§4 Gaboriau-Lyons の定理

例 (ベルヌーイ作用)

G 可算群, 無限.

$G \curvearrowright (X, \mu) := \prod_G ([0,1], \mathrm{Leb})$

$g \cdot (x_e)_{e \in G} := (x_{g^{-1}e})_{e \in G}$, $g \in G$, $x_e \in [0,1]$

☆ これは p.m.p. 作用であり, ergodic である. (演)

つまり, $A \subset X$ が G-invariant ($\forall g \in G\ gA = A$) ならば $\mu(A) = 0$ or 1.

☆ $\exists X' \subset X$ G-invariant, $\mu(X \setminus X') = 0$ (演)

$G \curvearrowright X'$ free

つまり $g \in G$, $x \in X'$ に対し $gx = x \Rightarrow g = e$.

(これも証明は略)

☆ $([0,1], \mathrm{Leb})$ の代わりに $(\{0,1\}, \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1))$ などにしてもよい.

Thm (G-L, 2009)

G 可算. non-amenable.

$\curvearrowright (X, \mu) := \prod_G ([0,1], \mathrm{Leb})$

ベルヌーイ.

$\to \mathcal{R} := \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$.

このとき. $\exists \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ 部分同値関係,

$\exists \Sigma$: $\mathcal{S}$ の treeing. $C(\Sigma) > 1$.

(つまり, $\mathcal{R}$ の部分同値関係で非従順自由群の類似物が存在する!

$\to$ von Neumann-Day の問題の同値関係 ver. の "部分的な" 肯定的解決!)

$\square$

未解決問題 $\forall (\mathcal{R}, \mu)$ non-amenable

$\exists \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ 部分同値関係.

$\exists \Sigma$: $\mathcal{S}$ の treeing $C(\Sigma) > 1$?

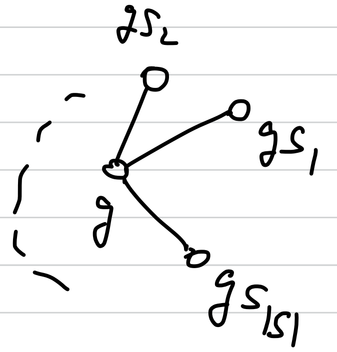
群上のランダムウォークとケステン条件 (Kesten)

G 有限生成群, $S\subset G$ 対称な有限生成系.

$s\in S \Rightarrow s^{-1}\in S$.

最初に $e\in G$ にいて, 1ステップで, S の元を

それぞれ確率 $\frac{1}{|S|}$ で右にかける.



ケーリーグラフ $\Gamma=\Gamma(G,S)$

$\{s_1,\cdots,s_{|S|}\}=S$

$\pi: G\to \mathcal{U}(\ell^2(G))$ 右正則表現.

$\pi_g(\delta_t)=\delta_{tg^{-1}}$, $g,t\in G$, $\delta_t\in\ell^2(G)$.

<u>Def</u> $P:=\frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}\pi_s \in \mathbb{B}(\ell^2(G))$

(G,S) に伴うマルコフ作用素.

✓ P は self-adjoint. (S: 対称なので)

✓ $\langle P^n \delta_e, \delta_g \rangle$

$$= \frac{1}{|S|^n} \left| \{ (s_1, \cdots, s_n) \in S^n \mid s_n^{-1} \cdots s_2^{-1} s_1^{-1} = g \} \right|$$

: n ステップ後に g にいる確率.

✓ $p_n := \langle P^n \delta_e, \delta_e \rangle$ とおくと

$p_{2n} > 0$, $p_{n+m} \geq p_n p_m$

$\rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} (p_{2n})^{1/2n} =: \rho(G, S)$.

$a_n \geq 0$.
$a_{n+m} \leq a_n + a_m$
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.
$a_n = -\frac{1}{2n} \log p_{2n}$

(G, S) に伴うランダムウォークのスペクトル半径.

✓ $\|P\| \leq 1$ より $\rho(G, S) \leq 1$.

<u>Prop</u> $\rho(G,S) = P$ の $B(\ell^2(G))_{sa}$ の元としての

(演)

スペクトル半径 $r(P)$

$= \|P\|$.

(P のスペクトル分解を求めよ.

✓ $\forall g \in G$ $\langle P^n \delta_e, \delta_e \rangle = \langle P^n \delta_g, \delta_g \rangle$

✓ $(\delta_g)_{g \in G}$ は $\ell^2(G)$ の CONS.)

Thm (Kesten)

$S \subset G$ 対称な有限生成系.

このとき,

$$G : \text{amenable} \iff \rho(G,S) = 1.$$

つまり G: nonamenable $\iff$ $\rho(G,S) < 1$　　非常に小さい

$\because$ c　$(p_{2n})^{1/2n} \approx c \to p_{2n} \approx c^{2n}$

Lem (ライターの ℓ^2 版)

G 可算群.　$\pi : G \to \mathcal{U}(\ell^2(G))$ 左正則表現.

このとき,

$$G : \text{amenable} \iff \exists (v_n) \subset \ell^2(G)$$
$$\|v_n\| = 1,$$
$$\forall g \in G \ \ \|\pi_g v_n - v_n\| \to 0$$

演.

Outