial$ の基本解である.

証明. $\triangle = \bar\partial\partial$ であることに注意する. $\triangle$ の基本解 $E(z) = \frac{1}{2\pi}\log|z|$ について, 原点以外で

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad E_y = \frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

であり, これらは $\mathbb{R}^2$ 上局所可積分である. 命題 9.12 より, この等式は超関数の意味でも成り立つ. ゆえに $\partial E = (2\pi z)^{-1}$ となり, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し,

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \langle\triangle E,\varphi\rangle = -\langle\partial E,\bar\partial\varphi\rangle = -\langle(2\pi z)^{-1},\bar\partial\varphi\rangle.$$ □

演習問題

[1] 次で定義される $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 f の超関数としての微分を求めよ. (iii) と (iv) については, 例 9.9 のように φ' を用いず φ のみを用いて $\langle (T_f)', \varphi \rangle$ を表せ.

(i) $f(x) = |x|$.

(ii) $f(x) = |x|^{1/2}$.

(iii) $f(x) = |x|^{-1/2}$.

(iv) $f(x) = H(x) \log x$.

[2] 次で定義される写像 $T \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元になることを示し, 微分 T' を求めよ. また, $T = S'$ となる $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を一つ求めよ:

(i) $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$.

(ii) $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$.

[3] 次で定義される $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対し, 微分 T' を求めよ. また, T は $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数からくる超関数か?

(i) $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\int_0^1 \int_0^x \varphi(t)\, dt\, dx$.

(ii) $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x \varphi(t)\, dt\, dx$.

[4] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を次で定める:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx.$$

(i) 上の積分が収束することと $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ であることを示せ.

(ii) T は $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数からくる超関数でないことを示せ.

(iii) $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f が存在して $(T_f)' = T$ となることを示せ.

[5] $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し, 次の値の $\varepsilon \searrow 0$ における極限は存在するか? もし存在するならば, その極限と $\langle \mathrm{pv}(1/x), \varphi \rangle$ との差を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_{2\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$.

(ii) $\displaystyle\int_{\varepsilon^2}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$.

[6] 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し, 次の極限が存在することを示せ:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \log |x|\, dx$$

さらにこの値を $\langle T, \varphi \rangle$ とかいて $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を定めたとき, $T = (T_f)'$ となる $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 f を一つ求めよ.

[7] (i) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対し, $fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ が $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$ で定まることを示せ. また, 等式 $(fT)' = f'T + fT'$ を示せ.

(ii) もし $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ が至るところ 0 でない値をとるならば, $fT = 1$ となる $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ が唯一存在することを示せ.

[8] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元で $(0, \infty)$ 上で $e^{1/x}$ に一致するものは存在するか? (つまり, 台が $(0, \infty)$ に含まれるような任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{1/x}\varphi(x)\,dx$ となる $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ は存在するか?)

[9] $\mathbb{R}^2$ の点を (x, y) で表す. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ が $\frac{\partial}{\partial x}T = \frac{\partial}{\partial y}T = 0$ を満たすならば, T は定数であることを示せ.

[10] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x_1, 0)\,dx_1$ で定める.

(i) T は $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数からくる超関数でないことを示せ.

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_2}S = T$ となる $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を一つ求めよ.

[11] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, x)\,dx$ で定める.

(i) T は $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数からくる超関数でないことを示せ.

(ii) $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 g = T$ となる $g \in C(\mathbb{R}^2)$ を一つ求めよ.

[12] 命題 9.12 の仮定において「原点以外で」を「$\mathbb{R}^2$ の測度 0 の集合を除いて」に置き換えると, 結論は正しくない. 例を挙げてこれを示せ.

[13] $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 $f(x, y) = |x|^{\sin y + 3/2}$ に対し, $\frac{\partial}{\partial x}T_f$, $\frac{\partial}{\partial y}T_f$ を求めよ.

[14] f を $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 u を $u(x, y) = f(x - y)$ で定める. u は $\mathbb{R}^2$ 上局所可積分であって, 超関数の意味で $\frac{\partial}{\partial x}u = -\frac{\partial}{\partial y}u$ が成り立つことを示せ.

[15] $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ に対し, 次の積分の $\varepsilon_1 \searrow 0$, $\varepsilon_2 \searrow 0$ における極限は存在するか? もし存在すれば, それは $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ の元を定めるか?

$$\int_{|x| \geq \varepsilon_1,\, |y| \geq \varepsilon_2} \frac{\varphi(x, y)}{xy}\,dx\,dy.$$

[16] $\mathbb{R}^2$ の極座標を (r, θ) で表す.

(i) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ で台が原点を含まないようなものに対し, $\frac{\partial}{\partial r}T$, $\frac{\partial}{\partial \theta}T$ を定義せよ.

(ii) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を次で定める:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta.$$

$f \in C(\mathbb{R}^2)$ で, 台が原点を含まず $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 f = T$ となるものを一つ求めよ.

(iii) $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を次で定める:

$$\langle S, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\theta \, d\theta.$$

$g \in C(\mathbb{R}^2)$ で, 台が原点を含まず $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 g = S$ となるものは存在するか?

[17] $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 $f(x) = (\log|x|)^2$ と $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ に対し, 値 $\langle \triangle T_f, \varphi \rangle$ を φ の偏導関数を用いず φ のみを用いて表せ.

[18] $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ 上の局所可積分関数 $f(x, y) = \log|z^3/(z^2 - i)|$ に対し, $\triangle T_f$ を求めよ.

ノート

第 III 部の内容については主に [C], [FJ], [Ru2, Part II], [SS4, Ch. 3], [Str] を参考にした. 多くの話題が基本解にまつわるものである. $\mathbb{R}^2$ のラプラシアンの基本解については, 例えば [Str, §2.5] で見つけることができる (別の計算法を 12.4 節で紹介する). コーシー・リーマン作用素の基本解については [Tre, §5] が詳しい.

第10講　たたみ込み

$\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 級関数でコンパクト台をもつものをテスト関数とよび, テスト関数の集合を $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ とかいた. 連続な線型写像 $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の超関数とよび, $\mathbb{R}^d$ 上の超関数の集合を $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ とかいた. 本講では, 関数のたたみ込みと両立するように超関数のたたみ込みを定義する. はじめに, 超関数 T とテスト関数 ψ のたたみ込み $T * \psi$ を定義する. そして超関数の台を導入した後, 二つの超関数 T, S に対し, T または S がコンパクト台をもつとき, たたみ込み $T * S$ を定義する. 定義の仕方が複数あるので, それらの同値性も示す.

10.1　テスト関数とのたたみ込み

$T \in \mathcal{D}'$ と $\psi \in \mathcal{D}$ に対し, たたみ込み $T * \psi$ を $\mathbb{R}^d$ 上の関数として定義し, そしてそれが $\mathbb{R}^d$ 上 C^∞ 級であることを示したい. その前に関数の反転とシフトの操作を定義しておく. $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, $\varphi^\sim, \tau_x\varphi \in \mathcal{D}$ を

$$\varphi^\sim(x) = \varphi(-x), \quad (\tau_x\varphi)(y) = \varphi(y-x), \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

で定義する. この記法はこれからずっと使う. 記号の簡略化のため $\tau_x(\varphi^\sim)$ のことを $\tau_x\varphi^\sim$ で表し, これを $(\tau_x\varphi)^\sim$ と区別する.

たたみ込みを定義する. $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 f に対し, 等式

$$(f * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\psi(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(\tau_x\psi^\sim)(y)\,dy = \langle f, \tau_x\psi^\sim\rangle$$

が成り立つ. そこで $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $T * \psi$ を次で定義する:

$$(T * \psi)(x) = \langle T, \tau_x\psi^\sim\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

命題 10.1. 任意の $T \in \mathcal{D}'$, $\psi \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{R}^d$ に対し $\tau_t(T * \psi) = T * (\tau_t\psi)$.

証明. 形式的に計算すればよい. $(T * (\tau_t\psi))(x) = \langle T, \tau_x(\tau_t\psi)^\sim\rangle$ なので, まず $\tau_x(\tau_t\psi)^\sim$ を計算する:

$$(\tau_x(\tau_t\psi)^\sim)(y) = (\tau_t\psi)^\sim(y-x) = (\tau_t\psi)(x-y) = \psi(x-y-t) = (\tau_{x-t}\psi^\sim)(y).$$

よって $\langle T, \tau_x(\tau_t\psi)^\sim\rangle = \langle T, \tau_{x-t}\psi^\sim\rangle = (T * \psi)(x-t) = (\tau_t(T * \psi))(x)$. □

命題 10.2. 任意の $T \in \mathcal{D}'$, $\psi \in \mathcal{D}$ に対し $T * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ であって, 任意の多重指数 α に対し

$$\partial^\alpha(T * \psi) \underset{(1)}{=} (\partial^\alpha T) * \psi \underset{(2)}{=} T * (\partial^\alpha\psi).$$

証明. まず (2) を示す. 等式

$$((\partial^\alpha T) * \psi)(x) = \langle \partial^\alpha T, \tau_x \psi^\sim \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\tau_x \psi^\sim) \rangle$$

が成り立つ. ここで,

$$\partial^\alpha (\tau_x \psi^\sim)(y) = \partial^\alpha ([y \mapsto \psi(x-y)])(y) = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \psi)(x-y) = (-1)^{|\alpha|} \tau_x (\partial^\alpha \psi)^\sim (y)$$

なので, 最初の等式の右辺は $\langle T, \tau_x (\partial^\alpha \psi)^\sim \rangle = (T * (\partial^\alpha \psi))(x)$ に等しい. これで (2) が従う.

関数 $T * \psi$ が C^∞ 級であることと等式 (1) を示す. $\mathbb{R}^d$ の単位ベクトル e に対し D_e で e 方向の微分を表す. 実数 $r \neq 0$ に対し $\eta_r = (\tau_{-re} - \tau_0)/r$ とおくと, $r \to 0$ で

$$(\eta_r \psi)(y) = \frac{\psi(y+re) - \psi(y)}{r} \to (D_e \psi)(y).$$

そして, 任意の多重指数 β に対し,

$$\partial^\beta (\eta_r \psi)(y) = \frac{(\partial^\beta \psi)(y+re) - (\partial^\beta \psi)(y)}{r} \to (D_e \partial^\beta \psi)(y) = \partial^\beta (D_e \psi)(y).$$

ψ の台がコンパクトであることと平均値の定理により, 最後の収束は $y \in \mathbb{R}^d$ について一様である. よって $\mathcal{D}$ で $\eta_r \psi \to D_e \psi$. これより $\mathcal{D}$ で $(\eta_r \psi)^\sim \to (D_e \psi)^\sim$. そして, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $\mathcal{D}$ で $\tau_x (\eta_r \psi)^\sim \to \tau_x (D_e \psi)^\sim$. T の連続性より

$$\langle T, \tau_x (\eta_r \psi)^\sim \rangle \to \langle T, \tau_x (D_e \psi)^\sim \rangle = (T * (D_e \psi))(x).$$

一方, 左辺 $\langle T, \tau_x (\eta_r \psi)^\sim \rangle$ は次に等しい:

$$(T * (\eta_r \psi))(x) = (\eta_r (T * \psi))(x) = \frac{(T * \psi)(x+re) - (T * \psi)(x)}{r}.$$

一つ目の等式は命題 10.1 による. ゆえに $T * \psi$ は e 方向に微分可能で $D_e(T * \psi) = T * (D_e \psi)$. この議論を繰り返すと, $T * \psi$ が C^∞ 級であることが従う. □

例 10.3. 任意の $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し $\delta * \psi = \psi$ である. 実際,

$$(\delta * \psi)(x) = \langle \delta, \tau_x \psi^\sim \rangle = (\tau_x \psi^\sim)(0) = \psi^\sim(-x) = \psi(x).$$

上で与えた $T * \psi$ の定義は, T が関数 f のとき $(f * \psi)(x) = \langle f, \tau_x \psi^\sim \rangle$ とかけることに基づいていた. 一方, 関数 $f * \psi$ は $\mathcal{D}$ 上の汎関数として次の表示をもつ: $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 f と $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle f * \psi, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * \psi)(x) \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \psi(x-y) \varphi(x)\, dy\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) (\psi^\sim * \varphi)(y)\, dy = \langle f, \psi^\sim * \varphi \rangle.\end{aligned}$$

$\psi^\sim * \varphi$ は $\mathcal{D}$ に属することに注意する. この等式の f は $\mathcal{D}'$ の元 T に換えることができる:

命題 10.4. 任意の $T \in \mathcal{D}'$ と $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$\langle T * \psi, \varphi \rangle = \langle T, \psi^{\sim} * \varphi \rangle.$$

(関数 $T * \psi$ は $\mathbb{R}^d$ 上 C^∞ 級なので, これは $\mathbb{R}^d$ 上局所可積分であることに注意する).

証明. 関数 $\psi^{\sim} * \varphi$ をリーマン和の極限として表す:

$$(\psi^{\sim} * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi^{\sim}(x-y)\varphi(y)\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} S_\varepsilon(x).$$

ここで $S_\varepsilon(x) = \varepsilon^d \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \psi^{\sim}(x - \varepsilon v)\varphi(\varepsilon v)$ とおく. 上の等式は各 $x \in \mathbb{R}^d$ で成り立つが, さらに強く, $\varepsilon \to 0$ で S_ε は $\psi^{\sim} * \varphi$ に $\mathcal{D}$ で収束する. 実際, 多重指数 α と $x \in \mathbb{R}^d$ に対し, $\varepsilon \to 0$ で

$$\partial^\alpha S_\varepsilon(x) = \varepsilon^d \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \partial^\alpha(\psi^{\sim})(x - \varepsilon v)\varphi(\varepsilon v) \to \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha(\psi^{\sim})(x-y)\varphi(y)\,dy = ((\partial^\alpha(\psi^{\sim})) * \varphi)(x)$$

となるが, $\psi^{\sim}$ と φ の台がコンパクトであって, $\partial^\alpha(\psi^{\sim})$ と φ は $\mathbb{R}^d$ 上一様連続なので, このリーマン和に関する上積分と下積分の差は $x \in \mathbb{R}^d$ に関して一様に小さくなり, 積分への収束は x に関して一様である. よって S_ε は $\psi^{\sim} * \varphi$ に $\mathcal{D}$ で収束する.

T の連続性より $\langle T, S_\varepsilon \rangle \to \langle T, \psi^{\sim} * \varphi \rangle$. 一方,

$$\begin{aligned}\langle T, S_\varepsilon \rangle &= \varepsilon^d \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \langle T, \tau_{\varepsilon v}\psi^{\sim} \rangle \varphi(\varepsilon v) = \varepsilon^d \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} (T * \psi)(\varepsilon v)\varphi(\varepsilon v) \\ &\to \int_{\mathbb{R}^d} (T * \psi)(y)\varphi(y)\,dy = \langle T * \psi, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

□

10.2　超関数の台

一般に $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f の台 $\operatorname{supp} f$ は, $f|_U = 0$ となる $\mathbb{R}^d$ の開部分集合 U で最大のものをとり, その補集合として定義される. $\mathbb{R}^d$ の開部分集合 U に対し,

$$\mathcal{D}(U) = \{\, \varphi \in \mathcal{D} \mid \operatorname{supp} \varphi \subset U \,\}$$

とおく. $\mathcal{D}'$ の元 T と $\mathbb{R}^d$ の開部分集合 U に対し, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ に対し $\langle T, \varphi \rangle = 0$ となるとき, T は U 上で 0 になると見なし, これを満たす U からなる集合を $\mathcal{U}(T)$ とかく. そして T の**台**を集合 $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{U}(T)$ で定義し, これを $\operatorname{supp} T$ とかく. $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 f に対し, f が U 上 0 ならば $U \in \mathcal{U}(T_f)$ であるが, 逆も成り立つ. 逆の主張は命題 9.2 の証明から従う. これより $\operatorname{supp} f$ と $\operatorname{supp} T_f$ は一致する.

命題 10.5. $T \in \mathcal{D}'$ とする. 集合 Λ の元 λ で添字付けられた $U_\lambda \in \mathcal{U}(T)$ に対し, 和 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $\mathcal{U}(T)$ に属する. よって $\mathcal{U}(T)$ は最大元 $\bigcup \mathcal{U}(T)$ をもつ.

この命題の証明には, 次のよく知られた事実を用いる:

命題 10.6 (1 の局所有限分割)**.** $\mathcal{V}$ を $\mathbb{R}^d$ の開部分集合からなる族とし, $\Omega = \bigcup \mathcal{V}$ とおく. このとき, $\mathcal{D}(\Omega)$ の元の列 $(\psi_i)_{i=1}^\infty$ で次の二条件を満たすものがとれる:

(1) 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し, $0 \le \psi_i \le 1$ かつ $V \in \mathcal{V}$ が存在して $\operatorname{supp} \psi_i \subset V$.

(2) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し, $m \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $x \in K$ に対し $\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) = 1$ (特に, 任意の $x \in \Omega$ に対し $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1$).

証明. Ω の稠密な可算部分集合 S をとる. S の元を中心とし, 半径が有理数であって $\mathcal{V}$ のある元に含まれるような $\mathbb{R}^d$ の開球すべてを番号付け, それを $B_1, B_2, \ldots$ とかく. B_i と同じ中心をもち, 半径が半分の開球を C_i とかく. すると $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ である. $\mathcal{D}(\Omega)$ の元 φ_i で次を満たすものをとる: $0 \le \varphi_i \le 1$ であって, C_i 上で $\varphi_i = 1$ かつ B_i の外で $\varphi_i = 0$. そして,

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_{i+1} = (1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i)\varphi_{i+1} \quad (i \text{ は自然数})$$

と定める. すると B_i の外で $\psi_i = 0$ となり, (1) が従う. また, 次の等式が帰納法により従う: 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し

$$\psi_1 + \cdots + \psi_i = 1 - (1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i).$$

この等式から (2) が従う. □

命題 10.5 の証明. $\lambda \in \Lambda$ に対し $U_\lambda \in \mathcal{U}(T)$ とし, $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とおく. $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ をとる. 開集合族 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に関する 1 の局所有限分割 $(\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ をとる. φ の台はコンパクトなので, $m \in \mathbb{N}$ が存在して $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \psi_i \varphi$. よって $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle T, \psi_i \varphi \rangle = 0$. 最後の等式は $\psi_i \varphi$ の台がある U_λ に含まれ, かつ $U_\lambda \in \mathcal{U}(T)$ なので従う. □

例 10.7. ディラックのデルタ δ の台は $\{0\}$ である. 一般に $T \in \mathcal{D}'$ に対し, T の台が空であることと $T = 0$ であることは同値である.

台に関する基本的な事実を示す.

命題 10.8. $T \in \mathcal{D}'$ とする. 次が成り立つ:

(1) $\varphi \in \mathcal{D}$ が $\operatorname{supp} T$ の近傍で 0 になるならば $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

(2) 任意の多重指数 α に対し $\operatorname{supp}(\partial^\alpha T) \subset \operatorname{supp} T$.

(3) 任意の $\psi \in \mathcal{D}$ に対し $\operatorname{supp}(T * \psi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi$. ここで $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A, B に対し,

$$A + B = \{\, a + b \mid a \in A,\ b \in B \,\}$$

と定める ($A - B$ なども同様に定める).

証明. 簡単のため, $U = \bigcup \mathcal{U}(T) = \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp} T$ とおく.

(1) 仮定を満たす φ は $\mathcal{D}(U)$ に属する (実際, $\operatorname{supp} T$ を含む開集合 V が存在して V 上で $\varphi = 0$ となるが, $\mathbb{R}^d \setminus V$ の各点 x に対し, x を含む開集合 U_x で $U_x \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ となるものをとり, $U_1 = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^d \setminus V} U_x$ とおくと, $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^d \setminus V \subset U_1 \subset U$). よって $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

(2) 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ に対し, $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(U)$ なので $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = 0$. よって U は $\mathcal{U}(\partial^\alpha T)$ に属する.

(3) 点 $x \in \mathbb{R}^d$ が $(T * \psi)(x) = \langle T, \tau_x \psi^{\sim} \rangle \neq 0$ を満たすとする．(1) より $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}(\tau_x \psi^{\sim})$ は空でない．その元 y を一つとる．y は $\operatorname{supp}(\tau_x \psi^{\sim})$ に属するので $x - y \in \operatorname{supp} \psi$. よって

$$x \in y + \operatorname{supp} \psi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi.$$

$\operatorname{supp} \psi$ はコンパクトなので, 次で示す補題 10.9 により $\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi$ は閉集合である．ゆえに $\operatorname{supp}(T * \psi)$ は $\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi$ に含まれる． □

補題 10.9. $A, B \subset \mathbb{R}^d$ とする．A が閉で B がコンパクトならば, $A + B$ は閉である．

証明. 点列の議論で示せる．$a_n \in A$, $b_n \in B$ とし, $\mathbb{R}^d$ で $a_n + b_n \to x$ とする．$x \in A + B$ を示す．B はコンパクトなので, 部分列をとって $b_n \to b \in B$ としてよい．

$$|a_n - (x - b)| \leq |a_n + b_n - x| + |b - b_n|$$

より $a_n \to x - b$. A は閉なので $x - b \in A$. ゆえに $x = (x - b) + b \in A + B$. □

ちなみに, B がコンパクトでなく単に閉のとき, 補題 10.9 の結論は正しくない．実際, $\mathbb{R}^2$ において $A = \{x_2 = 0\}$, $B = \{x_2 \geq e^{x_1}\}$ と定めると $A + B = \{x_2 > 0\}$ であり, A と B はともに閉だが $A + B$ は閉でない．

注意 10.10. 命題 10.8 (1) に関して, $\varphi \in \mathcal{D}$ が $\operatorname{supp} T$ 上で 0 であっても $\langle T, \varphi \rangle = 0$ とは限らない．実際, $d = 1$ でディラックのデルタ δ を考えると, $\varphi(0) = 0$ のとき $\operatorname{supp} \delta'$ $(= \{0\})$ 上で $\varphi = 0$ だが, 一方 $\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$ は 0 になるとは限らない．

10.3 コンパクト台をもつ超関数とのたたみ込み

準備として, $\mathcal{D}'$ の元の連続性を次の有界性で特徴付けておく:

命題 10.11. 線型写像 $T \colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ に対し, T が連続であるためには次の条件が必要十分である: 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対し, $C > 0$ と非負整数 N が存在して, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ となる任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

証明. すべての K に対しこのような C, N が存在すれば, T が連続になることはすぐわかる．逆に, ある K に対し, このような C, N が存在しないとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\varphi_n \in \mathcal{D}$ が存在して $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ かつ

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty.$$

$\psi_n = \varphi_n / (n \sum_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty)$ とおく．$\operatorname{supp} \psi_n \subset K$ であって, 任意の多重指数 α に対し, $n \geq |\alpha|$ ならば $\|\partial^\alpha \psi_n\|_\infty \leq 1/n$ なので $\partial^\alpha \psi_n$ は 0 に $\mathbb{R}^d$ 上一様収束する．よって $\mathcal{D}$ で $\psi_n \to 0$. しかし $|\langle T, \psi_n \rangle| > 1$ なので, T は連続でない． □

もう一つ準備する. 関数 f の反転 $f^{\sim}$ を $f^{\sim}(x) = f(-x)$ で定義した. そこで $T \in \mathcal{D}'$ に対し, その反転 $T^{\sim} \in \mathcal{D}'$ を次で定義する:

$$\langle T^{\sim}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^{\sim} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

次に, コンパクト台をもつ超関数を $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の汎関数に拡張する:

命題 10.12. $T \in \mathcal{D}'$ はコンパクト台をもつとする.

(1) T は次で定義される線型写像 $\bar{T}\colon C^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ に拡張される:

$$\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

ここで $\eta \in \mathcal{D}$ は $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\eta = 1$ となるものであり, この拡張は η のとり方によらない.

(2) $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元 φ, ψ が $\operatorname{supp} T$ の近傍で一致するならば $\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \langle \bar{T}, \psi \rangle$ である.

証明. (1) $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, $\varphi - \eta\varphi$ は $\operatorname{supp} T$ の近傍で 0 なので, 命題 10.8 (1) より $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle$. よって $\bar{T}$ は T の拡張である.

$\zeta \in \mathcal{D}$ で $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\zeta = 1$ となるものをとる. 任意の $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\eta\varphi - \zeta\varphi$ は $\operatorname{supp} T$ の近傍で 0 なので $\langle T, \eta\varphi \rangle = \langle T, \zeta\varphi \rangle$. よって拡張 $\bar{T}$ は η のとり方によらない.

(2) $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元 φ, ψ が $\operatorname{supp} T$ の近傍で一致するとき, $\eta\varphi - \eta\psi$ が $\operatorname{supp} T$ の近傍で 0 になるので従う. □

$T, S \in \mathcal{D}'$ とし, T または S はコンパクト台をもつとする. たたみ込み $T * S \in \mathcal{D}'$ を定義する.

(1) S がコンパクト台をもつとき,

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, S^{\sim} * \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

と定める. $S^{\sim} * \varphi \in \mathcal{D}$ に注意する.

(2) T がコンパクト台をもつとき, T の $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ への拡張 $\bar{T}$ を用いて

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle \bar{T}, S^{\sim} * \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

と定める. $S^{\sim} * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に注意する.

T も S もコンパクト台をもつとき, 両者の定義が一致することに注意する. 写像 $T * S\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ が実際に $\mathcal{D}'$ に属することは, 次の補題から従う:

補題 10.13. $\mathcal{D}$ で $\psi_n \to \psi$ とする. 次が成り立つ:

(1) コンパクト台をもつ任意の $R \in \mathcal{D}'$ に対し, $\mathcal{D}$ で $R * \psi_n \to R * \psi$.

(2) 任意の $R \in \mathcal{D}'$ と $\eta \in \mathcal{D}$ に対し, $\mathcal{D}$ で $\eta(R * \psi_n) \to \eta(R * \psi)$.

証明. (1) $\mathcal{D}$ で $\psi_n \to \psi$ なので, コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ が存在して, ψ_n と ψ の台は K に含まれる. よって $R * \psi_n$ と $R * \psi$ の台は $\operatorname{supp} R + K$ に含まれる. 点 $x \in \operatorname{supp} R + K$ と多重指数 α に対し,

$$\begin{aligned}
&|\partial^\alpha (R * \psi_n)(x) - \partial^\alpha (R * \psi)(x)| = |(R * (\partial^\alpha \psi_n))(x) - (R * (\partial^\alpha \psi))(x)| \\
&= |\langle R, \tau_x(\partial^\alpha \psi_n - \partial^\alpha \psi)^{\sim} \rangle| \leq C \sum_{|\beta| \leq N} \|\partial^\beta (\tau_x (\partial^\alpha \psi_n - \partial^\alpha \psi)^{\sim})\|_\infty \\
&= C \sum_{|\beta| \leq N} \|\partial^{\alpha+\beta} \psi_n - \partial^{\alpha+\beta} \psi\|_\infty \to 0.
\end{aligned}$$

ここで C と N は R の有界性 (命題 10.11) からくる定数で, コンパクト集合 $\operatorname{supp} R + K - K$ に対するものである. 最後の収束は $\mathcal{D}$ で $\psi_n \to \psi$ であることから従う. 右辺は x によらないので, この収束は $x \in \operatorname{supp} R + K$ に関して一様である. ゆえに $\mathcal{D}$ で $R * \psi_n \to R * \psi$.

(2) $\mathcal{D}$ で $\psi_n \to \psi$ なので, コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ が存在して, ψ_n と ψ の台は K に含まれる. 点 $x \in \operatorname{supp} \eta$ と多重指数 α に対し, ライプニッツ則より多重指数 α_1, α_2 にしかよらない定数 $c_{\alpha_1 \alpha_2}$ が存在して,

$$\begin{aligned}
&|\partial^\alpha (\eta (R * \psi_n))(x) - \partial^\alpha (\eta (R * \psi))(x)| \\
&= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{\alpha_1 \alpha_2} |(\partial^{\alpha_1} \eta)(x)| \, |\partial^{\alpha_2} (R * \psi_n)(x) - \partial^{\alpha_2} (R * \psi)(x)| \\
&\leq \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{\alpha_1 \alpha_2} \|\partial^{\alpha_1} \eta\|_\infty \, C \sum_{|\beta| \leq N} \|\partial^{\alpha_2+\beta} \psi_n - \partial^{\alpha_2+\beta} \psi\|_\infty \to 0.
\end{aligned}$$

ここで C と N は R の有界性 (命題 10.11) からくる定数で, コンパクト集合 $\operatorname{supp} \eta - K$ に対するものである. 上の不等式は (1) と同様にして得られる. あとの証明も (1) と同様である. □

たたみ込みの基本性質をいくつか示す. たたみ込みの可換性を示すために少し準備する.

命題 10.14. 任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ と $T \in \mathcal{D}'$ に対し, 次の等式が成り立つ:

(1) $T^{\sim} * \psi^{\sim} = (T * \psi)^{\sim}$.

(2) $(T * \psi) * \varphi = T * (\psi * \varphi)$.

証明. (1) $x \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$(\tau_x \psi)^{\sim}(y) = (\tau_x \psi)(-y) = \psi(-y-x) = \psi^{\sim}(x+y) = (\tau_{-x} \psi^{\sim})(y)$$

なので,

$$(T^{\sim} * \psi^{\sim})(x) = \langle T^{\sim}, \tau_x \psi \rangle = \langle T, \tau_{-x} \psi^{\sim} \rangle = (T * \psi)(-x) = (T * \psi)^{\sim}(x).$$

(2) $x \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$((T * \psi) * \varphi)(x) = \langle T * \psi, \tau_x \varphi^{\sim} \rangle = \langle T, \psi^{\sim} * (\tau_x \varphi^{\sim}) \rangle.$$

また,

$$\psi^{\sim} * (\tau_x \varphi^{\sim}) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi^{\sim}(\cdot - y)\varphi^{\sim}(y - x)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \psi^{\sim}(\cdot - x - y)\varphi^{\sim}(y)\, dy$$
$$= \tau_x(\psi^{\sim} * \varphi^{\sim}) = \tau_x((\psi * \varphi)^{\sim})$$

なので, 前の等式の右辺は次に等しい: $\langle T, \tau_x((\psi * \varphi)^{\sim})\rangle = (T * (\psi * \varphi))(x)$. □

命題 10.15. $T, S \in \mathcal{D}'$ とし, T または S はコンパクト台をもつとする. このとき

$$T * S = S * T.$$

証明. S がコンパクト台をもつとしてよい. まず $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ として, 次の等式を示す:

$$\langle T * S, \varphi * \psi\rangle = \langle S * T, \varphi * \psi\rangle. \tag{10.1}$$

形式的な計算が続くが, 関数のたたみ込みの可換性に持ち込むのがポイントである. まず,

$$\langle T * S, \varphi * \psi\rangle = \langle T, S^{\sim} * (\varphi * \psi)\rangle = \langle T, (S^{\sim} * \varphi) * \psi\rangle = \langle T, \psi * (S^{\sim} * \varphi)\rangle$$
$$= \langle T * \psi^{\sim}, S^{\sim} * \varphi\rangle = \langle T^{\sim} * \psi, S * \varphi^{\sim}\rangle.$$

二つ目と五つ目の等式では命題 10.14 を使い, 三つ目の等式では $S^{\sim} * \varphi \in \mathcal{D}$ であることと, 関数のたたみ込みの可換性を使った. 四つ目の等式は命題 10.4 による. $T^{\sim} * \psi$ は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元ではあるが, $\mathcal{D}$ の元とは限らないことに注意する. $\operatorname{supp} S$ の近傍を含むコンパクト集合 K をとる. $\eta \in \mathcal{D}$ で $K - \operatorname{supp}\varphi$ の近傍で $\eta = 1$ となるものをとる. $\operatorname{supp}(S * \varphi^{\sim}) \subset K - \operatorname{supp}\varphi$ なので, 上の等式の右辺は次に等しい:

$$\langle S * \varphi^{\sim}, \eta(T^{\sim} * \psi)\rangle = \langle S, \varphi * (\eta(T^{\sim} * \psi))\rangle = \langle S, (\eta(T^{\sim} * \psi)) * \varphi\rangle.$$

任意の $x \in K$ に対し,

$$((\eta(T^{\sim} * \psi)) * \varphi)(x) = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \underbrace{\eta(x - y)}_{=1}(T^{\sim} * \psi)(x - y)\varphi(y)\, dy = ((T^{\sim} * \psi) * \varphi)(x).$$

特に $\operatorname{supp} S$ の近傍で $(\eta(T^{\sim} * \psi)) * \varphi$ と $(T^{\sim} * \psi) * \varphi$ は等しい. S の $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ への拡張を $\bar{S}$ とすると, このことから次の二つ目の等式が従う:

$$\langle S, (\eta(T^{\sim} * \psi)) * \varphi\rangle = \langle \bar{S}, (T^{\sim} * \psi) * \varphi\rangle = \langle \bar{S}, T^{\sim} * (\psi * \varphi)\rangle = \langle S * T, \psi * \varphi\rangle$$
$$= \langle S * T, \varphi * \psi\rangle.$$

これで等式 (10.1) が得られた.

$\mathcal{D}$ の元で $\varphi * \psi$ の形をしたもの全体は $\mathcal{D}$ で稠密である. 実際, $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx = 1$ となる $\varphi \in \mathcal{D}$ をとり $\varphi_n(x) = n^d \varphi(nx)$ とおくと, 列 (φ_n) は $\mathbb{R}^d$ 上の総和核となり, 任意の $\psi \in \mathcal{D}$ に対し $\mathcal{D}$ で $\varphi_n * \psi \to \psi$. $T * S$ と $S * T$ は連続なので, 等式 (10.1) より, 等式 $\langle T * S, \psi\rangle = \langle S * T, \psi\rangle$ が任意の $\psi \in \mathcal{D}$ に対して成り立つ. □

命題 10.16. 任意の $T \in \mathcal{D}'$ に対し $T * \delta = T = \delta * T$.

実際, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し $\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T, \delta^\sim * \varphi \rangle = \langle T, \delta * \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

命題 10.17. $T, S \in \mathcal{D}'$ とし, T または S はコンパクト台をもつとする. このとき, 任意の多重指数 α に対し

$$\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S).$$

証明. 命題 10.15 より S がコンパクト台をもつとしてよい. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T * S, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, S^\sim * (\partial^\alpha \varphi) \rangle. \tag{10.2}$$

命題 10.2 より $S^\sim * (\partial^\alpha \varphi) = \partial^\alpha (S^\sim * \varphi)$. これを用いると, 等式 (10.2) の右辺は次に等しい:

$$(-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (S^\sim * \varphi) \rangle = \langle \partial^\alpha T, S^\sim * \varphi \rangle = \langle (\partial^\alpha T) * S, \varphi \rangle.$$

これで目標の一つ目の等式を得た. 一方, $\psi \in \mathcal{D}$ に対し

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha (S^\sim), \psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle S^\sim, \partial^\alpha \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S, (\partial^\alpha \psi)^\sim \rangle = \langle S, \partial^\alpha (\psi^\sim) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha S, \psi^\sim \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle (\partial^\alpha S)^\sim, \psi \rangle \end{aligned}$$

なので $\partial^\alpha (S^\sim) = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha S)^\sim$. 命題 10.2 で示した等式 $S^\sim * (\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha (S^\sim)) * \varphi$ と併せて, 等式 (10.2) の右辺は次に等しい:

$$(-1)^{|\alpha|} \langle T, (\partial^\alpha (S^\sim)) * \varphi \rangle = \langle T, (\partial^\alpha S)^\sim * \varphi \rangle = \langle T * (\partial^\alpha S), \varphi \rangle.$$

これで目標の二つ目の等式を得た. □

命題 10.18. $T, S \in \mathcal{D}'$ とし, T または S はコンパクト台をもつとする. このとき,

$$\operatorname{supp} (T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S.$$

証明. 補題 10.9 より $\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$ は閉である. $\varphi \in \mathcal{D}$ で台が $\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$ と交わらないものをとる. $\langle T * S, \varphi \rangle = 0$ を示せばよい. 次の包含が成り立つ:

$$\operatorname{supp} (S^\sim * \varphi) \subset \operatorname{supp} S^\sim + \operatorname{supp} \varphi = \operatorname{supp} \varphi - \operatorname{supp} S.$$

右辺は $\operatorname{supp} T$ と交わらないので, $S^\sim * \varphi$ は $\operatorname{supp} T$ の近傍で 0 になる. ゆえに命題 10.8 (1) より $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle \bar{T}, S^\sim * \varphi \rangle = 0$. □

演習問題

[1] $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ を $\mathbb{R}^d$ 上の総和核で $\mathcal{D}$ の元からなるものとする. 任意の $T \in \mathcal{D}'$ と $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, $\langle T * \psi_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ を示せ.

[2] すべての $\psi \in \mathcal{D}$ に対し $T * \psi = \psi$ となるような $T \in \mathcal{D}'$ を求めよ.

[3] すべての $\psi \in \mathcal{D}$ に対し $T * \psi = 0$ となるような $T \in \mathcal{D}'$ を求めよ.

[4] コンパクト台をもつ $T \in \mathcal{D}'$ と定数関数 1 のたたみ込み $T * 1$ は何か?

[5] $\mathrm{pv}(1/x)$ の台を求めよ.

[6] $\mathrm{pv}(1/x) * \chi_{[a,b]}$ を求めよ.

[7] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を次で定める:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(0, y)\, dy.$$

(i) $\operatorname{supp} T$ を求めよ.

(ii) 0 でない非負値の $\psi \in \mathcal{D}$ に対し, $T * \psi$ の台はコンパクトでないことを示せ.

(iii) 0 でない $\psi \in \mathcal{D}$ で $T * \psi$ の台がコンパクトになるようなものは存在するか?

[8] $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を次で定める:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x, 0)\, dx, \qquad \langle S, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(0, y)\, dy.$$

(i) たたみ込み $T * \chi_{[0,1]\times[0,1]}$, $T * \chi_{\mathbb{R}\times[0,1]}$, $T * S$ を求めよ.

(ii) コンパクト台をもたない $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ で, $T * R$ はコンパクト台をもつようなものは存在するか?

[9] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ と $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し, $fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ の台は $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} f$ に含まれることを示せ.

[10] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ はコンパクト台をもつとし, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ で $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\eta = 1$ となるものをとり, $\mathbb{R}^d$ 上の関数 F を $F(x) = \langle T, \eta(\tau_x f^\sim) \rangle$ で定める. このとき, F は $\mathbb{R}^d$ 上 C^∞ 級であって, 等式 $T * f = F$ を満たすことを示せ (F が連続であることはすぐにわかり, 等式 $T * f = F$ は命題 10.4 の証明に倣って示せる. F が C^∞ 級であることはこれらから従う. 命題 11.4 も参照せよ).

[11] コンパクト台をもつ $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ と $f \in C(\mathbb{R})$ で, $T * f$ が $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数からくる超関数にならないような例を与えよ.

[12] $z \in \mathbb{C}$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = e^{zx}$ を考える. コンパクト台をもつ $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対し, $T * f$ は f の定数倍であることを示せ.

[13] $a \in \mathbb{R}^d$ に対し, $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ を $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ で定める. 等式 $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ を示せ.

[14] $\mathbb{R}^d$ 上の複素ボレル測度 μ, ν に対し, たたみ込み $\mu * \nu$ を次で定める: $\Phi\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を足し算写像 $(x, y) \mapsto x + y$ とし, 積測度 $\mu \times \nu$ の Φ による像測度を $\mu * \nu$ とする. つまり, ボレル可測集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し,

$$(\mu * \nu)(A) = (\mu \times \nu)(\Phi^{-1}(A))$$

と定める. 一方, $\mathbb{R}^d$ 上の複素ボレル測度 μ に対し, $T_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ が $\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mu$ で定まる. μ と ν がコンパクト台をもつとき, $T_\mu * T_\nu = T_{\mu * \nu}$ を示せ.

[15] 単位円周 $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ 上のルベーグ測度を μ とし, それを $\mathbb{R}^2$ 上のボレル測度と見なす. 言い換えると, $T_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を次で定める:

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta) \, d\theta.$$

$\mu * \mu$ を求めよ.

ノート

この講の内容は [Ru2, Ch. 6], [SS4, 3.1.2, 3.1.3] に基づく.

第11講　コンパクト台をもつ超関数

11.1　連続関数の微分として表す

本節では次を示す: 任意の超関数 T は, 局所的には連続関数 f と多重指数 α を用いて $\partial^\alpha f$ の形にかける. さらに T がコンパクト台をもてば, 有限個のコンパクト台をもつ連続関数 $f_1, \dots, f_n$ と多重指数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が存在して

$$T = \sum_{k=1}^{n} \partial^{\alpha_k} f_k.$$

超関数が関数のように扱えることを前講まで示してきたが, この結果により超関数は本当に関数みたいなもので, その差は超関数の微分の操作のみからくることがわかる. このことを知っていれば, 超関数の性質の多くを関数の場合に帰着させて示すことができる. 例えば $T \in \mathcal{D}'$ がコンパクト台をもつとき, T を上のように連続関数の微分の和としてかくことで, 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し $T * f$ が C^∞ 級関数になることを示すことができる. また, すでに示したことだが, 任意の $T \in \mathcal{D}'$ と $\psi \in \mathcal{D}$ に対し $T * \psi$ が C^∞ 級関数になること (命題 10.4) についても, T が連続関数の微分としてかけることを知っていれば, 関数の場合に帰着させて示すことができる.

例 11.1. $\mathbb{R}$ 上のディラックのデルタ δ を, コンパクト台をもつ連続関数の微分の有限和として表してみる. $\mathbb{R}$ 上の関数 g を $x \geq 0$ のとき $g(x) = x$ とし, $x < 0$ のとき $g(x) = 0$ として定めると, $g' = H$ (ヘヴィサイド関数, 例 9.5) かつ $g'' = \delta$ であることを思い出す. そこで, コンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の連続関数 h で次を満たすものをとる: $x < 0$ のとき $h(x) = 0$ であって, $x \geq 0$ のとき, 原点の近くでは $h(x) = x$ であり, 原点以外では h は C^∞ 級である. すると, h'' は原点付近の原点以外の点では 0 になるため, 超関数の意味での微分 h'' は δ とある $\mathcal{D}$ の元 φ の和になる (φ の台は $\{x > 0\}$ に含まれる). よって $\delta = h'' - \varphi$ となり, これで表せた.

一方, δ を一つのコンパクト台をもつ連続関数の微分として表すことはできない. 実際, $T' = \delta$ となる $T \in \mathcal{D}$ は定数 c_0 を用いて $H + c_0$ と表され (命題 9.10), これは連続でない. また, $S'' = \delta$ となる $S \in \mathcal{D}$ は定数 c_0, c_1 を用いて $g + c_0 x + c_1$ と表され, これは $\mathbb{R}$ 上の連続関数ではあるが, コンパクト台をもたない. 高階の微分についても同様である.

N を非負整数とする. $\mathcal{D}'$ の元 T が**オーダー** N であるとは, $C > 0$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, 次の不等式が成り立つときをいう:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

例 11.2. α を多重指数とし, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ とする. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$|\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_1 \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

なので, $\partial^\alpha f$ はオーダー $|\alpha|$ である. 特にコンパクト台をもつ連続関数 f に対し, $\partial^\alpha f$ はオーダー $|\alpha|$ である. また, ディラックのデルタ δ に対し, $\partial^\alpha \delta$ はオーダー $|\alpha|$ である.

命題 11.3. $T \in \mathcal{D}'$ がコンパクト台をもつならば, ある非負整数 N が存在して T はオーダー N である.

証明. 台 $\operatorname{supp} T$ を距離 1 だけふくらませたコンパクト集合を K とかく. 命題 10.11 で示した T の有界性より, $C > 0$ と非負整数 N が存在して, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ となる任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$|\langle T, \varphi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

$\eta \in \mathcal{D}$ で $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\eta = 1$ かつ $\mathbb{R}^d \setminus K$ 上で $\eta = 0$ となるものをとる. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, $\operatorname{supp} (\eta\varphi) \subset K$ なので

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \eta\varphi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha (\eta\varphi)\|_\infty \le C \sum_{|\alpha| \le N} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{\alpha_1 \alpha_2} \|\partial^{\alpha_1} \eta\|_\infty \|\partial^{\alpha_2} \varphi\|_\infty.$$

最後の不等式はライプニッツ則による. よって T はオーダー N である. □

命題 11.4. $T \in \mathcal{D}'$ はコンパクト台をもち, オーダー N であるとする. 任意の $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ に対し, たたみ込み $T * f \in \mathcal{D}'$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数である.

この命題は T を連続関数の微分で表すのに必要になるのだが, 証明は長いので本節の最後に与える. もし T がコンパクト台をもつ連続関数 g と $|\alpha| \le N$ となる多重指数 α を用いて $T = \partial^\alpha g$ とかけるならば, $T * f = (\partial^\alpha g) * f = g * (\partial^\alpha f)$ で $\partial^\alpha f$ は連続関数なので, この場合は $T * f$ が連続関数になることがすぐにわかる. 命題 11.4 を仮定して次を示す:

定理 11.5. $T \in \mathcal{D}'$ はコンパクト台をもつとし, オーダー N であるとする. このとき, $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 g が存在して

$$\partial_1^{N+2} \partial_2^{N+2} \cdots \partial_d^{N+2} g = T.$$

ただし, $\partial_i^n = (\frac{\partial}{\partial x_i})^n$ とかく.

証明. $\mathbb{R}^d$ 上の関数 E を次で定義する: $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$E(x) = \begin{cases} x_1^{N+1} \cdots x_d^{N+1} / ((N+1)!)^d & \text{すべての } x_i \text{ が正のとき,} \\ 0 & \text{その他のとき.} \end{cases}$$

E は $\mathbb{R}^d$ 上 C^N 級である. そして, 等式

$$\partial_1^{N+2} \cdots \partial_d^{N+2} E = \delta$$

が成り立つ. つまり, E は微分作用素 $\partial_1^{N+2} \cdots \partial_d^{N+2}$ の基本解である. これは次のように考えればよい. まず, 通常の関数として $\partial_1^{N+1} \cdots \partial_d^{N+1} E$ は, すべての座標 x_i が正となる領域上で 1 になり, その他の部分で 0 になることがわかる. さらに各変数で一回ずつ微分すると δ になるのだが,

これは $d=1$ のときにヘヴィサイド関数の微分がディラックのデルタになることから推察できる ($d=2$ のときに考えてみるとよい).

$g=T*E$ とおくと, 命題 11.4 より g は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数である. そして

$$\partial_1^{N+2}\cdots\partial_d^{N+2}g=T*(\partial_1^{N+2}\cdots\partial_d^{N+2}E)=T*\delta=T. \qquad \square$$

例 11.6. 例 11.1 の関数 g に対し, $g'=H$ であり $g''=\delta$ である. これでオーダー 0 の超関数 δ を連続関数の二回微分として表せた. 一方, δ を連続関数の一回微分として表すことはできない. よって, 定理 11.5 の結論では $N+2$ 回微分をとる必要がある.

系 11.7. 任意の $T\in\mathcal{D}'$ は局所的に連続関数の微分として表せる. より詳しく述べると, 任意の有界開集合 $U\subset\mathbb{R}^d$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 f と多重指数 α が存在して, 任意の $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ に対し $\langle T,\varphi\rangle=\langle\partial^\alpha f,\varphi\rangle$.

証明. $\eta\in\mathcal{D}$ で U 上で $\eta=1$ となるものをとる. $S\in\mathcal{D}'$ を $\langle S,\varphi\rangle=\langle T,\eta\varphi\rangle$ で定める. S の台は η の台に含まれ, よってコンパクトである. 定理 11.5 より, $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 f と多重指数 α が存在して $S=\partial^\alpha f$. 任意の $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ に対し, $\eta\varphi=\varphi$ なので $\langle S,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle$. $\square$

上の証明で定義した S は ηT とかかれる. η が $\mathcal{D}$ の元でなく $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元であっても $\mathcal{D}'$ の元 ηT が同様に定義される.

系 11.8. コンパクト台をもつ任意の超関数は, コンパクト台をもつ連続関数の微分の有限和として表せる. より詳しく述べると, コンパクト台をもつ任意の $T\in\mathcal{D}'$ と $\operatorname{supp}T$ を含む任意の開部分集合 $U\subset\mathbb{R}^d$ に対し, 有限個の $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 $f_1,\dots,f_n$ と多重指数 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ が存在して, 任意の $k=1,\dots,n$ に対し $\operatorname{supp}f_k\subset U$ であって, $T=\sum_{k=1}^n\partial^{\alpha_k}f_k$.

証明. 一般に $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ と $T\in\mathcal{D}'$ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$\eta(\partial^\beta T)=\sum_{\alpha\le\beta}(-1)^{|\alpha|}\frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\,\alpha!}\partial^{\beta-\alpha}((\partial^\alpha\eta)T).$$

ここで, 多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_d)$ に対し, $\alpha\le\beta$ とは任意の i に対し $\alpha_i\le\beta_i$ であることを意味する. そしてこのとき, 多重指数 $\beta-\alpha$ を $\beta-\alpha=(\beta_1-\alpha_1,\dots,\beta_d-\alpha_d)$ で定める. $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_d!$ とおく. 上の等式は積の微分の公式 $\eta f'=(\eta f)'-\eta' f$ の一般化であり, ライプニッツ則より従う (確かめよ).

$\eta\in\mathcal{D}$ で $\operatorname{supp}T$ の近傍で $\eta=1$ であって $\operatorname{supp}\eta\subset U$ となるものをとる. 定理 11.5 より, $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 g と多重指数 β が存在して $T=\partial^\beta g$. 上で示した等式より, 定数 $c_{\alpha\beta}$ が存在して

$$T=\eta(\partial^\beta g)=\sum_{\alpha\le\beta}c_{\alpha\beta}\partial^{\beta-\alpha}((\partial^\alpha\eta)g).$$

連続関数 $(\partial^\alpha\eta)g$ の台は η の台に含まれ, よって U に含まれる. $\square$

本節の残りで, 後回しにしていた命題の証明をする.

命題 11.4 の証明. $\psi \in \mathcal{D}$ で $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx = 1$ となるものをとり, $\psi_n \in \mathcal{D}$ を $\psi_n(x) = n^d \psi(nx)$ で定める. 次を示す: $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$F_n(x) = \langle \bar{T}, \tau_x(\psi_n * f)^{\sim} \rangle$$

とおくと, 極限 $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ が存在し, 関数 F は $\mathbb{R}^d$ 上連続である. そして $T * f = F$ である. ここで, $\bar{T}$ は T の $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ への拡張である (10.3 節).

注意 11.9. $F_n(x)$ の定義において, $\tau_x(\psi_n * f)^{\sim}$ は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元であることに注意する. 証明を進める前に, この $F_n(x)$ を考える動機について述べておく. 10.1 節では $S \in \mathcal{D}'$ と $\psi \in \mathcal{D}$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $S * \psi$ を $(S * \psi)(x) = \langle S, \tau_x \psi^{\sim} \rangle$ で定義した. これを踏まえると, $T * f$ のことを知るために $\langle T, \tau_x f^{\sim} \rangle$ という値を考えたいところだが, 今 f は $\mathcal{D}$ の元とは限らないので, この値を直接考えることはできない. そこで f をたたみ込み $\psi_n * f$ で近似してやる. ただ, $\psi_n * f$ は C^∞ 級だがコンパクト台をもつとは限らないので, さらに拡張 $\bar{T}$ を考えるという次第である.

$\eta \in \mathcal{D}$ で $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\eta = 1$ となるものをとる. 拡張 $\bar{T}$ は

$$\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

で定義されたことを思い出す. 各 n に対し, $\mathbb{R}^d$ で $x \to a$ のとき, $\mathcal{D}$ で

$$\eta\tau_x(\psi_n * f)^{\sim} \to \eta\tau_a(\psi_n * f)^{\sim}$$

なので, 関数 F_n は $\mathbb{R}^d$ 上連続である.

極限 $F(x)$ の存在と F の連続性の証明. 数列 $(F_n(x))_n$ がコーシー列であることを示す. T はオーダー N なので, それに対する定数 C が存在して

$$|F_n(x) - F_m(x)| \le C \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha(\eta\tau_x(\psi_n * f)^{\sim}) - \partial^\alpha(\eta\tau_x(\psi_m * f)^{\sim})\|_\infty. \tag{11.1}$$

$(\psi_n * f)^{\sim} = \psi_n^{\sim} * f^{\sim}$ であること (命題 10.14 (1)) とライプニッツ則より

$$\partial^\alpha(\eta\tau_x(\psi_n * f)^{\sim}) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{\alpha_1\alpha_2}(\partial^{\alpha_1}\eta)\partial^{\alpha_2}[\tau_x(\psi_n^{\sim} * f^{\sim})].$$

また, $\partial^{\alpha_2}[\tau_x(\psi_n^{\sim} * f^{\sim})] = \tau_x\partial^{\alpha_2}(\psi_n^{\sim} * f^{\sim}) = \tau_x(\psi_n^{\sim} * \partial^{\alpha_2}(f^{\sim}))$ なので

$$(11.1)\text{ の右辺} \le C \sum_{|\alpha| \le N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{\alpha_1\alpha_2}\|(\partial^{\alpha_1}\eta)\tau_x(\psi_n^{\sim} * \partial^{\alpha_2}(f^{\sim}) - \psi_m^{\sim} * \partial^{\alpha_2}(f^{\sim}))\|_\infty. \tag{11.2}$$

一般に $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 g に対し, $n \to \infty$ で $\psi_n^{\sim} * g$ が g に $\mathbb{R}^d$ 上広義一様収束することが次の等式から従う ($\mathbb{R}^d$ 上広義一様収束するとは, $\mathbb{R}^d$ の任意のコンパクト部分集合上で一様収束することを意味する):

$$(\psi_n^{\sim} * g)(x) - g(x) = \int_B \psi_n^{\sim}(y)(g(x-y) - g(x))\,dy.$$

ただし, B は原点中心で $\operatorname{supp}\psi^{\sim}$ を含む閉球である. n を大きくすると $\psi_n^{\sim}$ が原点に集中していくことに注意すればよい.

f は C^N 級なので (11.2) の右辺の $\partial^{\alpha_2}(f^\sim)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数である．よって (11.2) の右辺は $n,m\to\infty$ で 0 に収束する．さらにこの収束は $x\in\mathbb{R}^d$ に関して広義一様である．ゆえに $(F_n(x))_n$ はコーシー列となり, 極限 $F(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x)$ が存在する．そして各 F_n は連続なので F も連続になる．

等式 $T*f=F$ の証明. $\varphi\in\mathcal{D}$ をとる．等式

$$\langle T,\eta(f^\sim*\varphi)\rangle=\langle F,\varphi\rangle$$

を示せばよい．この等式は命題 10.4 で示した等式と形が似ている．そこで, 命題 10.4 の証明に倣って $\varepsilon>0$ に対するリーマン和

$$S_{n,\varepsilon}(x)=\varepsilon^d\sum_{v\in\mathbb{Z}^d}\eta(x)(\psi_n*f)^\sim(x-\varepsilon v)\varphi(\varepsilon v)$$

を考えてみる．すると,

$$\begin{aligned}\langle T,S_{n,\varepsilon}\rangle&=\varepsilon^d\sum_{v\in\mathbb{Z}^d}\langle T,\eta\tau_{\varepsilon v}(\psi_n*f)^\sim\rangle\varphi(\varepsilon v)\\&=\varepsilon^d\sum_{v\in\mathbb{Z}^d}F_n(\varepsilon v)\varphi(\varepsilon v)\underset{n\to\infty}{\to}\varepsilon^d\sum_{v\in\mathbb{Z}^d}F(\varepsilon v)\varphi(\varepsilon v)\underset{\varepsilon\to0}{\to}\langle F,\varphi\rangle.\end{aligned}\tag{11.3}$$

最後の収束で F の連続性を使った．

次に, n をとめる．各 $x\in\mathbb{R}^d$ に対し,

$$S_{n,\varepsilon}(x)\underset{\varepsilon\to0}{\to}\eta(x)((\psi_n*f)^\sim*\varphi)(x)\tag{11.4}$$

となるが, さらに強く, この収束は $\mathbb{R}^d$ 上一様である．これは次のように考えるとよい．まず, リーマン和 $S_{n,\varepsilon}(x)$ においては $x\in\operatorname{supp}\eta$ と $\varepsilon v\in\operatorname{supp}\varphi$ に対する寄与しか考える必要がなく, よって関数 $(\psi_n*f)^\sim$ についてはコンパクト集合 $\operatorname{supp}\eta-\operatorname{supp}\varphi$ 上でのみ考えればよい．そこではその関数は一様連続になるので, ε を小さくすれば $x\in\operatorname{supp}\eta$ に関係なく, 辺の長さが ε の立方体上での値の変化を小さくできる．ゆえに, リーマン和 $S_{n,\varepsilon}(x)$ と積分 $\eta(x)((\psi_n*f)^\sim*\varphi)(x)$ の差は $x\in\operatorname{supp}\eta$ によらずに小さくなる．

$(\psi_n*f)^\sim$ は $f^\sim$ に $\mathbb{R}^d$ 上広義一様収束するので, $(\psi_n*f)^\sim$ は $\mathbb{R}^d$ の任意のコンパクト部分集合上で n に関して同程度一様連続である (つまり, 一様連続性の定義における ε に対する δ が n によらずにとれる)．よって, 実は (11.4) の収束は n に関しても一様である．

同様に $|\beta|\le N$ となる多重指数 β に対し $\partial^\beta S_{n,\varepsilon}$ は $\partial^\beta(\eta((\psi_n*f)^\sim*\varphi))$ に $\mathbb{R}^d$ 上一様収束し, さらにこの収束は n に関しても一様である．これは $\partial^\beta[(\psi_n*f)^\sim]=\psi_n^\sim*\partial^\beta(f^\sim)$ であることに注意すればよい．ここでも f が C^N 級であることを使う．T がオーダー N であることより

$$\langle T,S_{n,\varepsilon}\rangle\underset{\varepsilon\to0}{\to}\langle T,\eta((\psi_n*f)^\sim*\varphi)\rangle\tag{11.5}$$

であって, さらにこの収束は n に関して一様である．また, $(\psi_n*f)^\sim$ が $n\to\infty$ で $f^\sim$ に $\mathbb{R}^d$ 上広義一様収束することから, $\mathcal{D}$ で $\eta((\psi_n*f)^\sim*\varphi)\to\eta(f^\sim*\varphi)$ であることがわかる．よって,

$$\langle T,\eta((\psi_n*f)^\sim*\varphi)\rangle\underset{n\to\infty}{\to}\langle T,\eta(f^\sim*\varphi)\rangle.$$

(11.3) と併せると, あとは $n\to\infty$ と $\varepsilon\to0$ に関する極限が交換できればよいが, それは (11.5) の収束が n に関して一様であることから従う． □

11.2　台が一点からなる超関数

ディラックのデルタ δ やその微分は原点のみからなる台をもつ. そして, それらの和もそうである. 実はこの逆が成り立つ:

定理 11.10. $T \in \mathcal{D}'$ は $\operatorname{supp} T = \{0\}$ を満たすとする. このとき, 非負整数 N と複素数 a_α が存在して

$$T = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha \partial^\alpha \delta.$$

証明. T はコンパクト台をもつので, 非負整数 N が存在して T はオーダー N である (命題 11.4). つまり $C > 0$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, 不等式 $|\langle T, \varphi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$ が成り立つ. 次を用意する:

補題 11.11. $\varphi \in \mathcal{D}$ とする. もし $|\alpha| \le N$ となる任意の多重指数 α に対し $(\partial^\alpha \varphi)(0) = 0$ ならば, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

証明. $\psi \in \mathcal{D}$ で $0 \le \psi \le 1$ であって, $|x| < 4/3$ ならば $\psi(x) = 1$, $|x| > 5/3$ ならば $\psi(x) = 0$ となるものをとる. $\varepsilon > 0$ に対し $\psi_\varepsilon(x) = \psi(x/\varepsilon)$ で $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}$ を定める. $\varepsilon \to 0$ として φ を $(1 - \psi_\varepsilon)\varphi$ で近似する. より正確には, φ に対する仮定を使って, $|\alpha| \le N$ となる任意の多重指数 α に対し

$$\|\partial^\alpha(\varphi - (1 - \psi_\varepsilon)\varphi)\|_\infty = \|\partial^\alpha(\psi_\varepsilon \varphi)\|_\infty \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

を示す. $(1 - \psi_\varepsilon)\varphi$ の台は原点を含まず $\operatorname{supp} T = \{0\}$ なので, $\langle T, (1 - \psi_\varepsilon)\varphi \rangle = 0$ が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成り立つ. よって上の収束が示されれば, $\langle T, \varphi \rangle = 0$ が従う.

$|\alpha| \le N$ となる多重指数 α をとる. ライプニッツ則より, 定数 $c_{\alpha_1 \alpha_2}$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$|\partial^\alpha(\psi_\varepsilon \varphi)(x)| \le \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{\alpha_1 \alpha_2} |(\partial^{\alpha_1} \psi_\varepsilon)(x)| \, |(\partial^{\alpha_2} \varphi)(x)|.$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ となる多重指数 α_1, α_2 をとる. $|x| \ge 5\varepsilon/3$ ならば $\psi_\varepsilon(x) = 0$ なので, $|x| \ge 2\varepsilon$ ならば $(\partial^{\alpha_1} \psi_\varepsilon)(x) = 0$. 一方, テイラーの定理より, $C_0 > 0$ が存在して $|x| < 2\varepsilon$ ならば

$$\left| (\partial^{\alpha_2} \varphi)(x) - \sum_{|\beta| \le |\alpha_1|} \frac{(\partial^{\alpha_2 + \beta} \varphi)(0)}{\beta!} x^\beta \right| \le C_0 |x|^{|\alpha_1| + 1} < C_0 (2\varepsilon)^{|\alpha_1| + 1}.$$

φ に対する仮定より, 左辺の絶対値の中にある和が 0 になり, 結局

$$|(\partial^{\alpha_2} \varphi)(x)| < C_0 (2\varepsilon)^{|\alpha_1| + 1}.$$

また, $(\partial^{\alpha_1} \psi_\varepsilon)(x) = \varepsilon^{-|\alpha_1|} (\partial^{\alpha_1} \psi)(x/\varepsilon)$ なので $|(\partial^{\alpha_1} \psi_\varepsilon)(x)| \le \varepsilon^{-|\alpha_1|} \|\partial^{\alpha_1} \psi\|_\infty$. ゆえに, $|x| < 2\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\psi_\varepsilon \varphi)(x)| &\le \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{\alpha_1 \alpha_2} \varepsilon^{-|\alpha_1|} \|\partial^{\alpha_1} \psi\|_\infty C_0 (2\varepsilon)^{|\alpha_1| + 1} \\
&= \varepsilon \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{\alpha_1 \alpha_2} \|\partial^{\alpha_1} \psi\|_\infty C_0 2^{|\alpha_1| + 1}.
\end{aligned}$$

右辺は x によらず, $\varepsilon \to 0$ で 0 に収束する. □

定理 11.10 の証明に戻る. $\eta \in \mathcal{D}$ で $\{0\}$ の近傍で $\eta = 1$ となるものをとる. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, 関数

$$\eta(x)\left(\varphi(x) - \sum_{|\alpha| \le N} \frac{(\partial^\alpha \varphi)(0)}{\alpha!} x^\alpha\right)$$

は $\mathcal{D}$ に属し, 補題 11.11 の仮定を満たす. よって T をあてて得られる値は 0 である. ゆえに,

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \eta\varphi\rangle &= \left\langle T,\ x \mapsto \eta(x) \sum_{|\alpha| \le N} \frac{(\partial^\alpha \varphi)(0)}{\alpha!} x^\alpha \right\rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \le N} \underbrace{\left\langle T,\ x \mapsto \eta(x) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \right\rangle}_{=:\, b_\alpha} (\partial^\alpha \varphi)(0) = \sum_{|\alpha| \le N} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha \langle \partial^\alpha \delta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

$a_\alpha = (-1)^{|\alpha|} b_\alpha$ とおくと $T = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha \partial^\alpha \delta$ である. □

演習問題

[1] 命題 11.4 で $f \in C^{N+k}(\mathbb{R}^d)$ ならば $T * f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ であることを示せ.

[2] コンパクト台をもつ $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対し, コンパクト台をもつ $g \in C(\mathbb{R})$ を用いて $T = g''$ と表す方法はせいぜい一通りであることを示せ.

[3] $\mathrm{pv}(1/x)$ はオーダー 1 だが, オーダー 0 ではないことを示せ.

[4] $T, S \in \mathcal{D}'$ とし, T または S はコンパクト台をもつとする. T がオーダー N で S がオーダー M ならば, $T * S$ はオーダー $N + M$ であることを示せ.

[5] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元 $T = \sum_{n=0}^\infty \delta_n^{(n)}$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f と非負整数 N で $f^{(N)} = T$ となるものは存在するか?

[6] $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を対応 $x + iy \leftrightarrow (x, y)$ により同一視する. ψ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする.

(i) コンパクト台をもつ $f \in C(\mathbb{R}^2)$ に対し, $f * \psi$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数になることを示せ.

(ii) コンパクト台をもつ $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ に対し, $T * \psi$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数になることを示せ.

[7] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を $\langle T, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi(x, 0)\, dx$ で定める. 次を満たす $f \in C(\mathbb{R}^2)$ の例を与えよ:

$$T = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

[8] 単位円周 $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$ 上のルベーグ測度 μ に対して $T_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ が定まる. T_μ をコンパクト台をもつ連続関数の微分の有限和として表せ.

[9] 次を満たす $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を決定せよ:

(i) $xT = 0$.

(ii) $xT = 1$.

(iii) $xT = H$.

[10] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元で台が $\{0\} \cup \{\, 1/n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ に含まれるようなものを決定せよ.

ノート

11.1 節の内容は [FJ, §5.4], [Ru2, Theorems 6.26–6.28] で見つけられる ([Ru2] での系 11.7 の証明はハーン・バナッハの定理を用いる). 関数解析のリース・マルコフ・角谷の定理によれば, オーダー 0 の超関数はちょうど複素ボレル測度に対応する. 定理 11.10 は [FJ, Theorem 3.2.1], [Ru2, Theorem 6.25], [SS4, 3.1.6], [Str, §6.3] などにある.

第12講　緩増加超関数とそのフーリエ変換

12.1　緩増加超関数

緩増加超関数はフーリエ変換ができる超関数であり, 例えば, 多項式でおさえられるような関数など可積分とは限らない多くの局所可積分関数が緩増加超関数になる. 以前扱ったように, 可積分関数だけを相手にフーリエ変換を考えると, 逆変換を定義することができない場合がある. 一方, 緩増加超関数という広い枠組みを導入すると, そこではフーリエ変換が常に逆変換をもつようになる. まとまりはよくなるが, その代わり, 関数のフーリエ変換が関数になるとは限らなくなる. 例えば, $\mathbb{R}^d$ 上の定数関数 1 のフーリエ変換は $(2\pi)^d\delta$ になる.

シュワルツ急減少関数とは, $\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 級関数 φ で任意の多重指数 α に対し $\partial^\alpha\varphi$ が急減少になるようなものであった. そして, シュワルツ急減少関数のクラスを $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とかいた (第 7 講). 実は次が成り立つ: 任意の $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ と $\varphi\in\mathcal{S}$ に対し,

$$\langle \widehat{f},\varphi\rangle=\langle f,\widehat{\varphi}\rangle. \tag{12.1}$$

実際, フビニの定理より

$$\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(y)\varphi(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}f(x)\varphi(y)e^{-iy\cdot x}\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx$$

(この等式は定理 7.12 の証明でも使った). そこで超関数 T に対し, そのフーリエ変換 $\widehat{T}$ を

$$\langle\widehat{T},\varphi\rangle=\langle T,\widehat{\varphi}\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{S}$$

で定めたいところだが, $\varphi\in\mathcal{D}$ であっても $\widehat{\varphi}\in\mathcal{D}$ とは限らないし, むしろ, $\varphi\in\mathcal{D}$ が 0 でないならば $\widehat{\varphi}$ は $\mathcal{D}$ に属さない (注意 5.17). これを解決するため, $\mathcal{S}$ 上の連続な線型汎関数を導入したい.

非負整数 N に対し, $\mathcal{S}$ 上のノルム $\|\cdot\|_N$ を次で定義する:

$$\|\varphi\|_N=\sum_{|\alpha|,|\beta|\le N}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha(\partial^\beta\varphi)(x)|,\quad \varphi\in\mathcal{S}.$$

$\mathcal{S}$ の元の列 (φ_n) と $\varphi\in\mathcal{S}$ に対し, φ_n が φ に $\mathcal{S}$ で**収束する**とは, 任意の非負整数 N に対し $n\to\infty$ で $\|\varphi_n-\varphi\|_N\to 0$ となるときをいう. このとき "$\mathcal{S}$ で $\varphi_n\to\varphi$" ともかく.

$$\mathcal{S}'=\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)=\{\,T\colon\mathcal{S}\to\mathbb{C}\mid T\text{ は }\mathbb{C}\text{ 上線型かつ連続である.}\}$$

とおく. ここで T が連続であるとは, $\mathcal{S}$ で $\varphi_n\to\varphi$ ならば $\langle T,\varphi_n\rangle\to\langle T,\varphi\rangle$ となることを意味する. $\mathcal{S}'$ の元を $\mathbb{R}^d$ 上の**緩増加超関数**という. 名前の由来は後でわかる (注意 12.8).

命題 12.1. 線型写像 $T\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ に対し, $T \in \mathcal{S}'$ であるためには次の有界性が必要十分である: 非負整数 N と $C > 0$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $|\langle T, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_N$.

証明. 十分であることはすぐわかる. 必要であることを示す. $\mathcal{D}'$ の元が有界であることの証明とほぼ同じである (命題 10.11). もし上のような N と C が存在しなければ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_n \in \mathcal{S}$ が存在して $|\langle T, \varphi_n\rangle| > n\|\varphi_n\|_n$ が成り立つ. $\psi_n = \varphi_n/(n\|\varphi_n\|_n)$ とおく. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $n \ge N$ ならば $\|\psi_n\|_N \le \|\psi_n\|_n = 1/n \to 0$. よって $\mathcal{S}$ で $\psi_n \to 0$. しかし $|\langle T, \psi_n\rangle| > 1$ なので, T は連続でない. □

命題 12.2. $\mathcal{D}$ は $\mathcal{S}$ で稠密である. つまり, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\mathcal{D}$ の元の列 (φ_n) が存在して $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to \varphi$.

証明. $\varphi \in \mathcal{S}$ をとる. $\mathcal{D}$ の元 ψ で $0 \le \psi \le 1$ であって, 立方体 $[-1,1]^d$ 上で $\psi = 1$ となるものをとる. $\psi_n(x) = \psi(x/n)$ とおき, $\varphi_n = \psi_n\varphi$ とおくと $\varphi_n \in \mathcal{D}$ である. $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to \varphi$ であることを示す. 多重指数 β と点 $x \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$(\partial^\beta\varphi_n)(x) - (\partial^\beta\varphi)(x) = \partial^\beta((\psi_n - 1)\varphi)(x) = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} c_{\beta_1\beta_2}\partial^{\beta_1}(\psi_n - 1)(x)(\partial^{\beta_2}\varphi)(x).$$

α を多重指数とすると

$$|x^\alpha\partial^\beta(\varphi_n - \varphi)(x)| = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} c_{\beta_1\beta_2}|\partial^{\beta_1}(\psi_n - 1)(x)|\,|x^\alpha(\partial^{\beta_2}\varphi)(x)|. \tag{12.2}$$

$\|\partial^{\beta_1}(\psi_n - 1)\|_\infty$ は n について有界である. 実際, $\|\psi_n - 1\|_\infty \le 1$ であり, また, $\beta_1 \ne 0$ のとき $\|\partial^{\beta_1}(\psi_n - 1)\|_\infty = n^{-|\beta_1|}\|\partial^{\beta_1}\psi\|_\infty$ なので従う. よって, $|x|$ が大きいとき, $|x^\alpha(\partial^{\beta_2}\varphi)(x)|$ が小さくなるので, (12.2) の右辺は n によらず小さくなる. 一方, $|x| < n$ ならば, 任意の多重指数 β_1 に対し $\partial^{\beta_1}(\psi_n - 1)(x) = 0$ なので, (12.2) の右辺は 0 になる. ゆえに (12.2) で $x \in \mathbb{R}^d$ に関して sup をとったものは, n を大きくすると小さくなる. □

命題 12.3. $\mathcal{S}'$ から $\mathcal{D}'$ への写像 $T \mapsto T|_{\mathcal{D}}$ は単射である. これにより $\mathcal{S}'$ を $\mathcal{D}'$ の部分集合と見なす (つまり, 緩増加超関数は超関数である).

証明. $T \in \mathcal{S}'$ をとる. まず, 制限 $T|_{\mathcal{D}}$ が $\mathcal{D}'$ に属すること, つまり, $\mathcal{D}$ 上の汎関数として連続であることを示す. $\mathcal{D}$ で $\varphi_n \to \varphi$ とする. コンパクト集合 K で φ_n の台も φ の台も含むものがとれ, $\mathcal{D}$ での収束の定義から $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to \varphi$. $T \in \mathcal{S}'$ より $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$. これで示せた. $\mathcal{D}$ は $\mathcal{S}$ で稠密なので, T が $\mathcal{D}$ 上で 0 ならば $\mathcal{S}$ 上で 0 である. ゆえに, 写像 $T \mapsto T|_{\mathcal{D}}$ は単射である. □

例 12.4. f を $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数とし, $N \in \mathbb{N}$ が存在して次が成り立つとする:

$$\int_{|x|\ge 1} \frac{|f(x)|}{|x|^N}\,dx < \infty.$$

このとき $f \in \mathcal{S}'$ である. 実際, $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le \int_{|x|<1} |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx + \int_{|x|\ge 1} \frac{|f(x)|}{|x|^N}|x|^N|\varphi(x)|\,dx \le C\|\varphi\|_N.$$

ここで C は φ によらない正の定数である.

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 f が**多項式増大**であるとは, $N \in \mathbb{N}$ と $C > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$|f(x)| \le C(1 + |x|^N)$$

となるときをいう. 任意の多項式増大の可測関数は上の仮定を満たし, $\mathcal{S}'$ の元を定める. また, 任意の $p \in [1, \infty]$ に対し, $L^p(\mathbb{R}^d)$ の任意の元も上の仮定を満たし, $\mathcal{S}'$ の元を定める.

例 12.5. コンパクト台をもつ $\mathcal{D}'$ の元は $\mathcal{S}'$ に属する. より正確には, コンパクト台をもつ $\mathcal{D}'$ の元 T に対し, その $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ への拡張 $\bar{T}$ (命題 10.12) を $\mathcal{S}$ に制限したものが $\mathcal{S}'$ に属する.

証明. $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to \varphi$ とする. $\eta \in \mathcal{D}$ で $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\eta = 1$ となるものをとると, $\mathcal{D}$ で $\eta\varphi_n \to \eta\varphi$ となり, よって $\langle \bar{T}, \varphi_n \rangle = \langle T, \eta\varphi_n \rangle \to \langle T, \eta\varphi \rangle = \langle \bar{T}, \varphi \rangle$. □

例 12.6. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = e^x$ は $\mathcal{D}'$ に属するが, $\mathcal{S}'$ には属さない. より正確には, f は $\mathcal{D}$ 上の連続な線型汎関数を定めるが, それは $\mathcal{S}$ 上の連続な線型汎関数には拡張できない.

証明. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $\varphi \ge 0$ であって, $x \ge 1$ のとき $\varphi(x) = e^{-x/2}$ で $x \le 0$ のとき $\varphi(x) = 0$ となるようにとる. $\varphi \in \mathcal{S}$ である. $\psi \in \mathcal{D}$ を $0 \le \psi \le 1$ であって, $[-1, 1]$ 上で $\psi = 1$ となるようにとる. $\psi_n(x) = \psi(x/n)$ とおくと, 命題 12.2 の証明で示したように, $\mathcal{S}$ で $\psi_n\varphi \to \varphi$ となる. 一方,

$$\langle f, \psi_n\varphi \rangle \ge \int_1^n e^{x/2}\, dx \to \infty$$

であり, f は $\mathcal{S}$ 上の連続な汎関数には拡張できない. □

$T \in \mathcal{S}'$ と多重指数 α に対し, 線型写像 $x^\alpha T \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ を $\langle x^\alpha T, \varphi \rangle = \langle T, x^\alpha\varphi \rangle$ で定める. ここで $x^\alpha\varphi$ は関数 $x \mapsto x^\alpha\varphi(x)$ を表す. $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $x^\alpha\varphi \in \mathcal{S}$ であることに注意する.

命題 12.7. $T \in \mathcal{S}'$ と多重指数 α に対し, $x^\alpha T, \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'$.

証明. T の有界性を示す定数 C, N をとると, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$|\langle x^\alpha T, \varphi \rangle| = |\langle T, x^\alpha\varphi \rangle| \le C\|x^\alpha\varphi\|_N \le C\|\varphi\|_{N+|\alpha|},$$
$$|\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle| = |\langle T, \partial^\alpha\varphi \rangle| \le C\|\partial^\alpha\varphi\|_N \le C\|\varphi\|_{N+|\alpha|}$$

なので, $x^\alpha T$ も $\partial^\alpha T$ も $\mathcal{S}'$ に属する. □

注意 12.8. すでに示したように, 多項式増大の連続関数は $\mathcal{S}'$ の元を定め, その超関数としての微分もまた $\mathcal{S}'$ の元を定める. 実は逆に, 任意の $\mathcal{S}'$ の元は多項式増大の連続関数の微分として表される (第 13 講で示す). これが $\mathcal{S}'$ の元のことを緩増加とよぶ理由である. ただ, 多項式増大の関数が微分可能なとき, その導関数は ($\mathcal{S}'$ の元を定めるが) 多項式増大になるとは限らない. 例えば $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \sin(e^x)$ は有界なので多項式増大だが, その導関数 $f'(x) = e^x \cos(e^x)$ は $\mathcal{S}'$ の元を定める一方, 多項式増大でない. このように, 関数が多項式増大であることと, それが $\mathcal{S}'$ の元を定めることの間には若干の差異がある.

12.2　フーリエ変換

等式 (12.1) に基づき, $T \in \mathcal{S}'$ に対し, 写像 $\widehat{T}\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ を

$$\langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

で定める. この $\widehat{T}$ を T の**フーリエ変換**という. $\widehat{T}$ のことを $T^\wedge$ ともかく. 写像 $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ を $\mathcal{F}(T) = \widehat{T}$ で定義し, これもフーリエ変換とよぶ. 等式 (12.1) より, この $\mathcal{F}$ は可積分関数のフーリエ変換の拡張である.

命題 12.9. $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to \varphi$ ならば, $\mathcal{S}$ で $\widehat{\varphi_n} \to \widehat{\varphi}$. よって, 任意の $T \in \mathcal{S}'$ に対し $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$.

証明. $C > 0$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\|\widehat{\varphi}\|_\infty \le C\|\varphi\|_{d+1}$ が成り立つ. 実際, $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^{d+1}} \underbrace{(1+|x|^{d+1})|\varphi(x)|}_{\le \|\varphi\|_{d+1}}\,dx.$$

$\varphi \in \mathcal{S}$ と多重指数 α に対し

$$(\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \qquad (x^\alpha\varphi)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|}(\partial^\alpha \widehat{\varphi})(\xi)$$

であったことを思い出す (命題 7.2, 7.3). これより, 多重指数 α, β に対し

$$|\xi^\alpha(\partial^\beta\widehat{\varphi})(\xi)| = |\xi^\alpha(x^\beta\varphi)^\wedge(\xi)| = |(\partial^\alpha(x^\beta\varphi))^\wedge(\xi)| \le C\|\partial^\alpha(x^\beta\varphi)\|_{d+1} \le C_1\|\varphi\|_{|\alpha|+|\beta|+d+1}.$$

よって, 任意の非負整数 N と任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\|\widehat{\varphi}\|_N \le C_2\|\varphi\|_{2N+d+1}$. これより $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to \varphi$ ならば, $\mathcal{S}$ で $\widehat{\varphi_n} \to \widehat{\varphi}$. □

フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ は全単射であった (系 7.9). そこで $S \in \mathcal{S}'$ に対し, 写像 $S^\vee\colon \mathcal{S}' \to \mathbb{C}$ を次で定める:

$$\langle S^\vee, \varphi\rangle = \langle S, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

$S^\vee$ を S の**フーリエ逆変換**という. 系 7.9 の証明で示したように, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, 反転公式 (定理 7.7) より $\mathcal{F}^2\varphi = (2\pi)^d\varphi^\sim$ であって, よって $\mathcal{F}^{-1}\varphi = (2\pi)^{-2d}\mathcal{F}^3\varphi$. これと命題 12.9 より $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to \varphi$ ならば, $\mathcal{S}$ で $\mathcal{F}^{-1}\varphi_n \to \mathcal{F}^{-1}\varphi$. よって, 任意の $S \in \mathcal{S}'$ に対し $S^\vee \in \mathcal{S}'$ となる.

命題 12.10. フーリエ変換 $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ は全単射である. 実際, 写像 $S \mapsto S^\vee$ が逆写像である. つまり, 任意の $S \in \mathcal{S}'$ に対し $S^\vee = \mathcal{F}^{-1}S$.

証明. $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\langle (\widehat{T})^\vee, \varphi\rangle = \langle \widehat{T}, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

よって $(\widehat{T})^\vee = T$. 同様に $(S^\vee)^\wedge = S$. □

命題 12.11. $T \in \mathcal{S}'$ と多重指数 α に対し,

$$(\partial^\alpha T)^\wedge = i^{|\alpha|}x^\alpha\widehat{T}, \qquad (x^\alpha T)^\wedge = i^{|\alpha|}\partial^\alpha\widehat{T}.$$

証明. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\langle (\partial^\alpha T)^\wedge, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = i^{|\alpha|} \langle T, (x^\alpha \varphi)^\wedge \rangle = i^{|\alpha|} \langle x^\alpha \widehat{T}, \varphi \rangle,$$
$$\langle (x^\alpha T)^\wedge, \varphi \rangle = \langle T, x^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = i^{-|\alpha|} \langle T, (\partial^\alpha \varphi)^\wedge \rangle = i^{-|\alpha|} \langle \widehat{T}, \partial^\alpha \varphi \rangle = i^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \widehat{T}, \varphi \rangle. \qquad \square$$

命題 12.12. $T \in \mathcal{S}'$ に対し $\mathcal{F}^2 T = (2\pi)^d T^\sim$. よって $\mathcal{F}^4 T = (2\pi)^{2d} T$.

証明. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\langle \mathcal{F}^2 T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^2 \varphi \rangle = \langle T, (2\pi)^d \varphi^\sim \rangle = (2\pi)^d \langle T^\sim, \varphi \rangle. \qquad \square$$

$\mathcal{S}'$ の元の列 (T_n) が $\mathcal{S}'$ の元 T に $\mathcal{S}'$ で**収束する**とは, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ となるときをいう. このとき, $\mathcal{S}'$ で $T_n \to T$ であるともいう. 次の命題は, その証明は易しいが, 次節以降のいくつかの計算においてその指針を与えるものである:

命題 12.13. $\mathcal{S}'$ で $T_n \to T$ ならば, $\mathcal{S}'$ で $\widehat{T_n} \to \widehat{T}$.

証明. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\langle \widehat{T_n}, \varphi \rangle = \langle T_n, \widehat{\varphi} \rangle \to \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi \rangle$. $\square$

この命題と同様にして, 次が示せる: I を $\mathbb{R}$ の開区間とし, I の点 t でパラメータ付けられた $\mathcal{S}'$ の元 F_t が与えられたとする. そして, F_t は I の点 t_0 で微分可能とする. つまり, $\mathcal{S}'$ の元 G が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, t についての関数 $\langle F_t, \varphi \rangle$ が t_0 で微分可能であって, その微分係数は $\langle G, \varphi \rangle$ であるとする. このとき, $\widehat{F_t}$ も同じ意味で t_0 で微分可能であり, その微分係数にあたる超関数は $\widehat{G}$ である. これも具体例の計算で役に立つ.

12.3 フーリエ変換の例

例 12.14 (ディラックのデルタ, 定数関数)**.** 等式 $\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle$ より $\widehat{\delta} = 1$. また, $\widehat{1} = \mathcal{F}^2 \delta = (2\pi)^d \delta$.

例 12.15. $a \in \mathbb{R}^d$ に対し $\mathcal{S}'$ の元 δ_a を $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ で定める. $\widehat{\delta_a}$ は関数 $x \mapsto e^{-ia\cdot x}$ に等しい. 証明は例 12.14 と同様である. また, $\mathcal{F}(e^{-ia\cdot x}) = \mathcal{F}^2 \delta_a = (2\pi)^d \delta_{-a}$.

例 12.16 (多項式)**.** 多重指数 α に対し, $x^\alpha = x^\alpha \cdot 1$ なので $\widehat{x^\alpha} = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{1} = (2\pi)^d i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta$.

例 12.17 (L^1 関数)**.** $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ と $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, フビニの定理より等式 $\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$ が成り立つので, $\widehat{T_f}$ は第 5 講で定義した可積分関数のフーリエ変換 $\widehat{f}$ と一致する.

例 12.18 (L^2 関数)**.** $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ をプランシュレルの定理 7.12 で得たフーリエ変換とする. 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し $\widehat{T_f} = T_{\mathcal{F}f}$ である. 実際, $f_n = f\chi_{[-n,n]^d}$ とおくと, L^2 で $f_n \to f$ なので L^2 で $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$ であり, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$\langle \widehat{T_f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \widehat{\varphi} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{f_n}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle.$$

ここで, 二つ目と四つ目の等式はコーシー・シュワルツ不等式から従い, 三つ目の等式は $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ であることから従う.

次の例に進む前に, 次の事実を指摘しておく: μ を $\mathbb{R}^d$ 上のボレル測度で局所有限なもの, つまり, 任意の球の測度が有限になるようなものとする. もし $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\int_{|x|\geq 1} |x|^{-N}\, d\mu(x) < \infty$ となるならば, μ は $\mathcal{S}'$ の元を定める. 実際, $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$|\langle \mu, \varphi\rangle| \leq \int_{|x|<1} |\varphi|\, d\mu + \int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^N} |x|^N |\varphi(x)|\, d\mu(x) \leq C\|\varphi\|_N.$$

ここで C は φ によらない正の定数である. $\mathbb{R}^d$ 上のボレル確率測度 μ で, ある点 $a \in \mathbb{R}^d$ に μ が集中しているとき, つまり $\mu(\{a\}) = \mu(\mathbb{R}^d) = 1$ となるとき, μ は a 上の**ディラック測度**であるという. 例 12.14, 12.15 で挙げた超関数 δ, δ_a はそれぞれ原点と a 上のディラック測度である.

例 12.19 (ポアソンの和公式)**.** $\mathbb{R}$ 上の局所有限ボレル測度 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ は, 上で示したように $\mathcal{S}'$ の元を定める. ポアソンの和公式 (6.2 節) により, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi k)$. よって,

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\right) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}, \qquad \mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

この等式のある解釈を補講 B で与える.

例 12.20 (ヘヴィサイド関数)**.** 例 9.5 で $\mathbb{R}$ 上の関数 H を $x \geq 0$ のとき $H(x) = 1$ とし, $x < 0$ のとき $H(x) = 0$ として定めた. $\widehat{H}$ を求める. $\varepsilon > 0$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 H_ε を $H_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x} H(x)$ で定める. $\varepsilon \to 0$ とすると $\mathcal{S}'$ で $H_\varepsilon \to H$. 命題 12.13 より $\mathcal{S}'$ で $\widehat{H_\varepsilon} \to \widehat{H}$.

そこで $\widehat{H_\varepsilon}$ を計算する. これは可積分関数 H_ε のフーリエ変換であり, 直接計算できて $\widehat{H_\varepsilon}(\xi) = 1/(\varepsilon + i\xi)$. 一方, $x \neq 0$ ならば $H^\sim(x) = H(-x) = 1 - H(x)$ なので, 超関数として $H + H^\sim = 1$. よって $\widehat{H} + \widehat{H}^\sim = 2\pi\delta$. 次に $\widehat{H_\varepsilon} - \widehat{H_\varepsilon}^\sim$ を計算してみる:

$$\widehat{H_\varepsilon} - \widehat{H_\varepsilon}^\sim = \frac{1}{\varepsilon + i\xi} - \frac{1}{\varepsilon - i\xi} = \frac{-2i\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2}$$

である. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, $r > 0$ として

$$\begin{aligned}
&\langle (-2i)^{-1}(\widehat{H_\varepsilon} - \widehat{H_\varepsilon}^\sim), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2} \varphi(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{|\xi|\geq r} \frac{\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2} \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{-r}^{r} \frac{\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2} (\varphi(\xi) - \varphi(0))\, d\xi \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_{|\xi|\geq r} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\, d\xi + \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{\xi}\, d\xi \underset{r\to 0}{\to} \langle \mathrm{pv}(1/x), \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

よって $\widehat{H} - \widehat{H}^\sim = -2i\mathrm{pv}(1/x)$. ゆえに

$$\widehat{H} = \pi\delta - i\mathrm{pv}(1/x) = \pi\delta - i(\log|x|)'.$$

さらに $\mathrm{pv}(1/x)$ のフーリエ変換も求められる: $\mathrm{pv}(1/x) = -\pi i\delta + i\widehat{H}$ より

$$\mathrm{pv}(1/x)^\wedge = -\pi i + 2\pi i H^\sim = \begin{cases} -\pi i & x > 0 \text{ のとき}, \\ \pi i & x \leq 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

他に次のような $\widehat{H}$ の求め方もある: 等式 $H'=\delta$ をフーリエ変換すると $ix\widehat{H}=1$. $x\mathrm{pv}(1/x)=1$ なので $x(i\widehat{H}-\mathrm{pv}(1/x))=0$. フーリエ変換して $(2\pi i H^{\sim}-\mathrm{pv}(1/x)^{\wedge})'=0$. これより定数 c が存在して $2\pi i H^{\sim}-\mathrm{pv}(1/x)^{\wedge}=c$ (命題 9.10). これをフーリエ変換して $2\pi i\widehat{H}-2\pi\mathrm{pv}(1/x)=2\pi c\delta$. よって $\widehat{H}=-ic\delta-i\mathrm{pv}(1/x)$. あとは c が求まればよい. そこで, ガウス核 $G(x)=(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}$ を用いると, $\langle\widehat{H},G\rangle=\langle H,\widehat{G}\rangle=\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{\pi/2}$. 一方, G は偶関数なので $\langle\mathrm{pv}(1/x),G\rangle=0$. ゆえに $c=\pi i$.

フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}$ を保つが, さらに $\mathcal{S}$ の元の滑らかさと無限遠での減衰のスピードをトレードする. $\mathbb{R}^d$ 上の可積分関数 f に対しても, 一般に f が滑らかであればあるほど $\widehat{f}$ の無限遠での減衰のスピードは速まり, 逆に f が無限遠で速く減衰すればするほど $\widehat{f}$ は滑らかになる. ヘヴィサイド関数 H がもつ $\mathcal{S}$ の元との大きな違いは, 原点で特異であるという点と $+\infty$ で減衰しないという点である. この二点が $\widehat{H}$ を $\mathcal{S}$ の元から遠ざける要因であると考えられるが, この二点のそれぞれがもたらす影響を分けて考えることはできるだろうか?

$\mathbb{R}$ 上の関数 h で, 原点の近くとその負の側で H と一致し, 正の側では有界な台をもつ C^∞ 級関数となるものを用意する. $\widehat{h}$ は H の原点での特異性がもたらす影響のみを抽出するものと考えられる. 微分 h' は δ と $\mathcal{S}$ の元の和であり, よって $(h')^{\wedge}=i\xi\widehat{h}$ は 1 と $\mathcal{S}$ の元の和になる. ゆえに $\widehat{h}$ は, $\mathcal{S}$ の元との差を除いて無限遠で $1/(i\xi)=-i/\xi$ の減衰をもつ. h はコンパクト台をもつので, $\widehat{h}$ は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数であることに注意する.

$\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数 p で, 区間 $(-1,1)$ の外で $1/x$ に等しく, 原点の近くで 0 になるものを用意する. $q(x)=1/x-p(x)$ とおき, $Q\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を

$$\langle Q,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}q(x)\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}$$

で定める. $\widehat{H}=\pi\delta-i\mathrm{pv}(1/x)=\pi\delta-iQ-ip$ とかける. $-ip\equiv\widehat{h}\bmod\mathcal{S}$ (つまり $-ip-\widehat{h}\in\mathcal{S}$) なので, 第 3 項 $-ip$ が H の原点での特異性がもたらす影響である. よって, 残った $\pi\delta-iQ$ が H の $+\infty$ での非減衰性からくる影響と見なすことができる.

例 12.21. 自然数 m に対し, $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 $|x|^m$ のフーリエ変換を求める. m が偶数ならば $|x|^m=x^m$ であり, この場合は例 12.16 で求めた. m を奇数とする. 関数 $\operatorname{sgn}x=x/|x|$ を導入すると, $|x|^m=x^m\operatorname{sgn}x$ とかけて $\operatorname{sgn}x=2H-1$. 例 12.20 より

$$\mathcal{F}(|x|^m)=i^m(\widehat{\operatorname{sgn}x})^{(m)}=-2i^{m+1}(\log|x|)^{(m+1)}.$$

この関数は原点以外で $2i^{m+1}m!/x^{m+1}$ に等しい. また, 非負整数 m に対し,

$$\mathcal{F}(x^mH(x))=i^m(\widehat{H})^{(m)}=i^m\pi\delta^{(m)}-i^{m+1}(\log|x|)^{(m+1)}.$$

この関数は原点以外で $(-i)^{m+1}m!/x^{m+1}$ に等しい.

ヘヴィサイド関数の場合と同様, これらの計算結果から, $|x|^m$ と $x^mH(x)$ がもつ原点での特異性が無限遠での減衰にどのような影響を与えるかがわかる. そして実は, 無限遠での減衰に関するこのような計算結果は, 具体的な $\mathbb{R}$ 上の関数のフーリエ変換に対して応用をもつ (12.5 節). さらに, $\mathbb{T}$ 上の関数のフーリエ係数に対しても応用をもつ (B.3 節). 次の例も同様の応用をもつ.

例 12.22. $0 < \alpha < d$ として, $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 $1/|x|^\alpha$ のフーリエ変換を求める．ここでの結果は, 次節でラプラシアンの基本解を得るときに用いる．8.1 節で $e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めたときと同様に, まず $(0,\infty)$ 上のある関数 g を用いて $1/|x|^\alpha$ をガウス核の連続和として表す:

$$\frac{1}{|x|^\alpha} = \int_0^\infty g(t) e^{-t|x|^2}\,dt.$$

$\beta > -1$ として $g(t) = t^\beta$ とおくと, 次の等式を得る:

$$\int_0^\infty t^\beta e^{-t|x|^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{s^\beta}{|x|^{2\beta}} e^{-s} \frac{ds}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^{2\beta+2}} \Gamma(\beta+1).$$

ここでガンマ関数 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$ (x は正の実数) を用いた．$2\beta + 2 = \alpha$ で β を定めると,

$$\frac{1}{|x|^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t|x|^2}\,dt.$$

等式 $\mathcal{F}(e^{-t|x|^2})(\xi) = (\pi/t)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4t}$ を考慮してフーリエ変換する (本来は $\mathcal{S}$ の元 φ をあてて考えるべきである):

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} \mathcal{F}(e^{-t|x|^2})(\xi)\,dt = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha-d}{2}-1} e^{-|\xi|^2/4t}\,dt.$$

$s = |\xi|^2/(4t)$ で変数変換する．$dt = -|\xi|^2 ds/(4s^2)$ なので, 上の右辺は

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \frac{|\xi|^{\alpha-d-2}}{4^{\frac{\alpha-d}{2}-1}} s^{1-\frac{\alpha-d}{2}} e^{-s} \frac{|\xi|^2}{4s^2}\,ds \\
&= \frac{\pi^{d/2}|\xi|^{\alpha-d}}{\Gamma(\alpha/2) 2^{\alpha-d}} \int_0^\infty s^{\frac{d-\alpha}{2}-1} e^{-s}\,ds = \frac{2^{d-\alpha}\pi^{d/2}\Gamma((d-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)} \frac{1}{|\xi|^{d-\alpha}}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)(\xi) = \frac{c_\alpha}{|\xi|^{d-\alpha}}. \quad \text{ただし } c_\alpha = \frac{2^{d-\alpha}\pi^{d/2}\Gamma((d-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)}.$$

12.4 ラプラシアンの基本解

$\mathbb{R}^d$ において $\mathcal{D}'$ の元 E で $\triangle E = \delta$ となるものを見つける．$d = 2$ のとき $E(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$ がこれを満たすことはすでに定理 9.11 で示したが, ここでは別の方法でこれを示す．とりあえず, 等式 $\triangle E = \delta$ をフーリエ変換してみると $-|\xi|^2 \widehat{E} = 1$ となる．よって $\widehat{E} = -1/|\xi|^2$ となる E が求まればよい．関数 $1/|\xi|^2$ は $d \geq 3$ のとき $\mathbb{R}^d$ 上局所可積分となり, 原点の近く以外で有界なので $\mathcal{S}'$ の元を定めるが, $d = 2$ のときはそうでない．この二つの場合に分けて考える．

定理 12.23. $d \geq 3$ のとき, $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数

$$E(x) = -\frac{1}{c_{d-2}} \frac{1}{|x|^{d-2}}$$

は $\triangle$ の基本解である．

実際, 例 12.22 より次の等式が成り立ち, 定理が従う:

$$\mathcal{F}\left(\triangle\left(-\frac{1}{c_{d-2}}\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)\right)=1=\widehat{\delta}.$$

$d=3$ のときの定数 c_1 を求めてみる. $\Gamma(1)=1$ と $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ がガンマ関数の定義から直接計算できて $c_1=2^2\pi^{3/2}\Gamma(1)/\Gamma(1/2)=4\pi$. よって上で得た基本解は

$$E(x)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}.$$

次に $d=2$ とする. $0<\varepsilon<2$ に対し, 例 12.22 より $\mathcal{F}(|x|^{-\varepsilon})=c_\varepsilon|x|^{\varepsilon-2}$ なので,

$$\mathcal{F}(\triangle|x|^{-\varepsilon})=-c_\varepsilon|x|^{\varepsilon}. \tag{12.3}$$

両辺を ε で微分して, それから $\varepsilon\to 0$ とする (ε は $\mathbb{R}^2$ の変数とは無関係なので, ε に関する微分は $\mathcal{F}$ と交換し, $\triangle$ とも交換する. これらの主張は命題 12.13 と同様にして示すことができる). ε で微分する前に c_ε について調べておく.

補題 12.24. $c(\varepsilon)=c_\varepsilon=2^{2-\varepsilon}\pi\Gamma(1-\varepsilon/2)/\Gamma(\varepsilon/2)$ とおくと, これは $\varepsilon=0$ の近くで定義されるある正則関数に等しい. それも c とかくと $c(0)=0$ かつ $c'(0)=2\pi$ である.

証明. ルベーグ収束定理を使うと, ガンマ関数 $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ は領域 $\{\mathrm{Re}\,z>0\}$ 上で正則であることがわかる. そして $\mathrm{Re}\,z>0$ のとき, 等式 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ が成り立つので, 関数 $z\Gamma(z)$ は領域 $\{\mathrm{Re}\,z>-1\}$ 上に解析接続され, その関数の $z=0$ での値は $\Gamma(1)=1$ である. よって,

$$c(\varepsilon)=\frac{\varepsilon 2^{1-\varepsilon}\pi\Gamma(1-\varepsilon/2)}{(\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)}$$

は $\varepsilon=0$ の近くで正則関数を定め, $c(0)=0\cdot 2\pi\cdot 1/1=0$. そして $c'(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}c(\varepsilon)/\varepsilon=2\pi\cdot 1/1=2\pi$. □

等式 (12.3) の両辺を ε で微分し $\varepsilon\to 0$ とすると,

$$\mathcal{F}(\triangle(|x|^{-\varepsilon}\log|x|))=c'(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}+c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}\log|x|\to 2\pi.$$

よって $\mathcal{F}(\triangle(\log|x|))=2\pi$ であり, 等式 $\triangle(\frac{1}{2\pi}\log|x|)=\delta$ が従う.

$\mathbb{R}^d$ 上の調和関数で有界なものは定数に限るというリウヴィルの定理はよく知られている. 次の命題はこの一般化である:

命題 12.25. $T\in\mathcal{S}'$ が $\triangle T=0$ を満たすならば, T は多項式である. 特に, $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の調和関数は多項式である.

証明. 等式 $\triangle T=0$ をフーリエ変換して $-|\xi|^2\widehat{T}=0$. これより $\mathrm{supp}\,\widehat{T}\subset\{0\}$ が従う. 実際, $\varphi\in\mathcal{D}$ で $\mathrm{supp}\,\varphi\cap\{0\}=\emptyset$ となるものをとると, $\varphi/|\xi|^2$ は $\mathcal{D}$ の元であって $\langle\widehat{T},\varphi\rangle=\langle|\xi|^2\widehat{T},\varphi/|\xi|^2\rangle=0$. もし $\mathrm{supp}\,\widehat{T}$ が空ならば $\widehat{T}=0$ となり $T=0$. そうでなければ $\mathrm{supp}\,\widehat{T}=\{0\}$ であり, 定理 11.10 より, 非負整数 N と複素数 a_α が存在して $\widehat{T}=\sum_{|\alpha|\le N}a_\alpha\partial^\alpha\delta$. そして,

$$(2\pi)^dT^\sim=\mathcal{F}^2T=\sum_{|\alpha|\le N}a_\alpha i^{|\alpha|}x^\alpha\widehat{\delta}=\sum_{|\alpha|\le N}a_\alpha i^{|\alpha|}x^\alpha.$$

よって $T=(2\pi)^{-d}\sum_{|\alpha|\le N}a_\alpha(-i)^{|\alpha|}x^\alpha$ となり, これは多項式である. □

系 12.26. 上で得た $\triangle$ の基本解を E とかく．もし $T \in \mathcal{S}'$ が $\triangle$ の基本解ならば, T は E と調和多項式の和である．

実際, $E \in \mathcal{S}'$ であって $\triangle(T-E)=0$ なので, 命題 12.25 より従う．

多項式増大でない調和関数は存在する．例えば, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $e^{x_1}\sin x_2$ はそのような例である．また, $E+e^{x_1}\sin x_2$ は $\triangle$ の基本解であり, これは E と多項式の和でない．

注意 12.27. 命題 12.25 はより一般の偏微分作用素に対しても成り立つ: $\mathbb{R}^d$ 上の偏微分作用素

$$P=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$$

(m は非負整数, a_α は複素数) に対し, d 変数多項式 p を次で定める:

$$p(\xi)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha i^{|\alpha|}\xi^\alpha.$$

任意の $T \in \mathcal{S}'$ に対し $\widehat{PT}=p(\xi)\widehat{T}$ が成り立つ．もし p が $\mathbb{R}^d$ で原点以外の零点をもたないならば, $PT=0$ となる $T \in \mathcal{S}'$ は多項式である．証明は命題 12.25 と同様である．

$\mathbb{R}^2$ 上のコーシー・リーマン作用素 $\bar\partial=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$ はこの仮定を満たす．よって $\mathbb{C}$ 上の正則関数で多項式増大のものは多項式に限る．これは正則関数に対するリウヴィルの定理の一般化である．命題 9.13 で関数 $1/(2\pi z)$ が $\bar\partial$ の基本解であることを示したが, これは $\mathcal{S}'$ に属するので系 12.26 と同様の結論が $\bar\partial$ についても得られる．

終わりに, フーリエ変換の計算例を二つ与える．

例 12.28. $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 $\log|x|$ のフーリエ変換を求める．$0<\varepsilon<2$ として, 例 12.22 で得た等式 $\mathcal{F}(|x|^{-\varepsilon})=c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon-2}$ から始める．両辺を ε で微分すると,

$$-\mathcal{F}(|x|^{-\varepsilon}\log|x|)=c'(\varepsilon)|x|^{\varepsilon-2}+c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon-2}\log|x|.$$

右辺を $F_\varepsilon(x)$ とおく．任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&-\langle \mathcal{F}(|x|^{-\varepsilon}\log|x|),\varphi\rangle=\langle F_\varepsilon(x),\varphi\rangle\\
&=\int_{|x|\le 1}(\varphi(x)-\varphi(0))F_\varepsilon(x)\,dx+\int_{|x|>1}\varphi(x)F_\varepsilon(x)\,dx+\varphi(0)\int_{|x|\le 1}F_\varepsilon(x)\,dx. \qquad (12.4)
\end{aligned}$$

両辺で $\varepsilon\to 0$ とする．ルベーグ収束定理より, 右辺において

$$\text{第 1 項} \to 2\pi\int_{|x|\le 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}\,dx, \qquad \text{第 2 項} \to 2\pi\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|^2}\,dx.$$

第 3 項の積分を計算する:

$$\int_{|x|\le 1}F_\varepsilon(x)\,dx=2\pi\int_0^1\frac{c'(\varepsilon)+c(\varepsilon)\log r}{r^{1-\varepsilon}}\,dr=\frac{2\pi}{\varepsilon}\left(c'(\varepsilon)-\frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon}\right).$$

補題 12.24 で示したように, 関数 c は $\varepsilon = 0$ の近くで正則であり, 漸近展開すると $c(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + (c''(0)/2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$, そして $c'(\varepsilon) = 2\pi + c''(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. よって, 上の右辺は $\varepsilon \to 0$ で $\pi c''(0)$ に収束する. そこで $c''(0)$ を計算する. $2(c(\varepsilon) - 2\pi\varepsilon)/\varepsilon^2 \to c''(0)$ であり,

$$\frac{2(c(\varepsilon) - 2\pi\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{2^{-\varepsilon}\Gamma(1-\varepsilon/2) - 1}{(\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\frac{1}{(\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)} - 1\right). \tag{12.5}$$

漸近展開により,

$$\begin{aligned}
2^{-\varepsilon}\Gamma(1-\varepsilon/2) &= (1 - \varepsilon\log 2 + O(\varepsilon^2))\left(1 - \frac{\Gamma'(1)}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right) \\
&= 1 - \left(\frac{\Gamma'(1)}{2} + \log 2\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\
\frac{1}{(\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)} &= \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon/2)} = \frac{1}{1 + \Gamma'(1)\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)} \\
&= 1 - \frac{\Gamma'(1)}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

よって (12.5) の右辺は

$$-4\pi\left(\frac{\Gamma'(1)}{2} + \log 2\right) - 4\pi\frac{\Gamma'(1)}{2} = -4\pi(\Gamma'(1) + \log 2)$$

に収束する. ゆえに, (12.4) 右辺の第 3 項の積分は $-4\pi^2(\Gamma'(1) + \log 2)$ に収束する. 以上により次が示せた: 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\frac{1}{2\pi}\langle \mathcal{F}(\log|x|), \varphi\rangle = -\int_{|x|\le 1}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2}\,dx - \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|^2}\,dx + 2\pi(\Gamma'(1) + \log 2)\varphi(0).$$

ちなみに

$$-\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

であり, この値はオイラーの定数とよばれる ([杉浦, 第 IV 章, §15, 問題 4]).

上の計算では, はじめに等式 $\mathcal{F}(|x|^{-\varepsilon}) = c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon-2}$ の両辺を ε で微分したが, もう一度微分すると $|x|^{-\varepsilon}(\log|x|)^2$ のフーリエ変換が求まり, さらに $\varepsilon \to 0$ とすることで $(\log|x|)^2$ のフーリエ変換が求まる. このようにパラメータ付けられた関数とそのパラメータに関する微分を組み合わせることで, 多くの具体例に対しそのフーリエ変換を計算できる. また, $d = 2$ の場合に限らず, 一般の d についても同様である ([GS, p.194 (5), (6)] を参照せよ. [GS] には多くの計算例がある).

例 12.29. $\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) で表し, $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を対応 $(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$ により同一視する. $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 $1/z$ のフーリエ変換を求める. 命題 9.13 の証明で示したように $\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$ とおくと, 超関数の意味で等式 $\partial(\log|z|) = 1/z$ が成り立つ. 例 12.28 より, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{F}(1/z), \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(\partial(\log|z|)), \varphi\rangle = \langle i\bar{z}\,\mathcal{F}(\log|z|), \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(\log|z|), i\bar{z}\varphi\rangle \\
&= -2\pi i\int_{|z|\le 1}\frac{\bar{z}\varphi(z)}{|z|^2}\,dx\,dy - 2\pi i\int_{|z|>1}\frac{\bar{z}\varphi(z)}{|z|^2}\,dx\,dy = -2\pi i\langle 1/z, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{F}(1/z) = -2\pi i/z$.

12.5　フーリエ変換の無限遠での漸近挙動

例 12.20–12.22 の結果を使うと, 原点で特異性をもつ具体的な $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対し, $\widehat{f}$ の無限遠での漸近挙動を知ることができる. 本節ではその方法を紹介する. この方法は, 特異性をもつ点が原点だけでなく有限個ある場合でも有効である.

例 12.30. まず, $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(x) = e^{-|x|}$ を考える. これはフーリエ変換が具体的に計算できるので, 後でそれと比較してみる. 原点で f を展開する:

$$e^{-|x|} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n!}.$$

原点で特異になる最初の二項を取り出し, $g(x) = -|x| - |x|^3/3!$ とおく. すると $f - g$ は $\mathbb{R}$ 上 C^4 級になる. $(f-g)^{(4)}$ を原点でこれ以上微分することはできないが, $(f-g)^{(4)}$ を $\mathbb{R}$ 上のある局所可積分関数の原始関数として表すことはできる. この局所可積分関数を $(f-g)^{(5)}$ とかく (実際, これはちょうど超関数の意味での 5 回微分に相当する). 原点以外では $g^{(5)} = 0$ なので $(f-g)^{(5)}$ は $f^{(5)}$ に等しく, よって $(f-g)^{(5)}$ は無限遠で急減少する. 特に $(f-g)^{(5)}$ は $\mathbb{R}$ 上可積分である. リーマン・ルベーグの補題 5.11 より $|\xi| \to \infty$ で $\mathcal{F}((f-g)^{(5)})(\xi) \to 0$. 例 12.21 で示したように, g のフーリエ変換は原点以外ではある関数に等しい. それを $\widehat{g}$ とかくと, 原点以外で等式

$$\mathcal{F}((f-g)^{(5)})(\xi) = (i\xi)^5 (\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi))$$

が成り立つ (原点の近傍で 0 になる $\mathcal{S}$ の元をあてればよい). ゆえに $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) + o(|\xi|^{-5})$.

次に, 例 12.21 の結果から $\widehat{g}$ を求める. 正の奇数 m に対し, $\mathcal{F}(|x|^m)$ は原点以外で $2i^{m+1}m!/\xi^{m+1}$ に等しいので, これから $\widehat{g}$ が求まり, 結局,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^4} + o(|\xi|^{-5}) \qquad (|\xi| \to \infty).$$

一方, 例 5.19 で計算したように $\widehat{f}(\xi) = 2/(1+\xi^2)$ であり, これは確かに上の漸近挙動をもつ.

例 12.31. $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(x) = e^{-x}H(x)$ を考える. 原点で f を漸近展開する:

$$e^{-x}H(x) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)H(x) + O(x^3).$$

$g(x) = (1 - x + x^2/2)H(x)$ とおく. $f - g$ は $\mathbb{R}$ 上 C^2 級となり, $(f-g)^{(2)}$ は $\mathbb{R}$ 上のある局所可積分関数 $(f-g)^{(3)}$ の原始関数として表される. 原点以外では $g^{(3)} = 0$ なので $(f-g)^{(3)}$ は $f^{(3)}$ に等しく, よって $(f-g)^{(3)}$ は無限遠で急減少し, 特に $\mathbb{R}$ 上可積分である. リーマン・ルベーグの補題 5.11 より, $|\xi| \to \infty$ で $\mathcal{F}((f-g)^{(3)})(\xi) \to 0$. ゆえに $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) + o(|\xi|^{-3})$.

例 12.21 より, 非負整数 m に対し, $\mathcal{F}(x^m H(x))$ は原点以外で $(-i)^{m+1}m!/\xi^{m+1}$ に等しいので, これから $\widehat{g}$ が求まり, 結局,

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{i}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{i}{\xi^3} + o(|\xi|^{-3}) \qquad (|\xi| \to \infty).$$

一方, $\widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-i\xi x}\,dx$ は直接計算でき, $\widehat{f}(\xi) = 1/(1+i\xi)$ である. これは確かに上の漸近挙動をもつ.

例 12.32. $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(x) = e^{-x^3}H(x)$ を考える. 前の例と同じプロセスを踏む. 原点で f を漸近展開する:

$$e^{-x^3}H(x) = \left(1 - x^3 + \frac{x^6}{2}\right)H(x) + O(x^9).$$

$g(x) = (1 - x^3 + x^6/2)H(x)$ とおく. $(f-g)^{(9)}$ に注目すると, 漸近挙動 $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) + o(|\xi|^{-9})$ を得る. よって,

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{i}{\xi} - \frac{3!}{\xi^4} + i\frac{6!}{2\xi^7} + o(|\xi|^{-9}) \qquad (|\xi| \to \infty).$$

例 12.33. $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(x) = e^{-|x|^3}$ を考える. 原点で f を漸近展開する:

$$e^{-|x|^3} = 1 - |x|^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{|x|^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} + O(|x|^{15}).$$

$g(x) = -|x|^3 - |x|^9/3!$ とおく. $(f-g)^{(15)}$ に注目すると, 漸近挙動 $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) + o(|\xi|^{-15})$ を得る. 例 12.21 より $\widehat{g}(\xi)$ が求まり,

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{2 \cdot 3!}{\xi^4} + \frac{2 \cdot 9!}{3!\,\xi^{10}} + o(|\xi|^{-15}) \qquad (|\xi| \to \infty).$$

このフーリエ変換の漸近挙動を求める方法は, 多くの具体的な関数 f に対して有効である. $|x|^m$ と $x^m H(x)$ だけでなく, $x^m|x|^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ の特異性をもつ関数についても, 例 12.22 の計算結果を応用することができる. 原点以外で特異性をもつ場合は, シフトして得られる関数のフーリエ変換を適宜考えればよい. また, 特異な点が複数個ある場合は, それぞれの点での特異性からくる漸近挙動の和を考えればよい.

例 12.34. $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(x) = |x-1|e^{-|x|}$ を考える. f は $x = 0, 1$ で特異である. それぞれの点で f を漸近展開すると,

$$f(x) = (1-x)e^{-|x|} = (1-x)\left(1 - |x| + \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right),$$
$$f(x) = e^{-1}|x-1|e^{-(x-1)} = e^{-1}|x-1|\left(1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + O((x-1)^3)\right).$$

$g(x) = -(1-x)|x| - e^{-1}|x-1|(1-(x-1))$ とおく. $f-g$ は $\mathbb{R}$ 上 C^2 級となり, $(f-g)^{(2)}$ は $\mathbb{R}$ 上のある局所可積分関数 $(f-g)^{(3)}$ の原始関数として表される. $(f-g)^{(3)}$ は無限遠で急減少し, $\mathbb{R}$ 上可積分となるため, そのフーリエ変換は無限遠で 0 に収束する. よって $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) + o(|\xi|^{-3})$. あとは $\widehat{g}$ を計算すればよい.

注意 12.35. 実数 $\beta > -1$ に対する $\mathbb{R}$ 上の関数 $|x|^\beta$ のフーリエ変換について触れておく. 例 12.22 より, 任意の $0 < \alpha < 1$ と非負整数 m に対し,

$$\mathcal{F}(|x|^{2m-\alpha}) = \mathcal{F}(x^{2m}|x|^{-\alpha}) = (-1)^m c_\alpha \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}|x|^{\alpha-1}.$$

右辺の超関数は, 原点以外で関数

$$(-1)^m c_\alpha (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-2m)|x|^{\alpha-2m-1} \tag{12.6}$$

に等しい. ガンマ関数の公式を使って (12.6) の係数を変形する. ガンマ関数 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ (x は正の実数) は次を満たす:

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- (相補公式) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$.
- (乗法公式) $\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\pi^{-1/2}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)$.

これらについては, 例えば [杉浦, 第 IV 章, §15] を参照せよ. すると,

$$\begin{aligned} c_\alpha &= 2^{1-\alpha}\pi^{1/2}\Gamma(\tfrac{1-\alpha}{2})\Gamma(\tfrac{\alpha}{2})^{-1} = 2^{1-\alpha}\pi^{-1/2}\Gamma(\tfrac{1-\alpha}{2})\Gamma(1-\tfrac{\alpha}{2})\sin\tfrac{\alpha}{2}\pi \\ &= 2\Gamma(1-\alpha)\sin\tfrac{\alpha}{2}\pi. \end{aligned}$$

よって, (12.6) の関数は

$$(-1)^m 2\Gamma(2m-\alpha+1)(\sin\tfrac{\alpha}{2}\pi)|x|^{\alpha-2m-1}$$

と表される. $\beta = 2m-\alpha$ とおくと, $(-1)^m \sin\frac{\alpha}{2}\pi = -\sin\frac{2m-\alpha}{2}\pi$ なので, 上で示したことは, フーリエ変換 $\mathcal{F}(|x|^\beta)$ は原点以外で関数

$$-2\Gamma(\beta+1)(\sin\tfrac{\beta}{2}\pi)|x|^{-\beta-1}$$

に等しいということになる. 実はこの主張は, 整数でない任意の実数 $\beta > -1$ に対しても成り立つ ([Lig, 第 3 章, (16)]). この他にも [Lig] では, $|x|^\beta H(x)$ や $|x|^\beta \log|x|$ など原点で特異性をもつ典型的な関数について, そのフーリエ変換やそれを用いた漸近挙動の計算例が紹介されている.

演習問題

[1] $\mathbb{R}$ 上の δ と非負整数 n に対し, 次を満たす非負整数 N で最小のものを求めよ: $C > 0$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $|\langle \delta^{(n)}, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_N$.

[2] 次を満たす $C > 0$ と非負整数 N を与えよ: 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $|\langle \mathrm{pv}(1/x), \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_N$.

[3] $\mathbb{R}$ 上の可積分関数で多項式増大でないものは存在するか?

[4] $\mathbb{R}$ 上の関数 $g_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2}$ と任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, $\mathcal{S}$ で $g_\varepsilon\varphi \to \varphi$ となることを示せ.

[5] G を $\mathbb{R}^d$ 上のガウス核とし, $\lambda > 0$ に対し $G_\lambda \in \mathcal{S}$ を $G_\lambda(x) = \lambda^d G(\lambda x)$ で定める. 任意の $\psi \in \mathcal{S}$ に対し, $\lambda \to \infty$ のとき $\mathcal{S}$ で $G_\lambda * \psi \to \psi$ となることを示せ.

[6] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元 $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f で $f'' = T$ となるものを一つ求めよ. そして, その f は多項式増大か? ここで $\delta_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ は $\langle \delta_n, \varphi\rangle = \varphi(n)$ で定義される.

[7] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元 $T = \sum_{n=0}^\infty \delta_n^{(n)}$ は緩増加か?

[8] $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元 $T = \sum_{n=0}^\infty 2^n\delta_n$ に対し, $\mathcal{S}$ で $\varphi_n \to 0$ だが $\langle T, \varphi_n\rangle \to 0$ とはならないような $\mathcal{S}$ の元の列 (φ_n) の例を与えよ.

[9] 正の実数の列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ で $T = \sum_{n=0}^\infty a_n\delta_n^{(n)}$ が $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に属するようなものは存在するか?

[10] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x,0)\,dx$ で定める. T は緩増加か?

[11] $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty x\varphi(x,x)\,dx$ で定める. T は緩増加か?

[12] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数 f のフーリエ変換を求めよ:

(i) $f(x) = |x|\,|x-1|$

(ii) $f(x) = |x|\,|x-1|\,|x-2|$.

[13] n を非負整数とする. $\mathbb{R}$ 上の関数 $x^n \operatorname{sgn} x$ のフーリエ変換は原点以外でどんな関数に等しいかを求めよ.

[14] $0 < \alpha < 1$ のとき, $\mathbb{R}$ 上の超関数として $(|x|^\alpha \operatorname{sgn} x)' = \alpha |x|^{\alpha-1}$ であることを示せ. また, 関数 $|x|^\alpha \operatorname{sgn} x$ のフーリエ変換は原点以外でどんな関数に等しいかを求めよ.

[15] (i) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ と $y \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 ψ_y を $\psi_y(x) = \varphi(x,y)$ で定める. $\psi_y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であることと, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $(y,\xi) \mapsto \widehat{\psi_y}(\xi)$ は $\mathbb{R}^2$ 上可積分であることを示せ.

(ii) 次で定まる $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ のフーリエ変換を求めよ: $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x,0)\,dx$.

[16] 次で定まる $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ のフーリエ変換を求めよ: $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x,0)\,dx$.

[17] A を 2×2 正則実行列とする.

(i) $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ に対し, $T \circ A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ を定義せよ (T が関数のときに合成 $T \circ A$ が定義されるので, それと両立するように定義せよ).

(ii) T が緩増加のとき, $T \circ A$ が緩増加であることを示し, $(T \circ A)^\wedge$ を $\widehat{T}$ を用いて表せ.

[18] 次で定まる $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ のフーリエ変換を求めよ: $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x,x)\,dx$.

[19] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\chi_{[0,\infty)\times\mathbb{R}}$, $\chi_{[0,\infty)\times[0,\infty)}$ のフーリエ変換を求めよ.

[20] $\mathbb{R}$ 上の関数 $\log|x|$ のフーリエ変換を求めよ.

[21] $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $\lambda > 0$ に対し, $S_\lambda(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^\lambda \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi$ と定める. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し, $\lambda \to \infty$ で $\langle S_\lambda(f), \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ であることを示せ.

[22] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数 f のフーリエ変換を求めよ:

(i) $f(x) = |x|^{-1/2} \log|x|$.

(ii) $f(x) = |x|^{3/2} \log|x|$.

[23] 次の $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f に対し, フーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ の $|\xi| \to \infty$ での漸近挙動を求めよ.

(i) $f(x) = e^{-x^2} H(x)$.

(ii) $f(x) = |x| e^{-x^2}$.

(iii) $f(x) = e^{-x^2} \log|x|$.

(iv) $f(x) = e^{-x^2}\chi_{[-1,1]}$.

(v) $f(x) = e^{-|x|^{3/2}}\log|x|$.

[24] $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ とする. 次の $\mathbb{R}^2$ 上の偏微分作用素 P に対し, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ が存在して $Pu = f$ となることを示せ. さらに, 多項式増大の $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ で $Pu = f$ を満たすものは唯一であることを示せ.

(i) $P = \triangle - 1$.

(ii) $P = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 + 1$.

ノート

関数 $1/|x|^\alpha$ のフーリエ変換の計算は [Str, 4.2.5] に従った. [Pin, Example 2.2.48], [SS4, Ch. 3, Theorem 2.3] にもある. 他に, 関数の球対称性と同次性に基づいた計算法もある ([GS, II.3.3]). $\mathbb{R}^2$ のラプラシアンの基本解に関する計算は第 9 講のものが一般的だが, ここで紹介したものは [SS4, Ch. 3, Theorem 2.9] に基づく. 12.5 節は [Lig, 第 4 章] に基づく. [Lig] ではより複雑な計算例が数多く見られる.

単位円周 $S^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ 上のルベーグ測度 μ を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ の元と見なしたとき, そのフーリエ変換は

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_0^{2\pi} e^{-i|\xi|\cos\theta}\, d\theta = 2\pi J_0(|\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

と表される. ここで J_0 は (オーダー 0 の) ベッセル関数である. 一般に, $\mathbb{R}^d$ 上の球対称な超関数のフーリエ変換はベッセル関数を用いて表される ([Str, §7.7]).

第13講　緩増加超関数と多項式増大の関数

13.1　多項式増大の関数とその微分

13.1.1　目標とその方針

第 12 講で定義した多項式増大の関数について思い出す. $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f が多項式増大であるとは, $N \in \mathbb{N}$ と $C > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $|f(x)| \le C(1+|x|)^N$ が成り立つことを意味する. 多項式増大の可測関数は緩増加超関数を定め (例 12.4), よって, その超関数としての微分もまた緩増加超関数である. 本節では, 逆に任意の緩増加超関数は多項式増大の連続関数の微分として表されることを示す.

定理 13.1. 任意の $T \in \mathcal{S}'$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数 f と多重指数 α が存在して $T = \partial^\alpha f$.

これにより, 任意の緩増加超関数を多項式増大の関数のように扱うことが可能になり, 13.2 節と 13.3 節では実際に, 緩増加超関数に関するいくつかの命題を関数の場合に帰着させて示す. 具体的な $T \in \mathcal{S}'$ に対し, 定理 13.1 の結論を満たす f を見つけてみる.

例 13.2. $\mathbb{R}$ 上のボレル測度 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ を T とすると, これは $\mathcal{S}'$ の元である (例 12.19). まず, 微分が T となる超関数を作る. $\mathbb{R}$ 上の関数 g を $n \in \mathbb{Z}$ と $x \in [n, n+1)$ に対し $g(x) = n$ となるように定める. 次に, 微分が g となる超関数を作る. $\mathbb{R}$ 上の関数 f を次で定義する: まず $f(0) = 0$ とする. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 区間 $[n, n+1]$ 上で f は傾き n をもつ一次関数であって, f は点 n で連続であるようにする. このとき f は $\mathbb{R}$ 上連続であって, 非負整数 n に対し $f(n) = n(n-1)/2$ かつ $f(-n) = n(n+1)/2$ となるので, f は多項式増大である. そして $T = f''$ である.

例 13.3. 例 9.9 で見たように, $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 $\log|x|$ の微分は $\mathrm{pv}(1/x)$ である. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = x\log|x| - x$ は $\mathbb{R}$ 上連続かつ多項式増大であり, $f'(x) = \log|x|$ なので $(T_f)'' = \mathrm{pv}(1/x)$.

定理 13.1 の証明は少し長くなるので, まず方針を述べる. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ とする. 非負整数 N と $C > 0$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $|\langle T, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_N$ となる (命題 12.1). このような N が存在するとき, T は $\mathcal{S}'$ で**オーダー** N であるということにする. 定理 11.5 の証明で導入した $\mathbb{R}^d$ 上の関数 E を思い出す: $\mathbb{R}^d$ の点 $x = (x_1, \ldots, x_d)$ に対し,

$$E(x) = \begin{cases} x_1^{N+1} \cdots x_d^{N+1}/((N+1)!)^d & \text{すべての } x_i \text{ が正のとき}, \\ 0 & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

関数 E は $\mathbb{R}^d$ 上 C^N 級であって, 等式

$$\partial_1^{N+2} \cdots \partial_d^{N+2} E = \delta$$

を満たす．ここで $\partial_i^n = (\frac{\partial}{\partial x_i})^n$ とおいた．もしたたみ込み $T * E$ を定義することができれば, それを f とおくと

$$\partial_1^{N+2} \cdots \partial_d^{N+2} f = T * (\partial_1^{N+2} \cdots \partial_d^{N+2} E) = T * \delta = T.$$

よって, あとは f が $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数になることを示せばよい．しかし, 今 E はコンパクト台をもたず, そして T もコンパクト台をもつとは限らず, このような場合にはたたみ込み $T * E$ を定義していない．そこでまず, コンパクト台をもつとは限らないが, 台がある条件を満たす超関数 T, S に対して, たたみ込み $T * S$ を定義する．

13.1.2　台が正錐に含まれる超関数

$\mathbb{R}^d$ の点 $a = (a_1, \ldots, a_d)$ に対し, $\Sigma_a = \prod_{i=1}^d [a_i, \infty)$ とおき, この形の集合を $\mathbb{R}^d$ の**正錐**という．正錐の形状から次の性質は容易に従う:

命題 13.4. (1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対し, 交わり $\Sigma_a \cap (-\Sigma_b)$ は空または $\mathbb{R}^d$ の直方体であり, 特にコンパクトである．

(2) 任意の $a \in \mathbb{R}^d$ とコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対し, $b \in \mathbb{R}^d$ が存在して $\Sigma_a + K \subset \Sigma_b$.

ここで, 部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ に対し $-A = \{ -x \mid x \in A \}$ とおき, そして

$$A + B = \{ x + y \mid x \in A,\ y \in B \}$$

とおいた．集合 $A - B$ も同様に定める．$\mathbb{R}^d$ の点 x に対し, $x + A = \{ x + y \mid y \in A \}$ とおき, 集合 $x - A$ なども同様に定める．次に, 台が正錐に含まれるような超関数を考える．

命題 13.5. $T \in \mathcal{D}'$ と $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\operatorname{supp} T \subset \Sigma_a$ と $\operatorname{supp} \varphi \subset -\Sigma_b$ を満たすとする．$\eta \in \mathcal{D}$ でコンパクト集合 $\Sigma_a \cap (-\Sigma_b)$ の近傍で 1 となるものをとり,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle$$

と定める ($\eta\varphi$ はコンパクト台をもち $\mathcal{D}$ に属するので, 右辺の値 $\langle T, \eta\varphi \rangle$ が定まる)．この値は η のとり方によらない．さらに任意の多重指数 α に対し, 次の等式が成り立つ:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

実際, $\zeta \in \mathcal{D}$ で $\Sigma_a \cap (-\Sigma_b)$ の近傍で 1 となるものをとると, $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\eta\varphi = \zeta\varphi$ となることが確かめられ, 命題 10.8 (1) より前半の主張が従う．後半の微分についての主張は, $\operatorname{supp} T$ の近傍で $\partial^\alpha(\eta\varphi) = \eta\partial^\alpha\varphi$ であることに注意すればよい．

命題 13.6. $T, S \in \mathcal{D}'$ は $\operatorname{supp} T \subset \Sigma_a$ と $\operatorname{supp} S \subset \Sigma_b$ を満たすとする．写像 $T * S \colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, S^\sim * \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

で定義する (命題 10.2 で示したように $S^\sim * \varphi$ は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元である．その台は $\operatorname{supp} \varphi - \Sigma_b$ に含まれ, そしてこれはある $-\Sigma_c$ に含まれるので, 命題 13.5 より, 右辺の値 $\langle T, S^\sim * \varphi \rangle$ が定まる)．このとき, $T * S$ は $\mathcal{D}'$ の元である．

これを示すには, $\eta \in \mathcal{D}$ で $\Sigma_a \cap (-\Sigma_c)$ の近傍で 1 となるものをとり, $\mathcal{D}$ で $\varphi_n \to \varphi$ ならば $\mathcal{D}$ で $\eta(S^\sim * \varphi_n) \to \eta(S^\sim * \varphi)$ であることを示せばよい. しかしこれは補題 10.13 (2) で示している.

命題 13.7. 命題 13.6 の T, S と多重指数 α に対し,

$$\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S).$$

これは微分の定義に従って示せばよい. 途中で命題 10.2 と命題 13.5 の後半の主張を用いる.

13.1.3 定理 13.1 の証明

命題 11.4 と同様に, 次の主張が成り立つ:

命題 13.8. $T \in \mathcal{S}'$ は $\mathcal{S}'$ でオーダー N であるとし, $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ とする. また, $\operatorname{supp} T \subset \Sigma_a$ かつ $\operatorname{supp} f \subset \Sigma_b$ とする. このとき, たたみ込み $T * f \in \mathcal{D}'$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数である.

証明は命題 11.4 とほぼ同様である. ただ長いため, ここでは方針を述べるにとどめる. $\psi \in \mathcal{D}$ で $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx = 1$ となるものをとり, $\psi_n \in \mathcal{D}$ を $\psi_n(x) = n^d \psi(nx)$ で定める. すると任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$\operatorname{supp} \tau_x(\psi_n * f)^\sim \subset x - \operatorname{supp} \psi - \operatorname{supp} f \subset x - \operatorname{supp} \psi - \Sigma_b$$

であって, これはある $-\Sigma_c$ に含まれる. よって値 $\langle T, \tau_x(\psi_n * f)^\sim \rangle$ が定まる. 命題 11.4 に倣って次を示す: 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$F_n(x) = \langle T, \tau_x(\psi_n * f)^\sim \rangle$$

とおくと, 極限 $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ が存在し, 関数 F は $\mathbb{R}^d$ 上連続である. そして $T * f = F$ である.

まず, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $(F_n(x))_n$ がコーシー列になることを示す. この際, T が $\mathcal{S}'$ でオーダー N であることと f が C^N 級であることを用いる. より具体的には, 命題 11.4 の証明で一様ノルムに関して評価していた部分がノルム $\|\cdot\|_N$ に関する評価に置き換わる. そして, 多重指数 β で $|\beta| \le N$ となるものに対し, $\psi_n * (\partial^\beta f)$ が $\partial^\beta f$ に $\mathbb{R}^d$ 上広義一様収束するので, これを用いてノルムの評価をする. この評価を経て, 数列 $(F_n(x))_n$ の収束が従うので, その極限を $F(x)$ とかく. さらにこの収束が実は $\mathbb{R}^d$ 上広義一様であることも同じ評価から従う. F_n が連続であることを示した後, F も連続であることが従う.

等式 $T * f = F$ に関しても命題 11.4 の証明と同様である. リーマン和による近似をすることにより, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し等式 $\langle T, f^\sim * \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle$ を示した後, 等式 $T * f = F$ を得る (η のとり方を少し気をつける必要があるが, これ以上詳細を述べるのはやめておく).

命題 13.9. T と f を命題 13.8 のものとする. もし $|\alpha| \le N$ となる任意の多重指数 α に対し関数 $\partial^\alpha f$ が多項式増大ならば, 関数 $T * f$ も多項式増大である.

補題を一つ用意した後, これを示す. $\mathbb{R}^d$ の部分集合で, 閉区間の積でかけるものを**直方体**とよぶ. 直方体 $K = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ に対し, K を距離 1 だけふくらませた直方体とは $\prod_{i=1}^d [a_i - 1, b_i + 1]$ を意味する.

補題 13.10. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, $A_N > 0$ が存在して次が成り立つ: $\mathbb{R}^d$ の任意の直方体 K に対し, 次の二条件を満たす $\eta_K \in \mathcal{D}$ が存在する:

- $0 \le \eta_K \le 1$ かつ K の近傍で $\eta_K = 1$ であって, $\operatorname{supp} \eta_K$ は K を距離 1 だけふくらませた直方体に含まれる.
- 不等式 $\sum_{|\alpha| \le N} \|\partial^\alpha \eta_K\|_\infty \le A_N$ が成り立つ.

定数 A_N が直方体 K によらないことが後で大事になる.

証明. $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数 η_0 で $0 \le \eta_0 \le 1$ であって, 区間 $(-\infty, 0]$ の近傍で $\eta_0 = 1$, そして, 区間 $[1, \infty)$ の近傍で $\eta_0 = 0$ となるものをとる. $\mathbb{R}^d$ の直方体 $K = \prod_i [a_i, b_i]$ に対し, $\eta_K \in \mathcal{D}$ を次で定める: K 上で $\eta_K = 1$ とし, K を距離 1 だけふくらませた直方体の外で $\eta_K = 0$ として, ふくらませた部分では η_0 を使って定義する. 例えば, 点 $x = (x_1, \ldots, x_d)$ が任意の i に対し $b_i \le x_i \le b_i + 1$ を満たすならば,

$$\eta_K(x) = \eta_0(x_1 - b_1) \cdots \eta_0(x_d - b_d)$$

と定義する. η_K の微分の値は η_0 からくるものしか現れないので, 補題の結論を満たす A_N が K によらずにとれる. □

命題 13.9 の証明. 命題 13.8 の証明の方針を述べたとき, $\psi \in \mathcal{D}$ をとり $\psi_n \in \mathcal{D}$ を定め, そして, $\mathbb{R}^d$ 上の関数 F_n を

$$F_n(x) = \langle T, \tau_x(\psi_n * f)^\sim \rangle$$

で定めた. 各点で F_n は $T * f$ に収束する. F_n の絶対値が n によらない多項式でおさえられることを以下で示す. これができれば $T * f$ が多項式増大であることが従う.

はじめに $\psi \in \mathcal{D}$ をとったが, これは $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx = 1$ を満たせば何でもよいので, はじめから $\operatorname{supp} \psi \subset (-1, 1)^d$ となるようにしておく. $\operatorname{supp} T \subset \Sigma_a$ と $\operatorname{supp} f \subset \Sigma_b$ が仮定されている. $\mathbb{R}^d$ の点 x をしばらく固定する. $\operatorname{supp} \tau_x(\psi_n * f)^\sim$ は $x - \operatorname{supp} \psi - \Sigma_b$ に含まれ, これは $-\Sigma_c$ に含まれる. ここで

$$c = b - (1, \ldots, 1) - x$$

とおく. $B = \Sigma_a \cap (-\Sigma_c)$ とおくと, これは a と $-c$ を頂点とする直方体である. B_1 で B を距離 1 だけふくらませた直方体を表す. 補題 13.10 の A_N と $\eta_B \in \mathcal{D}$ をとる. η_B は B の近傍で 1 となり, その台は B_1 に含まれる. T は $\mathcal{S}'$ でオーダー N だったので, それからくる定数 $C > 0$ をとると,

$$\begin{aligned} |F_n(x)| &= |\langle T, \eta_B \tau_x(\psi_n * f)^\sim \rangle| \le C \|\eta_B \tau_x(\psi_n * f)^\sim\|_N \\ &= C \sum_{|\alpha|, |\beta| \le N} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |y^\alpha \partial^\beta (\eta_B \tau_x(\psi_n * f)^\sim)(y)|. \end{aligned} \tag{13.1}$$

η_B の台は B_1 に含まれるので, 右辺の sup は $y \in B_1$ に対してとったものと等しい.

(13.1) の右辺の絶対値を評価する. 任意の $y \in B_1$ に対し, $y_1 \in B$ が存在して $|y - y_1| \le \sqrt{d}$. 直方体 B の二点間の距離は B の頂点 a, $-c$ 間の距離以下なので $|y_1 - a| \le |-c - a|$. 左辺に関しては

$$|y_1 - a| \ge |y_1| - |a| \ge |y| - \sqrt{d} - |a|.$$

一方, 右辺に関しては

$$|-c-a| = |x-b+(1,\ldots,1)-a| \le |x| + |b-(1,\ldots,1)+a|.$$

ゆえに, n と x によらない $C_1>0$ が存在して $|y| \le C_1(1+|x|)$.

次に, 多重指数 β で $|\beta| \le N$ となるものをとる. ライプニッツ則より $c_{\beta_1\beta_2}>0$ が存在して, 任意の $y \in B_1$ に対し,

$$|\partial^\beta(\eta_B\tau_x(\psi_n * f)^\sim)(y)| \le \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} c_{\beta_1\beta_2}|\partial^{\beta_1}\eta_B(y)|\,|\tau_x(\psi_n^\sim * \partial^{\beta_2}(f^\sim))(y)|.$$

右辺の和の中にある一つ目の絶対値は A_N 以下である. A_N は B によらず, x にもよらない. 二つ目の絶対値に関しては,

$$\begin{aligned}
&|\tau_x(\psi_n^\sim * \partial^{\beta_2}(f^\sim))(y)| = |(\psi_n^\sim * \partial^{\beta_2}(f^\sim))(y-x)| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_n^\sim(z)(\partial^{\beta_2}(f^\sim))(y-x-z)|\,dz \le \|\psi\|_1 \|\partial^{\beta_2}(f^\sim)|_{B_1-x-\operatorname{supp}\psi}\|_\infty.
\end{aligned}$$

任意の $y \in B_1$ と $y_1 \in \operatorname{supp}\psi$ に対し, 点 $z = y-x-y_1$ は次の不等式を満たす:

$$|z| \le |x| + |y| + \sqrt{d} \le |x| + C_1(1+|x|) + \sqrt{d}.$$

関数 $\partial^{\beta_2}(f^\sim)$ は多項式増大なので, n と x によらない $C_2>0$ と $M \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\|\partial^{\beta_2}(f^\sim)|_{B_1-x-\operatorname{supp}\psi}\|_\infty \le C_2(1+|x|)^M.$$

$|\beta_2| \le N$ なので, この C_2 と M は β_2 にもよらないとしてよい. 以上により, n と x によらない $C_3>0$ が存在して, (13.1) と併せて次の不等式を得る:

$$|F_n(x)| \le C \sum_{|\alpha|,|\beta| \le N} C_1^{|\alpha|}(1+|x|)^{|\alpha|} C_3(1+|x|)^M.$$

右辺は n によらない多項式でおさえられる. □

定理 13.1 の証明. $T \in \mathcal{S}'$ は $\mathcal{S}'$ でオーダー N であるとする. 13.1.1 節で証明の方針を述べたときに注目した関数 E を思い出す. E は C^N 級であって, 正錐 $\Sigma_{(0,\ldots,0)}$ を台にもつ. さらに, $|\alpha| \le N$ となる任意の多重指数 α に対し $\partial^\alpha E$ は多項式増大である. もし $\operatorname{supp} T$ がある正錐 Σ_a に含まれるならば, たたみ込み $T * E$ を定義することができ, それを f とおくと, 命題 13.8, 13.9 より, f は $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数であって

$$\partial_1^{N+2}\cdots\partial_d^{N+2} f = T.$$

これで定理の結論を得る.

一般の場合を考える. $\mathbb{R}^d$ の部分集合で, $[a,\infty)$ または $(-\infty,a]$ の形をした $\mathbb{R}$ の区間の積としてかけるものを $\mathbb{R}^d$ の**錐**という. $\mathbb{R}^d$ の 1 の分割を与える有限個の $\psi_1,\ldots,\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在して, 任意の $k=1,\ldots,m$ について $\operatorname{supp}\psi_i$ は $\mathbb{R}^d$ のある錐に含まれる. ここで, ψ_k たちが $\mathbb{R}^d$ の 1 の分割を与えるとは, $0 \le \psi_k \le 1$ かつ $\sum_{k=1}^m \psi_k = 1$ であることを意味する (例えば, $d=2$ のと

き, 第 1 から第 4 象限それぞれに対し, その近傍を含む錐 $L_1, \ldots, L_4$ をとると, これらは $\mathbb{R}^2$ を覆う. 命題 10.6 より $\mathbb{R}^2$ の 1 の分割を与える $\psi_1, \ldots, \psi_4 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ で $\operatorname{supp}\psi_k \subset L_k$ となるものがとれる). すると $T = \sum_{k=1}^m \psi_k T$ とかける ($\psi_k T$ は $\varphi \mapsto \langle T, \psi_k\varphi\rangle$ で定義される $\mathcal{D}'$ の元であり, その台は $\operatorname{supp}\psi_k$ に含まれる). 各 $\psi_k T$ について, 適当に座標を反転させることにより, 台が正錐に含まれる場合の結論が適用できる. その結果, $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数 f_k と多重指数 α_k が存在して $\psi_k T = \partial^{\alpha_k} f_k$ とかける. $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ とおく. f_k の積分を考えることにより, 多項式増大の連続関数 g_k が存在して $\partial^{\alpha_k} f_k = \partial^\alpha g_k$ とかける (一般に, 多項式増大の連続関数 h に対し, それを積分して定義される関数

$$h_1(x) = \int_0^{x_1} h(y, x_2, \ldots, x_d)\, dy, \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

は多項式増大である). ゆえに, 等式

$$T = \sum_{k=1}^m \partial^{\alpha_k} f_k = \partial^\alpha \left(\sum_{k=1}^m g_k \right)$$

が得られ, そして $\sum_{k=1}^m g_k$ は多項式増大の連続関数である. □

13.2 緩増加超関数と急減少関数のたたみ込み

$\mathcal{D}'$ の元と $\mathcal{D}$ の元のたたみ込みを 10.1 節で定義したが, それと同様にして $\mathcal{S}'$ の元と $\mathcal{S}$ の元のたたみ込みを定義する. すなわち, $T \in \mathcal{S}'$ と $\psi \in \mathcal{S}$ に対し, たたみ込み $T * \psi$ を $\mathbb{R}^d$ 上の関数として次で定義する:

$$(T * \psi)(x) = \langle T, \tau_x \psi^\sim \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

まずは T が多項式増大の連続関数であるときから考える.

補題 13.11. f を $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数とし, $\psi \in \mathcal{S}$ とする. このとき, 関数 $f * \psi$ は $\mathbb{R}^d$ 上多項式増大かつ C^∞ 級である. そして, 任意の多重指数 α に対し $\partial^\alpha (f * \psi) = f * (\partial^\alpha \psi)$.

証明. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し, 不等式

$$1 + |x| \le (1 + |x - y|)(1 + |y|)$$

が成り立つ. 実際, 右辺から左辺を引くと $|x-y|\,|y| + |x-y| + |y| - |x| \ge |x-y|\,|y| \ge 0$. 以下の評価でこの不等式を用いる. f は多項式増大なので, $C > 0$ と $M \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $|f(x)| \le C(1+|x|)^M$. 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$\begin{aligned}
|(f * \psi)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,|\psi(x-y)|\, dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \frac{C}{(1+|y|)^{d+1}} \frac{(1+|y|)^{M+d+1}}{(1+|x-y|)^{M+d+1}} (1+|x-y|)^{M+d+1} |\psi(x-y)|\, dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \frac{C\, dy}{(1+|y|)^{d+1}} (1+|x|)^{M+d+1} C_1 \|\psi\|_{M+d+1}.
\end{aligned}$$

ここで C_1 は $\psi \in \mathcal{S}$ からくる正の定数である. 右辺の積分は有限であり, よって $f * \psi$ は多項式増大である.

次に $f * \psi$ が C^∞ 級であることを示す. $x \in \mathbb{R}^d$ をとり, $\mathbb{R}^d$ の単位ベクトル $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ をとる. 実数 $h \neq 0$ に対し,

$$\frac{(f * \psi)(x + he_1) - (f * \psi)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\psi(x + he_1 - y) - \psi(x - y)}{h}\, dy. \tag{13.2}$$

$h \to 0$ としてルベーグ収束定理を適用するため, 右辺の被積分関数を評価する. $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ とかく. 平均値の定理より, $\xi \in (0, 1)$ が存在して次が成り立つ: $z = x + \xi e_1 - y$ とおいて,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi(x + he_1 - y) - \psi(x - y)}{h} \right| = |\partial_1 \psi(z)| \\
&= \frac{1}{(1 + |y|)^{M+d+1}} \frac{(1 + |y|)^{M+d+1}}{(1 + |z|)^{M+d+1}} (1 + |z|)^{M+d+1} |\partial_1 \psi(z)| \\
&\leq \frac{(1 + |x + \xi e_1|)^{M+d+1}}{(1 + |y|)^{M+d+1}} C_2 \|\psi\|_{M+d+2} \leq \frac{C_3}{(1 + |y|)^{M+d+1}}.
\end{aligned}$$

ここで C_2 は $\psi \in \mathcal{S}'$ からくる正の定数であり, C_3 は y と h によらない正の定数である. よって

$$\left| f(y) \frac{\psi(x + he_1 - y) - \psi(x - y)}{h} \right| \leq \frac{CC_3}{(1 + |y|)^{d+1}}$$

となり, 右辺は y について $\mathbb{R}^d$ 上可積分である. ゆえに, 等式 (13.2) において $h \to 0$ としたとき, ルベーグ収束定理が適用でき, その結果, $f * \psi$ は x_1 について偏微分可能であって, その偏導関数は $f * (\partial_1 \psi)$ になる. 他の変数に関しても同様であり, これを繰り返すことができるので $f * \psi$ は C^∞ 級である. □

注意 13.12. 補題 13.11 の証明で $f * \psi$ が多項式増大であることを示す際, ψ が C^∞ 級であることは用いておらず, ψ が急減少であることしか用いていない. よってこの証明から, $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の可測関数 f と急減少の可測関数 ψ に対し, たたみ込み $(f * \psi)(x)$ がすべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して定まり, さらに関数 $f * \psi$ が多項式増大であることが従う.

命題 13.13. 任意の $T \in \mathcal{S}'$ と $\psi \in \mathcal{S}$ に対し, 次が成り立つ:

(1) 定理 13.1 より, $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数 f と多重指数 α が存在して $T = \partial^\alpha f$ とかけるが, このとき $T * \psi = f * (\partial^\alpha \psi)$.

(2) 関数 $T * \psi$ は $\mathbb{R}^d$ 上多項式増大かつ C^∞ 級である.

証明. 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$(T * \psi)(x) = \langle \partial^\alpha f, \tau_x \psi^\sim \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha (\tau_x \psi^\sim) \rangle = \langle f, \tau_x (\partial^\alpha \psi)^\sim \rangle = (f * (\partial^\alpha \psi))(x)$$

なので (1) が従う. (2) は (1) と補題 13.11 から従う. □

命題 13.14. 任意の $T \in \mathcal{S}'$ と $\psi, \varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\langle T * \psi, \varphi \rangle = \langle T, \psi^\sim * \varphi \rangle$.

証明. 定理 13.1 より, $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数 f と多重指数 α が存在して $T=\partial^\alpha f$. 命題 13.13 (1) より, 次の一つ目の等式が従う:

$$\begin{aligned}\langle T*\psi,\varphi\rangle &= \langle f*(\partial^\alpha\psi),\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}(f*(\partial^\alpha\psi))(x)\varphi(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\underbrace{(\partial^\alpha\psi)(x-y)}_{=(\partial^\alpha\psi)^\sim(y-x)=(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\psi^\sim)(y-x)}\varphi(x)\,dx\,dy\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)((\partial^\alpha(\psi^\sim))*\varphi)(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|}\langle f,(\partial^\alpha(\psi^\sim))*\varphi\rangle\\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha(\psi^\sim*\varphi)\rangle = \langle\partial^\alpha f,\psi^\sim*\varphi\rangle = \langle T,\psi^\sim*\varphi\rangle.\end{aligned}$$ □

命題 13.15. 任意の $T\in\mathcal{S}'$, $\psi\in\mathcal{S}$ と多重指数 α に対し,

$$\partial^\alpha(T*\psi)=(\partial^\alpha T)*\psi=T*(\partial^\alpha\psi).$$

証明. まず T が $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数 f であるときに示す. 第 1 項と第 3 項が等しいことは補題 13.11 で示した. 任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対し

$$\begin{aligned}\langle\partial^\alpha(f*\psi),\varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle f*\psi,\partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f,\psi^\sim*(\partial^\alpha\varphi)\rangle\\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha(\psi^\sim*\varphi)\rangle = \langle\partial^\alpha f,\psi^\sim*\varphi\rangle = \langle(\partial^\alpha f)*\psi,\varphi\rangle\end{aligned}$$

なので, 第 1 項と第 2 項が等しい. 二つ目と五つ目の等式は命題 13.14 による.

一般の $T\in\mathcal{S}'$ に対しては, 定理 13.1 より, $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の連続関数 f と多重指数 β が存在して $T=\partial^\beta f$. 上で示したことを使うと,

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(T*\psi) &= \partial^\alpha((\partial^\beta f)*\psi)=\partial^\alpha(f*(\partial^\beta\psi))=f*(\partial^{\alpha+\beta}\psi)\\ &= \begin{cases}(\partial^\beta f)*(\partial^\alpha\psi)=T*(\partial^\alpha\psi),\\ (\partial^{\alpha+\beta}f)*\psi=(\partial^\alpha T)*\psi.\end{cases}\end{aligned}$$ □

9.1 節で述べたように, $E\in\mathcal{D}'$ をラプラシアン $\triangle$ の基本解とすると, 任意の $f\in\mathcal{D}$ に対し, たたみ込み $u=E*f$ は $\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 級関数であって $\triangle u=f$ を満たす. 本節で導入したたたみ込みを用いれば, $f\in\mathcal{S}$ の場合も解 u を見つけることができる.

系 13.16. 任意の $f\in\mathcal{S}$ に対し, 多項式増大の $u\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在して $\triangle u=f$.

実際, E を 12.4 節で得た $\triangle$ の基本解とすると, $E\in\mathcal{S}'$ なので, $f\in\mathcal{S}$ に対し, $u=E*f$ は $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の C^∞ 級関数であって $\triangle u=(\triangle E)*f=\delta*f=f$.

13.3　フーリエ変換に関するいくつかの命題

基本的には, 系 11.8 と定理 13.1 を用いて関数の場合に帰着させる.

命題 13.17. $T\in\mathcal{D}'$ はコンパクト台をもつとする (例 12.5 より $T\in\mathcal{S}'$ である). 次が成り立つ:

(1) $\widehat{T}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の多項式増大の C^∞ 級関数である.

(2) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し
$$\widehat{T}(\xi) = \langle \bar{T}, \varphi_\xi \rangle.$$
ただし, φ_ξ は $\varphi_\xi(x) = e^{-i\xi\cdot x}$ で定まる $\mathbb{R}^d$ 上の関数であり, $\bar{T}$ は T の $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ への拡張である (命題 10.12).

証明. 系 11.8 より, コンパクト台をもつ連続関数 f と多重指数 α により $T = \partial^\alpha f$ とかける場合に示せば十分である. 命題 12.11 より $\widehat{T} = (\partial^\alpha f)^\wedge = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{f}$. 関数 $\widehat{f}$ は $\mathbb{R}^d$ 上有界なので, $\widehat{T}$ は多項式増大の関数である. また, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し $\widehat{f}(\xi) = \int_{\operatorname{supp} f} f(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx$. $\operatorname{supp} f$ がコンパクトであることとルベーグ収束定理より, 右辺が ξ に関して C^∞ 級であることが従う. $\eta \in \mathcal{D}$ で $\operatorname{supp} f$ の近傍で $\eta = 1$ となるものをとると, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し
$$\begin{aligned}
\langle \bar{T}, \varphi_\xi \rangle &= \langle T, \eta\varphi_\xi \rangle = \langle \partial^\alpha f, \eta\varphi_\xi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha(\eta\varphi_\xi)\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\int_{\operatorname{supp} f} f(x)\partial^\alpha(\eta\varphi_\xi)(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\operatorname{supp} f} f(x)(\partial^\alpha\varphi_\xi)(x)\,dx \\
&= \int_{\operatorname{supp} f} f(x)i^{|\alpha|}\xi^\alpha e^{-i\xi\cdot x}\,dx = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{f}(\xi) = \widehat{T}(\xi). \qquad \square
\end{aligned}$$

以下の命題を示す際, $\mathcal{S}$ の元に反転とフーリエ変換を複数回施した関数を考える必要がある. そこで次の記法を導入する. $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し, その右肩に $\sim$ と $\wedge$ を並べることにより, φ に反転とフーリエ変換を順に施して得られる関数を表す. 例えば $\varphi^{\sim\wedge\wedge}$ は φ を一回反転させ, その後, 二回フーリエ変換して得られる関数を表す. 定理 7.7 より, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\varphi^{\wedge\wedge} = (2\pi)^d\varphi^\sim$. また, 直接計算により, 等式 $\varphi^{\wedge\sim} = \varphi^{\sim\wedge}$ と等式 $(\varphi * \psi)^\sim = \varphi^\sim * \psi^\sim$ が得られる.

命題 13.18. 任意の $T \in \mathcal{S}'$ と $\psi \in \mathcal{S}$ に対し,
$$(T * \psi)^\wedge = \widehat{\psi}\widehat{T}$$
(右辺は C^∞ 級関数と超関数の積である).

証明. 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し
$$\begin{aligned}
\langle (T*\psi)^\wedge, \varphi \rangle &= \langle T*\psi, \varphi^\wedge \rangle = \langle T, \psi^\sim * \varphi^\wedge \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d}\langle T, (\psi^\sim * \varphi^\wedge)^{\sim\wedge\wedge}\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\langle \widehat{T}, (\psi * \varphi^{\wedge\sim})^\wedge \rangle = \langle \widehat{T}, \widehat{\psi}\varphi \rangle = \langle \widehat{\psi}\widehat{T}, \varphi \rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

命題 13.19. $T, S \in \mathcal{S}'$ とし, S はコンパクト台をもつとする. このとき, $T * S$ は $\mathcal{S}'$ に属し,
$$(T * S)^\wedge = \widehat{S}\widehat{T}$$
(命題 13.17 (1) より $\widehat{S}$ は C^∞ 級関数であることに注意する).

証明. 系 11.8 と定理 13.1 より, $T = \partial^\alpha f$, $S = \partial^\beta g$ とかけるときに示せばよい. ここで f は多項式増大の連続関数で, g はコンパクト台をもつ連続関数である (α と β は多重指数である). 命題

10.17 より $T*S=\partial^{\alpha+\beta}(f*g)$. $f*g$ は多項式増大の連続関数なので (注意 13.12), $T*S$ は $\mathcal{S}'$ に属する.

等式 $(f*g)^\wedge=\widehat{g}\widehat{f}$ を示す. 等式 $(T*S)^\wedge=\widehat{S}\widehat{T}$ はこれから従う. 実際,

$$(T*S)^\wedge=(\partial^{\alpha+\beta}(f*g))^\wedge=i^{|\alpha+\beta|}\xi^{\alpha+\beta}(f*g)^\wedge=i^{|\alpha+\beta|}\xi^{\alpha+\beta}\widehat{g}\widehat{f}=\widehat{S}\widehat{T}.$$

任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle(f*g)^\wedge,\varphi\rangle&=\langle f*g,\varphi^\wedge\rangle=\langle f,g^\sim*\varphi^\wedge\rangle=\frac{1}{(2\pi)^d}\langle f,(g^\sim*\varphi^\wedge)^{\sim\wedge\wedge}\rangle\\&=\frac{1}{(2\pi)^d}\langle\widehat{f},(g*\varphi^{\wedge\sim})^\wedge\rangle=\langle\widehat{f},\widehat{g}\varphi\rangle=\langle\widehat{g}\widehat{f},\varphi\rangle.\end{aligned}$$

よって $(f*g)^\wedge=\widehat{g}\widehat{f}$. □

ノート

定理 13.1 は [FJ, Theorem 8.3.1] に基づく. 多項式増大という用語は [FJ] に従った (本来は「せいぜい」多項式増大とよぶべきかもしれない). ハーン・バナッハの定理を用いた定理 13.1 の証明が [垣田, 第 2 章, §2] にある. 13.2 節と 13.3 節の内容は主に [C, Ch. 12] を参考にした.

第14講　偏微分方程式論に向けて

これまで扱ってきた超関数の一般論の応用として, 偏微分方程式に関する二つの定理を示す (定理 14.1, 14.9). どちらの定理も楕円型とよばれる偏微分作用素についてのものである.

14.1　楕円型正則性定理

14.1.1　定理の内容

$\mathbb{R}^d$ 上の (定数係数) 偏微分作用素

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha$$

を考える. ここで m は非負整数であり, 多重指数 α に対し a_α は複素数である. P は**オーダー** m をもつとする. つまり, 多重指数 α で $|\alpha| = m$ かつ $a_\alpha \neq 0$ となるものが存在するとする. 偏微分作用素 P の**全シンボル** p と**シンボル** σ_P を次の d 変数多項式として定義する:

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha, \qquad \sigma_P(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha.$$

任意の $u \in \mathcal{S}$ に対し, 等式 $\widehat{Pu}(\xi) = p(\xi)\widehat{u}(\xi)$ が成り立つことに注意する. 偏微分作用素 P の性質と多項式 p の性質が関連することは, すでに何度か指摘してきた.

偏微分作用素 P が**楕円型**であるとは, そのシンボル σ_P が $\mathbb{R}^d$ で原点以外の零点をもたないときをいう. ラプラシアン $\triangle$ やコーシー・リーマン作用素 $\bar{\partial}$ はその例である. 本節では次を示す:

定理 14.1 (楕円型正則性定理)**.** P を $\mathbb{R}^d$ 上の楕円型偏微分作用素とし, $u \in \mathcal{D}'$ とする. もし超関数 Pu が $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属するならば, u も $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する. 特に, 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の偏微分方程式 $Pu = f$ の解 u は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する.

この定理を $\triangle$ に適用すると, $\mathbb{R}^d$ 上の調和関数は $\mathbb{R}^d$ 上 C^∞ 級であることが従う. $\bar{\partial}$ に適用すると, $\mathbb{C}$ 上の正則関数は $\mathbb{C}$ 上 C^∞ 級であることが従う. 定理 14.1 は, これらよく知られた事実が偏微分作用素の楕円型という性質から導かれることを主張する.

例 14.2. $\mathbb{R}^2$ 上の偏微分作用素

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

は楕円型でない. $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分関数 u がもし x_2 のみによるならば, (超関数として) $Pu = 0$ である. よって, この P に対して定理 14.1 の結論は正しくない.

14.1.2　超関数の特異台

超関数 $T \in \mathcal{D}'$ と $\mathbb{R}^d$ の開部分集合 U に対し, T が U で C^∞ **級**であるとは, $f \in C^\infty(U)$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ に対し等式 $\langle T, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ が成り立つときをいう. 集合 Λ の元 λ で添字付けられた開部分集合 U_λ 上で T が C^∞ 級ならば, その和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ の上でも T は C^∞ 級である. これは 1 の局所有限分割 (命題 10.6) を使って示すことができる (確かめよ). よって, T が C^∞ 級であるような開部分集合すべての和集合をとると, その上で T は C^∞ 級である. その和集合の補集合を T の**特異台**といい, $\operatorname{sing\,supp} T$ とかく.

例 14.3. ディラックのデルタ δ の特異台は $\{0\}$ である. $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数 $\log|x|$ の特異台も $\{0\}$ である. 任意の $T \in \mathcal{D}'$ に対し, T の特異台が空であることと T が $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元に等しいことは同値である.

命題 14.4. $T, S \in \mathcal{D}'$ とし, S はコンパクト台をもつとする. このとき,

$$\operatorname{sing\,supp}(T * S) \subset \operatorname{sing\,supp} T + \operatorname{sing\,supp} S.$$

証明. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ を T の特異台の近傍で $\varphi = 1$ となるものとし, $\psi \in \mathcal{D}$ を S の特異台の近傍で $\psi = 1$ となるものとする. 等式

$$\begin{aligned} T * S &= (\varphi T + (1-\varphi)T) * (\psi S + (1-\psi)S) \\ &= (\varphi T) * (\psi S) + (\varphi T) * ((1-\psi)S) + ((1-\varphi)T) * (\psi S) + ((1-\varphi)T) * ((1-\psi)S) \end{aligned}$$

において, 右辺の第 4 項は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元と $\mathcal{D}$ の元のたたみ込みであり, これは $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元である. 第 3 項は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元とコンパクト台をもつ $\mathcal{D}'$ の元のたたみ込みであり, これも $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元である. 実際, $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元とコンパクト台をもつ連続関数のたたみ込みが C^∞ 級であることは直接示せるので, あとは系 11.8 を使って, 一般の場合をこの場合に帰着させればよい (あるいは第 10 講の演習問題 [10] を適用してもよい). 第 2 項は $\mathcal{D}'$ の元と $\mathcal{D}$ の元のたたみ込みであり, これも $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元である (命題 10.2). ゆえに,

$$\operatorname{sing\,supp}(T * S) \subset \operatorname{supp}((\varphi T) * (\psi S)) \subset \operatorname{supp}(\varphi T) + \operatorname{supp}(\psi S) \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi.$$

$\operatorname{supp}\varphi$ と $\operatorname{supp}\psi$ は, φ と ψ を換えればそれぞれ T の特異台と S の特異台に近づけられるので, これで命題の包含を得る. □

14.1.3　定理の証明

さらにもう一つ, 超関数の微分に関する補題を用意しておく.

補題 14.5. U を $\mathbb{R}^d$ の開部分集合とし, $T \in \mathcal{D}'$ は U 上で連続関数 f に等しいとする (つまり, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ に対し $\langle T, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ が成り立つとする). さらに $\partial_1 T$ は U 上で連続関数 g に等しいとする (ただし $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ とおく). このとき, f は U 上で ∂_1 に関して通常の意味で偏微分可能で $\partial_1 f = g$.

証明. U が開直方体 $\prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i)$ であるときに示せば十分である. $I = (a_1, b_1)$, $V = \prod_{i=2}^{d}(a_i, b_i)$ とおく. U 上の関数 G を

$$G(x, y) = \int_{a_1}^{x} g(t, y)\,dt, \quad x \in I,\ y \in V$$

で定める (右辺の積分が定義されない場合は, もう少し小さい U に対して考えればよい). G は ∂_1 に関して通常の意味で偏微分可能で $\partial_1 G = g$. また, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ に対し,

$$\langle G, \partial_1\varphi\rangle = -\langle g, \varphi\rangle = -\langle \partial_1 T, \varphi\rangle = \langle T, \partial_1\varphi\rangle = \langle f, \partial_1\varphi\rangle.$$

$h = G - f$ とおく. h は U 上の連続関数である. h が $y \in V$ についての関数であることを示す. これが示されれば, 通常の意味で $\partial_1 h = 0$ であり, よって通常の意味で $\partial_1 f = \partial_1 G = g$ となり, 命題の結論が従う. 任意の $\varphi_1 \in \mathcal{D}(I)$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(V)$ に対し, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ を $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ で定めると, $\langle h, \partial_1\varphi\rangle = 0$ なので

$$\int_V \left(\int_I h(x, y)\varphi_1'(x)\,dx\right)\varphi_2(y)\,dy = 0.$$

これが任意の $\varphi_2 \in \mathcal{D}(V)$ について成り立つので, 命題 9.2 (の証明) より, 任意の $y \in V$ に対し,

$$\int_I h(x, y)\varphi_1'(x)\,dx = 0.$$

$y \in V$ をとめたとき, これが任意の $\varphi_1 \in \mathcal{D}(I)$ に対して成り立つので, 命題 9.10 (の証明) より, 関数 $x \mapsto h(x, y)$ は I 上で定数になる. □

定理 14.1 は次から従う:

定理 14.6. P を $\mathbb{R}^d$ 上の楕円型偏微分作用素とし, $u \in \mathcal{D}'$ とする. このとき, Pu の特異台と u の特異台は一致する.

証明の前に P の基本解について考察してみる. P の基本解 E で $\mathcal{S}'$ に属するものがとれたとする. 等式 $PE = \delta$ をフーリエ変換すると $p(\xi)\widehat{E} = \widehat{PE} = 1$. よって E を $\widehat{E} = 1/p(\xi)$ となるように定義したいところだが, 多項式 $p(\xi)$ が $\mathbb{R}^d$ で零点をもつと $1/p(\xi)$ は局所可積分とはならず, $\mathcal{S}'$ の元になってくれないのでよくない. 一方, 次が成り立つ:

命題 14.7. $\mathbb{R}^d$ 上の楕円型偏微分作用素 P はオーダー m をもつとし, p を P の全シンボルとする. このとき, $\mathbb{R}^d$ の原点から十分離れたところで $|p(\xi)|/|\xi|^m$ は一様に正である.

証明. $c > 0$ が存在して, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し $|\sigma_P(\xi)| \geq c|\xi|^m$ が成り立つ (球面 $\{|\xi| = 1\}$ 上での $|\sigma_P(\xi)|$ の最小値を c とすればよい). さらに $c_i > 0$ が存在して, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$|p(\xi)| \geq c|\xi|^m - c_1|\xi|^{m-1} - \cdots - c_{m-1}|\xi| - c_m.$$

□

この命題により, $A > 0$ が存在して $|\xi| \geq A$ ならば $|p(\xi)| \geq 1$. $\chi \in \mathcal{D}$ で $\{|\xi| \leq A\}$ 上で $\chi = 1$ となるものをとる. $E \in \mathcal{S}'$ を $\widehat{E} = (1 - \chi)/p(\xi)$ となるように定義する (関数 $(1 - \chi)/p(\xi)$ は $\mathbb{R}^d$ 上有界であり, $\mathcal{S}'$ に属することに注意する). すると

$$\widehat{PE} = p(\xi)\widehat{E} = 1 - \chi = (\delta - \rho)^{\wedge}.$$

ここで $\rho = \chi^\vee \in \mathcal{S}$ とおく．ゆえに $PE = \delta - \rho$ となり, E は P の基本解に非常に近いものと見なせる．この E を以下の証明で使う．

定理 14.6 の証明. Pu の特異台が u の特異台に含まれることは容易に示される．なぜなら u が C^∞ 級であるような $\mathbb{R}^d$ の開部分集合上では Pu もそうだからである．

逆の包含を示す．まず, u がコンパクト台をもつ場合に示す．等式

$$u = \delta * u = (PE + \rho) * u = E * (Pu) + \rho * u$$

が成り立ち, $\rho * u$ は系 11.8 を使って $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属することが示される．よって,

$$\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp}(E * (Pu)) \subset \operatorname{sing\,supp} E + \operatorname{sing\,supp} Pu.$$

二つ目の包含は Pu がコンパクト台をもつことと命題 14.4 から従う．ゆえに次を示せばよい:

補題 14.8. E の特異台は $\{0\}$ に含まれる．

証明. $\widehat{E} = (1-\chi)/p(\xi)$ であり, $|\xi|$ が十分大きければ $\widehat{E} = 1/p(\xi)$. これと命題 14.7 により, 任意の多重指数 α, β に対し次が成り立つ:

$$\mathcal{F}(x^\alpha \partial^\beta E) = i^{|\alpha|+|\beta|} \partial^\alpha (\xi^\beta \widehat{E}) = O(|\xi|^{|\beta|-|\alpha|-m}) \quad (|\xi| \to \infty).$$

多重指数 β を固定する．$|\alpha| \geq |\beta| - m + d + 1$ を満たす任意の多重指数 α に対し, $\mathcal{F}(x^\alpha \partial^\beta E)$ は $\mathbb{R}^d$ 上可積分となる．可積分関数のフーリエ変換は連続関数になるので, $x^\alpha \partial^\beta E$ は連続関数である．任意の $x \neq 0$ に対し, $|\alpha| \geq |\beta| - m + d + 1$ かつ $x^\alpha \neq 0$ となる α がとれるので, $\partial^\beta E$ は原点以外で連続である．これがすべての β について成り立つので, 補題 14.5 を繰り返し適用すれば, E が原点以外で C^∞ 級であることが従う． □

以上で u がコンパクト台をもつ場合の証明が終わった．一般の u に対しては, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_n \in \mathcal{D}$ で開球 $\{|x| < n\}$ 上で $\varphi_n = 1$ となるものをとると, 次の包含が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sing\,supp} u &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sing\,supp}(\varphi_n u) \cap \{|x| < n\}) \\
&\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sing\,supp} P(\varphi_n u) \cap \{|x| < n\}) \\
&\subset \operatorname{sing\,supp} Pu.
\end{aligned}$$

一つ目の包含は次のようにして示される: もし $\mathbb{R}^d$ の開球 B が右辺の補集合に含まれるならば, 大きい n が存在して B は開球 $\{|x| < n\}$ に含まれるが, その上では $\varphi_n u$ は u に等しいので, B は左辺の補集合に含まれる．二つ目の包含は, $\varphi_n u$ がコンパクト台をもつので上で示したことから従う．三つ目の包含は次のようにして示される: もし $\mathbb{R}^d$ の開部分集合 U が右辺の補集合に含まれるならば, 任意の n に対し, $U \cap \{|x| < n\}$ 上で Pu は C^∞ 級になるが, 開球 $\{|x| < n\}$ 上で $\varphi_n = 1$ なので $P(\varphi_n u) = Pu$ であり, よって $P(\varphi_n u)$ も $U \cap \{|x| < n\}$ 上で C^∞ 級になる．ゆえに U は左辺の補集合に含まれる． □

14.2 マルグランジュ・エーレンプライスの定理

9.1 節で紹介した次の定理を示す:

定理 14.9. $\mathbb{R}^d$ 上の 0 でない楕円型偏微分作用素は基本解をもつ. つまり, そのような作用素 P に対し $E \in \mathcal{D}'$ が存在して $PE = \delta$.

実際には定理 9.4 で述べたように, P が楕円型でなくても定理の結論は正しいのだが, ここでは楕円型の P のみを扱う.

基本解 E の構成のアイデアを説明する. P はオーダー m をもつとし, p と σ_P をそれぞれ P の全シンボルとシンボルとする. $PE = \delta$ をフーリエ変換すると $p(\xi)\widehat{E} = 1$ となるので, $\widehat{E} = 1/p(\xi)$ となってほしいのは前節でも述べた通りである. もし p が $\mathbb{R}^d$ で零点をもたなければ, P が楕円型であることから絶対値 $|p(\xi)|$ は $\mathbb{R}^d$ 上一様に正になり (命題 14.7), 関数 $1/p(\xi)$ は $\mathcal{S}'$ の元を定める. $E \in \mathcal{S}'$ を $\widehat{E} = 1/p(\xi)$ となるように定めると, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し次が成り立つ:

$$\langle E, \varphi \rangle = \langle E^{\sim}, \varphi^{\sim} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle E^{\sim}, \varphi^{\wedge\wedge} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \widehat{E}, \varphi^{\wedge\sim} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\widehat{\varphi}(-\xi)}{p(\xi)}\, d\xi.$$

一般には多項式 p は $\mathbb{R}^d$ で零点をもち得るため, その場合, 右辺の積分は定義できない. そこで, ある変数に関して, 関数 $\widehat{\varphi}(-\xi)/p(\xi)$ を $\mathbb{R}$ 上積分する代わりに, その $\mathbb{R}$ を実軸とする複素平面内のある道 γ に沿って積分する. 実軸から複素平面に逃げることで p の零点を避けることができ, その結果, γ に沿った関数 $\widehat{\varphi}(-\xi)/p(\xi)$ の積分が定義可能になる. そしてその値でもって超関数 E を定義し, それが P の基本解であることを示す (ちなみに, P が楕円型でない場合もこの方法で基本解を得ることができるのだが, そのためには以下でとる道のとり方をもっと工夫する必要がある. [Fo2, 1.F], [金 1, §3.1] を参照せよ).

補題 14.10. (1) 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, 関数

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i\zeta\cdot x}\, dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d$$

は $\mathbb{C}^d$ 上正則である (多変数の複素関数が正則であるとは, 他の変数を固定したとき, 各変数について正則であることを意味する).

(2) 任意の $R > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ に対し, $C > 0$ が存在して次が成り立つ: 台が $\{|x| \le R\}$ に含まれる任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ と任意の $\zeta \in \mathbb{C}^d$ に対し,

$$(1 + |\zeta|^2)^N |\widehat{\varphi}(\zeta)| \le C e^{R|\operatorname{Im}\zeta|} \sum_{|\alpha| \le 2N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

証明. (1) は φ の台がコンパクトであることとルベーグ収束定理による. (2) を示す. 任意の $\xi \in \mathbb{R}^d$ と多重指数 α に対し $(\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$ であるが, これは任意の $\xi \in \mathbb{C}^d$ に対しても成り立つ. その証明は直接計算または正則関数に関する一致の定理による. よって, R と N のみによる $C_1 > 0$ が存在して, $\varphi \in \mathcal{D}$ の台が $\{|x| \le R\}$ に含まれるならば, 任意の $\zeta \in \mathbb{C}^d$ に対し,

$$(1 + |\zeta|^2)^N |\widehat{\varphi}(\zeta)| \le C_1 \sum_{|\alpha| \le 2N} |(\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\zeta)|.$$

右辺をさらに評価する. $|(\partial^\alpha\varphi)^\wedge(\zeta)| \le \|\partial^\alpha\varphi\|_1 e^{R|\mathrm{Im}\,\zeta|}$ であって, $\|\partial^\alpha\varphi\|_1 \le \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty (2R)^d$. よって, 上の右辺は $C_1(2R)^d \sum_{|\alpha|\le 2N} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty$ 以下である. ゆえに $C = C_1(2R)^d$ とおけばよい. □

定理 14.9 の証明. P を $\mathbb{R}^d$ 上の 0 でない楕円型偏微分作用素とし, p と $\sigma_P(\xi)$ をそれぞれ P の全シンボルとシンボルとする. P はオーダー m をもつとする. $m \ge 1$ としてよい. (1)–(4) の四段階に分けて示す.

(1) $\mathbb{R}^d$ の適当な線型の座標変換により, p は次のようにかけるとしてよい:

$$p(\xi) = \xi_1^m + (\xi_1 \text{ について } m-1 \text{ 次以下の多項式}), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d).$$

実際, p の ξ_1^m の係数が 0 でないことと $\sigma_P(1, 0, \dots, 0) \ne 0$ であることが同値であることに注意すれば, $\sigma_P(a) \ne 0$ となる単位ベクトル $a \in \mathbb{R}^d$ をとり, ベクトル $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ を a にうつす回転行列を考えることで p の ξ_1^m の係数を 0 でないようにできる. あとは定数倍すればよい (線型の座標変換で σ_P がどう変わるかを正確に見ておく. $A = (a_{kl})_{k,l=1}^d$ を実正則行列とし, 座標変換

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

を考える. 連鎖律より $\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l a_{lk} \frac{\partial}{\partial y_l}$. この座標変換の下で P から誘導される $(y_1, \dots, y_d)$ 空間上の偏微分作用素を Q とすると, Q は P の $\frac{\partial}{\partial x_k}$ を $\sum_l a_{lk} \frac{\partial}{\partial y_l}$ に置き換えたものである. また,

$$P = p\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_d}\right)$$

であって,

$$Q = q\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_d}\right) = p\left(\frac{1}{i}\sum_l a_{l1}\frac{\partial}{\partial y_l}, \dots, \frac{1}{i}\sum_l a_{ld}\frac{\partial}{\partial y_l}\right).$$

よって q の変数を $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$ とかくと $q(\eta) = p(\eta A)$ であって, $\sigma_Q(\eta) = \sigma_P(\eta A)$ となる).

(2) $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ の点を $\zeta = (\zeta_1, \xi')$ で表す. 各 $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ に対し, ζ_1-平面内の道 $\gamma(\xi')$ で, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, 次の積分が収束するようなものを構成する:

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\gamma(\xi')} \frac{\widehat{\varphi}(-\zeta_1, -\xi')}{p(\zeta_1, \xi')}\, d\zeta_1 \right) d\xi'.$$

P は楕円型なので, $A > 0$ が存在して, $\mathbb{R}^d$ の点 ξ に対し $|\xi| \ge A$ ならば $|p(\xi)| \ge 1$ (命題 14.7). ζ_1-平面内の道 $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$ を次のように定める: 各 $j = 1, \dots, m+1$ に対し, γ_j は実軸上を負の無限遠から点 $-A-j-1$ まで通り, 点 $-A-j-1$ と点 $A+j+1$ を通る上半平面内の半円周を通り, そして, 実軸上を点 $A+j+1$ から正の無限遠に向かって通る. C_j で γ_j が通る半円周の部分を表す. B_j で C_j のある点からの距離が 1/3 以下の点全体を表す. $B_1, \dots, B_{m+1}$ たちは互いに交わらない. 各 $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ に対し, ζ_1 についての多項式 $p(\zeta_1, \xi')$ はせいぜい m 個の零点をもつので, $B_1, \dots, B_{m+1}$ のうち少なくとも一つはその零点を含まない. そのような B_j をとり $\gamma(\xi') = \gamma_j$ と定める. ルーシェの定理により $p(\zeta_1, \xi')$ の零点は ξ' に関して連続に変化するので,

任意の $j=1,\dots,m+1$ に対し, $\gamma(\xi')=\gamma_j$ となる $\mathbb{R}^{d-1}$ の点 ξ' の集合は可測であるとしてよい (ルーシェの定理については, 例えば [SS2, 第 3 章, 定理 4.3] を参照せよ).

$\mathbb{R}^{d-1}$ の点 ξ' をとり, $\gamma(\xi')=\gamma_j$ となる j をとる. C_j の点は $p(\zeta_1,\xi')$ のどの零点よりも $1/3$ 以上離れている. $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ でその零点を表すと $p(\zeta_1,\xi')=(\zeta_1-\alpha_1)\cdots(\zeta_1-\alpha_m)$ とかけるので, 任意の $\zeta_1\in C_j$ に対し $|p(\zeta_1,\xi')|\ge 1/3^m$. この評価を次の (3) で使う.

(3) 写像 $E\colon \mathcal{D}\to\mathbb{C}$ を次で定める:

$$\langle E,\varphi\rangle=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\gamma(\xi')}\frac{\widehat{\varphi}(-\zeta_1,-\xi')}{p(\zeta_1,\xi')}\,d\zeta_1\right)d\xi',\quad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{14.1}$$

右辺の積分が収束することと $E\in\mathcal{D}'$ であることを示す. $R>0$ をとり, $\varphi\in\mathcal{D}$ で台が $\{|x|\le R\}$ に含まれるものをとる. $\gamma(\xi')$ の実軸部分と半円周部分をそれぞれ $L(\xi')$, $C(\xi')$ とかく. (14.1) の右辺の積分範囲をこの二つに分けて, それぞれの積分を評価する. $L(\xi')$ 上では $|\zeta_1|>A$ なので $|p(\zeta_1,\xi')|\ge 1$ であることに注意すると,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{L(\xi')}\frac{\widehat{\varphi}(-\zeta_1,-\xi')}{p(\zeta_1,\xi')}\,d\zeta_1\right)d\xi'\right|\le\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{L(\xi')}|\widehat{\varphi}(-\xi)|\,d\xi\le\|\widehat{\varphi}\|_{L^1}. \tag{14.2}$$

右辺のノルムは $\mathbb{R}^d$ における L^1 ノルムを表す. そして

$$\begin{aligned}\|\widehat{\varphi}\|_{L^1}&=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{1+|\xi|^{d+1}}(1+|\xi|^{d+1})|\widehat{\varphi}(\xi)|\,d\xi\le C_1\|\widehat{\varphi}\|_{d+1}\\&\le C_2\|\varphi\|_{2(d+1)+d+1}\le C_3\sum_{|\alpha|\le 3d+3}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty.\end{aligned} \tag{14.3}$$

C_1 と C_2 は d のみによる定数で, C_3 は d と R によるが, φ にはよらない定数である. 二つ目の不等式は命題 12.9 の証明で得た評価による. 三つ目の不等式は $\mathcal{S}$ のノルム $\|\cdot\|_{3d+3}$ の定義から従う.

次に, 半円周部分 $C(\xi')$ 上の積分を評価する. $\xi'\in\mathbb{R}^{d-1}$ をとり, $\zeta_1\in C(\xi')$ をとる. $\zeta=(\zeta_1,\xi')$ とかいて補題 14.10 (2) の評価を用いると,

$$\begin{aligned}|\widehat{\varphi}(-\zeta_1,-\xi')|&=\frac{1}{(1+|\zeta|^2)^d}(1+|\zeta|^2)^d|\widehat{\varphi}(-\zeta)|\\&\le\frac{C_4e^{R|\mathrm{Im}\,\zeta|}}{(1+|\zeta|^2)^d}\sum_{|\alpha|\le 2d}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty\le\frac{C_5}{(1+|\xi'|^2)^d}\sum_{|\alpha|\le 2d}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

C_4 は d と R のみによる定数で, C_5 は C_4 と m, A による定数である. しかし φ にはよらない. (3) の最後で得た評価 $|p(\zeta_1,\xi')|\ge 1/3^m$ を用いると,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{C(\xi')}\frac{\widehat{\varphi}(-\zeta_1,-\xi')}{p(\zeta_1,\xi')}\,d\zeta_1\right)d\xi'\right|\\&\le\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{3^mC_5(A+m+2)\pi}{(1+|\xi'|^2)^d}\,d\xi'\sum_{|\alpha|\le 2d}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty=C_6\sum_{|\alpha|\le 2d}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

以上により (14.1) の右辺の積分は定義される. 最後に得た定数 C_6 は R によるが, φ にはよらない. (14.2) と (14.3) での評価を併せると E の有界性 (命題 10.11) が従い, よって E は $\mathcal{D}'$ の元を定める.

(4) 最後に等式 $PE=\delta$ を示す．$P=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$ と表し，$\varphi \in \mathcal{D}$ をとる．微分の定義から

$$\langle PE, \varphi \rangle = \left\langle E, \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \right\rangle. \tag{14.4}$$

右辺の山括弧内の右側にある $\mathcal{D}$ の元をフーリエ変換すると，

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = p(-\xi)\widehat{\varphi}(\xi).$$

E の定義 (14.1) から (14.4) の右辺は次に等しい:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\gamma(\xi')} \frac{p(\zeta_1, \xi')\widehat{\varphi}(-\zeta_1, -\xi')}{p(\zeta_1, \xi')} \, d\zeta_1 \right) d\xi' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\gamma(\xi')} \widehat{\varphi}(-\zeta_1, -\xi') \, d\zeta_1 \, d\xi' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(-\zeta_1, -\xi') \, d\zeta_1 \, d\xi' = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

二つ目の等式はコーシーの積分定理による．ここで補題 14.10 (1) を使う．三つ目の等式は反転公式による．ゆえに $PE=\delta$. □

ノート

主に [C, Ch. 14, 15], [Fo2, I.F], [FJ, §8.6, §10.4], [Str, §8.3] を参考にした．

補講B　$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の超関数

B.1　フーリエ級数展開

$\mathbb{R}$ 上の超関数 T が**周期** 2π **をもつ**とは, 等式

$$\tau_{2\pi}T = T$$

が成り立つときをいう. 一般に $\mathbb{R}$ 上の超関数に対し, その閉区間上での積分を定義することはできない. しかし T が周期 2π をもつとき, T の $[0, 2\pi]$ 上での積分にあたるものを定義することができる. そのために次を満たす $\chi \in \mathcal{D}$ を用意する: $0 \le \chi \le 1$ であって, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(x + 2\pi k) = 1.$$

このような関数 χ を**単位関数**とよぶことにする (単位関数の作り方は次の通り: $\psi \in \mathcal{D}$ で $0 \le \psi \le 1$ かつ $[0, 2\pi]$ 上で正の値をとるものをとる. その周期化

$$\psi_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(x + 2\pi k)$$

は $\mathbb{R}$ 上至るところで正の値をとり, 周期 2π をもつ. $\chi = \psi/\psi_1$ とおくと, これは単位関数である).

χ を単位関数とする. f を $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数で周期 2π をもつものとすると, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(x + 2\pi k)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2\pi k)\chi(x + 2\pi k)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi(x)\,dx.\end{aligned}$$

これより, 周期 2π をもつ超関数 T に対し, 値 $\langle T, \chi\rangle$ でもって T の $[0, 2\pi]$ 上での積分と見なすことができる.

命題 B.1. 上で定義した値 $\langle T, \chi\rangle$ は単位関数 χ のとり方によらない.

証明. ζ を別の単位関数とする. χ も ζ もコンパクト台をもつので, $K \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば, 任意の $x \in \operatorname{supp}\chi$ に対し $\sum_{k=-K}^{K} \zeta(x + 2\pi k) = 1$ が成り立ち, さらに任意の $x \in \operatorname{supp}\zeta$ に対し $\sum_{k=-K}^{K} \chi(x + 2\pi k) = 1$ も成り立つ. T が周期 2π をもつことから

$$\langle T, \chi\rangle = \left\langle T, \sum_{k=-K}^{K} \chi(\tau_{2\pi k}\zeta)\right\rangle = \left\langle T, \sum_{k=-K}^{K} (\tau_{2\pi k}\chi)\zeta\right\rangle = \langle T, \zeta\rangle. \qquad \square$$

命題 B.2. 周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の超関数は $\mathcal{S}'$ に属する.

証明. $T \in \mathcal{D}'$ は周期 2π をもつとし, χ を単位関数とする. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し,

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle T, \varphi(\tau_{2\pi k}\chi) \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \chi T, \tau_{-2\pi k}\varphi \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ((\chi T) * \varphi^{\sim})(-2\pi k).$$

χT も $\varphi^{\sim}$ もコンパクト台をもつので $(\chi T) * \varphi^{\sim}$ もコンパクト台をもち, $(\chi T) * \varphi^{\sim}$ は $\mathcal{D}$ に属する (命題 10.2). そこで $\mathcal{S}'$ の元 $S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}$ を考えると, 上の右辺は次に等しい:

$$\langle S, (\chi T) * \varphi^{\sim} \rangle = \langle S, (\chi T)^{\sim} * \varphi \rangle = \langle S * (\chi T), \varphi \rangle.$$

一つ目の等式は $S^{\sim} = S$ による. よって $T = S * (\chi T)$. これは $\mathcal{S}'$ の元とコンパクト台をもつ $\mathcal{D}'$ の元とのたたみ込みなので, 命題 13.19 より $T \in \mathcal{S}'$. □

数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が**多項式増大**であるとは, $C > 0$ と $M \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$|a_n| \leq C(1 + |n|)^M$$

が成り立つときをいう. そのような数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ に対し, $\mathcal{S}'$ の元 $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ が次で定まる:

$$\left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}, \varphi \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \langle e^{inx}, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \widehat{\varphi}(-n), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

$\widehat{\varphi}$ は急減少関数なので右辺は収束する. また, 任意の 0 でない整数 n に対し

$$|n^{M+2}\widehat{\varphi}(n)| = |(\varphi^{(M+2)})^{\wedge}(n)| \leq C_1 \|\varphi^{(M+2)}\|_2 \leq C_1 \|\varphi\|_{M+4}$$

なので, T は $\mathcal{S}'$ に属する (二つ目の不等式は命題 12.9 の証明で示した不等式によるもので, C_1 はそこで得られる定数である). 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $(\tau_{2\pi}\varphi)^{\wedge}(n) = \widehat{\varphi}(n)$ なので, T は周期 2π をもつ. 次の定理は, 逆に周期 2π をもつ超関数はすべてこのようにして得られることを主張する:

定理 B.3. 周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の超関数 T に対し, 多項式増大の数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. さらにこのとき $\widehat{T} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_n$.

証明. 命題 B.2 の証明で示したように $T = S * (\chi T)$ とかける. 命題 13.19 より $\widehat{T} = (\chi T)^{\wedge}\widehat{S}$. 命題 13.17 (2) より $(\chi T)^{\wedge}(\xi) = \langle T, \chi e^{-i\xi x} \rangle$ であり, 例 12.19 で見たように $\widehat{S} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. よって c_n を $2\pi c_n = \langle T, \chi e^{-inx} \rangle$ で定義すれば, 等式 $\widehat{T} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_n$ が成り立つ. 命題 13.17 (1) より $(\chi T)^{\wedge}$ は $\mathbb{R}$ 上の多項式増大の関数なので, 数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は多項式増大である. また, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \widehat{T}, \varphi^{\vee} \rangle = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \varphi^{\vee}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \widehat{\varphi}(-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \langle e^{inx}, \varphi \rangle.$$

よって等式 $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ が成り立つ. □

定理 B.3 の後半の主張より, 係数 c_n は T により一意に定まる. $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の関数 F を f の持ち上げとし, これを $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の超関数と見なす. 定理 B.3 より $F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ とかけて

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\langle F, \chi e^{-inx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)e^{-inx}\,dx = \widehat{f}(n).$$

そこで定理 B.3 にある表示 $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ を T の**フーリエ級数展開**とよぶ.

例 B.4. 定理 B.3 の証明で見たように, $S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}$ とおくと, ポアソンの和公式 (例 12.19) により $\widehat{S} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. よって S は $S = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$ とフーリエ級数展開される.

注意 B.5. 周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の超関数は, 自然に $\mathbb{T}$ 上の超関数と見なせる. ここで, $\mathbb{T}$ 上の超関数とは線型写像 $S\colon C^\infty(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ で $\mathcal{D}'$ の元と同様な連続性を備えたものを意味する. 実際, 周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の超関数 T に対し, $\mathbb{T}$ 上の超関数 $\alpha(T)$ が次で定まる: χ を単位関数とする. $\psi \in C^\infty(\mathbb{T})$ に対し, その持ち上げ $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ をとり, $\langle \alpha(T), \psi\rangle = \langle T, \chi\tilde{\psi}\rangle$ と定める. 積 $\tilde{\psi}T$ も周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の超関数であり, 右辺は $\langle \tilde{\psi}T, \chi\rangle$ に等しいので, この $\alpha(T)$ の定義は χ によらない. 一方, $\mathbb{T}$ 上の超関数 S に対し, 周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の超関数 $\beta(S)$ が次で定まる: $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, その周期化を $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{T})$ とかき, $\langle \beta(S), \varphi\rangle = \langle S, \varphi_1\rangle$ と定める. この $\alpha(T)$ と $\beta(S)$ は実際に連続性を満たし, α と β は互いの逆写像である (確かめよ).

B.2 $\mathbb{T}$ 上の微分方程式

$\mathbb{R}$ 上の微分作用素

$$P = \sum_{l=0}^{m} a_l \frac{d^l}{dx^l}$$

を考える. ここで m は非負整数であり, a_l は複素数である. f を周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の超関数とし, 超関数の微分方程式 $Pu = f$ を考える. 周期 2π をもつ超関数解 u を求めたい. 注意 B.5 により, これは $\mathbb{T}$ 上の超関数の微分方程式とも見なせる.

等式 $Pu = f$ をフーリエ変換してみる. u と f のフーリエ級数展開をそれぞれ

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}, \qquad f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

とかく. すると,

$$\widehat{Pu} = p(\xi)\widehat{u} = 2\pi p(\xi)\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\delta_n = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} p(n)u_n\delta_n.$$

ここで, $p(\xi) = \sum_{l=0}^{m} a_l(i\xi)^l$ は P から定まる一変数多項式である. 一方, $\widehat{f} = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\delta_n$ であり, これが $\widehat{Pu}$ と一致するためには, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $p(n)u_n = f_n$ となることが必要十分である.

このことから, 微分方程式 $Pu = f$ がいつ解けるかという問題について, 次の結論が得られる: もし任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $p(n) \neq 0$ ならば, 任意の f に対し, 解 u が唯一存在する. 実際,

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p(n)^{-1} f_n e^{inx}$$

とおくと, 係数 $p(n)^{-1}f_n$ が多項式増大の数列をなすことから u は周期 2π をもつ $\mathcal{S}'$ の元を定め, 等式 $Pu = f$ を満たす.

次に $p(n) = 0$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在するとし, そのような n 全体を Ω とおく. もし任意の $n \in \Omega$ に対し $f_n = 0$ ならば,

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \Omega} p(n)^{-1} f_n e^{inx}$$

とおくとこれは解である. さらに, この u に (係数が多項式増大の数列をなすように) $n \in \Omega$ に対する e^{inx} の定数倍を足したものも解になる. もしある $n \in \Omega$ に対し $f_n \neq 0$ ならば, 解 u は存在しない.

このようなシンプルな結論が得られたのは, 周期 2π をもつ超関数は常にフーリエ級数展開できるという点によるところが大きい. 解 u は f のフーリエ係数を用いて具体的に記述できるので, これを用いて u の性質を知ることもできる. 例えば, もし f が $C^\infty(\mathbb{T})$ の元ならば, 数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は急減少なので (命題 4.1), 解 u として数列 $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が急減少するもの, つまり $C^\infty(\mathbb{T})$ に属するものがとれる.

B.3　フーリエ係数の漸近挙動

$\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f に対し, フーリエ係数 $\widehat{f}(n)$ の $|n| \to \infty$ での漸近挙動を求めたい. $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 g で, $f - g$ が $\mathbb{T}$ 上 C^∞ 級であって g のフーリエ係数が計算できるようなものが見つかれば, $\widehat{f}(n)$ の漸近挙動を知ることができる. 例えば, 関数

$$g(t) = (t - \pi)^2 \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

のフーリエ係数は直接計算でき, 任意の 0 でない整数 n に対し $\widehat{g}(n) = 2/n^2$ である. この g は原点で特異であり, 原点以外では C^∞ 級である. もし f が原点の近傍で g と一致し, 原点以外で C^∞ 級となる関数であれば, $f - g$ は $\mathbb{T}$ 上 C^∞ 級になり, そのフーリエ係数は急減少する. よって任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, 次が成り立つ:

$$\widehat{f}(n) = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \qquad (|n| \to \infty).$$

具体的な f を相手にする場合, 大抵 f は $\mathbb{T}$ の有限個の点でのみ特異であり, そしてこれらの点のまわりでは, よく知られた関数を使って f は漸近展開される. このよく知られた関数のフーリエ係数をあらかじめ計算しておけば, f のフーリエ係数の漸近挙動を知ることができる.

実は, この漸近挙動を知る上で $\mathbb{R}$ 上の関数のフーリエ変換を利用できる. 第 12 講で $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数 $|x|^\beta$ ($\beta > -1$ は実数) のフーリエ変換について触れ, そのうちのいくつかを計算した. この結果を用いると, 例えば $\mathbb{T}$ 上の関数 f で有限個の点で $|t|^\beta$ の形の特異性をもち, 他の点では特異でないようなものに対し, $\widehat{f}(n)$ の漸近挙動を計算できる. 本節ではこの方法を紹介する. 次の命題は $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換との関わりを明らかにする:

命題 B.6. k を非負整数とする. f を $\mathbb{T}$ 上の可積分関数とし, g を $\mathbb{R}$ 上の局所可積分関数で $\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数を定めるものとする. 次を仮定する:

- f は原点以外で C^k 級である.
- g は原点以外で C^k 級であり, その k 階導関数 $g^{(k)}$ は無限遠の近傍上で可積分である.
- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上で定義され, 原点を含まない任意の有界閉区間上で可積分な関数 $\widehat{g}$ が存在して, g のフーリエ変換は原点以外で $\widehat{g}$ に等しい.
- f を $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数と見なしたとき, $f-g$ は原点の近傍で C^k 級である.

このとき,

$$2\pi\widehat{f}(n)=\widehat{g}(n)+o(|n|^{-k}) \qquad (|n|\to\infty).$$

証明. 単位関数 χ で原点の近傍で 1 になるものをとる. とり方は次の通り: $\psi\in\mathcal{D}$ で $0\le\psi\le 1$ であって, 台は $(-2\pi,2\pi)$ に含まれ, $[-3\pi/2,3\pi/2]$ 上で正の値をとり, そして原点の近傍で 1 になるものをとる. ψ_1 を ψ の周期化とすれば, ψ_1 は $\mathbb{R}$ 上至るところで正の値をとり, 原点の近傍で 1 になる. よって $\chi=\psi/\psi_1$ とおけばよい.

f を $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数に持ち上げ, それを F とかく. 定理 B.3 の直後で述べたように, 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し $2\pi\widehat{f}(n)=(\chi F)^\wedge(n)$ が成り立つ. 関数 $\chi F-g$ は $\mathbb{R}$ 上 C^k 級であり, その k 階導関数 $(\chi F-g)^{(k)}$ は $\mathbb{R}$ 上可積分である. 任意の $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し

$$((\chi F-g)^{(k)})^\wedge(\xi)=(i\xi)^k(\chi F-g)^\wedge(\xi)=(i\xi)^k((\chi F)^\wedge(\xi)-\widehat{g}(\xi))$$

(二つ目の等式を示すには, 原点の近傍で 0 になる $\varphi\in\mathcal{D}$ をあてればよい) であって, リーマン・ルベーグの補題 5.11 より, 左辺は $|\xi|\to\infty$ で 0 に収束する. □

注意 12.35 で述べたように, 整数でない実数 $\beta>-1$ に対し, 関数 $|x|^\beta$ のフーリエ変換は原点以外で関数

$$-2\Gamma(\beta+1)(\sin\tfrac{\beta}{2}\pi)|x|^{-\beta-1} \tag{B.1}$$

に等しい. $g(x)=|x|^\beta$ とおくと, 十分大きいすべての $k\in\mathbb{N}$ に対し, g は命題 B.6 の二つ目と三つ目の仮定を満たす. ゆえに, $\mathbb{T}$ 上の関数 f が原点以外で C^∞ 級であって, 原点の近傍で関数 $|t|^\beta$ に一致するならば, すべての $k\in\mathbb{N}$ に対し次が成り立つ:

$$2\pi\widehat{f}(n)=-2\Gamma(\beta+1)(\sin\tfrac{\beta}{2}\pi)|n|^{-\beta-1}+o(|n|^{-k}).$$

命題 B.6 では原点での特異性のみを問題にしているが, $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換の場合 (12.5 節) と同様に, 特異な点が複数個ある場合でも有効である.

例 B.7. $\mathbb{T}$ 上の関数 $f(t)=|t|^{-1/3}$ $(-\pi\le t\le\pi)$ に対し, $2\pi\widehat{f}(n)$ の漸近挙動を求める. f は $t=0$ と $t=\pi$ で特異である. $t=0$ での特異性がもたらす挙動は,

$$-2\Gamma(\tfrac{2}{3})\sin(-\tfrac{\pi}{6})|n|^{-2/3}=\Gamma(\tfrac{2}{3})|n|^{-2/3}. \tag{B.2}$$

これは (B.1) で $\beta=-1/3$ として得られたものである. 一方, $t=\pi$ の近くで f は次のように漸近展開される:

$$f(t)=\pi^{-1/3}+\frac{1}{3}\pi^{-4/3}|t-\pi|+\frac{2}{9}\pi^{-7/3}(t-\pi)^2+\frac{14}{81}\pi^{-10/3}|t-\pi|^3+O((t-\pi)^4). \tag{B.3}$$

右辺の第 2 項と第 4 項が $t=\pi$ で特異である．正の奇数 m に対し, ℝ 上の関数 $|x|^m$ のフーリエ変換は, 原点以外で $2i^{m+1}m!/x^{m+1}$ に等しい (例 12.21)．よって (B.3) の右辺第 2 項と第 4 項がフーリエ係数にもたらす挙動は, それぞれ

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\pi^{-4/3}e^{-in\pi}\frac{-2}{n^2}=-\frac{2}{3}\pi^{-4/3}\frac{(-1)^n}{n^2},\\&\frac{14}{81}\pi^{-10/3}e^{-in\pi}\frac{2\cdot 3!}{n^4}=\frac{56}{27}\pi^{-10/3}\frac{(-1)^n}{n^4}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

ここで $e^{-in\pi}$ をかけているのは, 原点ではなく $t=\pi$ での特異性を考えているためである．(B.2) と (B.4) を併せて, 次の漸近挙動を得る:

$$2\pi\widehat{f}(n)=\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{|n|^{2/3}}-\frac{2}{3}\pi^{-4/3}\frac{(-1)^n}{n^2}+\frac{56}{27}\pi^{-10/3}\frac{(-1)^n}{n^4}+O(n^{-6}).$$

誤差項のオーダーは (B.3) の誤差項から決まる．(B.3) の展開でさらに高次の項を計算すれば, より精密な $2\pi\widehat{f}(n)$ の漸近挙動が得られる．

演習問題

[1] 次の $\mathbb{T}$ 上の可積分関数 f に対し, フーリエ係数 $\widehat{f}(n)$ の $|n|\to\infty$ での漸近挙動を求めよ:

(i) $f(t)=|t|^{-1/2}\quad(-\pi\le t\le\pi)$.

(ii) $f(t)=e^{|\sin t|}$.

(iii) $f(t)=\log|t|\quad(-\pi\le t\le\pi)$.

ノート

[FJ, §8.5], [Lig, 第 5 章] に基づく．12.5 節と B.3 節で扱った漸近挙動は, 非常に多くの具体例について計算可能である．[Lig] を参照してほしい．

参考文献

[新井] 新井仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2010.

[C] H. Carlsson, Lecture notes on distributions, available at Hasse Carlsson's website.

[DM] H. Dym and H. P. McKean, *Fourier series and integrals*, Probability and Mathematical Statistics, No. 14, Academic Press, New York-London, 1972.

[Fo1] G. B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks/Cole Math. Ser., Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.

[Fo2] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations. Second edition*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[FJ] F. G. Friedlander, *Introduction to the theory of distributions. Second edition. With additional material by M. Joshi*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[FY] 藤田宏, 吉田耕作, 現代解析入門, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 2002.

[GS] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized functions. Vol. 1. Properties and operations.* Translated by Eugene Saletan. Reprint of the 1964 English translation, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2016.

[廣川] 廣川完, フーリエ解析, 数学全書 16, 森北出版, 1981.

[Hör] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis.* Reprint of the second 1990 edition, Classics Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[猪 1] 猪狩惺, フーリエ級数, 岩波全書 283, 岩波書店, 1975.

[猪 2] 猪狩惺, 実解析入門, 岩波書店, 1996.

[垣田] 垣田高夫, シュワルツ超関数入門, 日本評論社, 1999.

[金 1] 金子晃, 定数係数線型偏微分方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1976.

[金 2] 金子晃, 偏微分方程式入門, 基礎数学 12, 東京大学出版会, 1998.

[Kat] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis. Third edition*, Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[小松] 小松彦三郎, Fourier 解析, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1978.

[Kör] T. W. ケルナー (高橋陽一郎訳), フーリエ解析大全. 上・下, 朝倉書店, 1996.

[熊] 熊ノ郷準, 偏微分方程式, 共立数学講座 14, 共立出版, 1978.

[黒田] 黒田成俊, 関数解析, 共立数学講座 15, 共立出版, 1980.

[Lig] M. J. ライトヒル (高見穎郎訳), フーリエ解析と超関数, ダイヤモンド社, 1975.

[溝畑] 溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.

[中村] 中村周, フーリエ解析, 応用数学基礎講座 4, 朝倉書店, 2003.

[岡本] 岡本清郷, フーリエ解析の展望, すうがくぶっくす 17, 朝倉書店, 1997.

[Pin] M. A. Pinsky, *Introduction to Fourier analysis and wavelets.* Reprint of the 2002 original, Grad. Stud. Math., 102, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[Ru1] W. Rudin, *Real and complex analysis. Third edition*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[Ru2] W. Rudin, *Functional analysis. Second edition*, Internat. Ser. Pure Appl. Math., McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[Sc1] L. シュワルツ (吉田耕作, 渡辺二郎訳), 物理数学の方法, 岩波書店, 1966.

[Sc2] L. シュワルツ (岩村聯, 石垣春夫, 鈴木文夫訳), 超関数の理論, 原書第 3 版, 岩波書店, 1971.

[SS1] E. M. スタイン, R. シャカルチ (新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳), フーリエ解析入門, プリンストン解析学講義 1, 日本評論社, 2007.

[SS2] E. M. スタイン, R. シャカルチ (新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳), 複素解析, プリンストン解析学講義 2, 日本評論社, 2009.

[SS4] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Functional analysis. Introduction to further topics in analysis*, Princeton Lect. Anal., 4, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, No. 32, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[Str] R. S. Strichartz, *A guide to distribution theory and Fourier transforms.* Reprint of the 1994 original, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[杉浦] 杉浦光夫, 解析入門 I, 基礎数学 2, 東京大学出版会, 1980.

[洲] 洲之内源一郎, フーリエ解析, 現代数学講座, 共立出版, 1956.

[高橋] 高橋陽一郎, 実関数とフーリエ解析, 岩波書店, 2006.

[Tol] G. P. Tolstov, *Fourier series. Second English translation.* Translated and with a preface by Richard A. Silverman, Dover Publications, Inc., New York, 1976.

[Tre] F. Trèves, *Basic linear partial differential equations.* Reprint of the 1975 original, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.

[谷島] 谷島賢二, 物理数学入門, 東京大学出版会, 1994.

[Zor] V. A. Zorich, *Mathematical analysis. II. Second edition.* Translated by Roger Cooke and Octavio Paniagua T., Universitext, Springer, Heidelberg, 2016.

[Zyg] A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II. Third edition.* With a foreword by Robert A. Fefferman, Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2002.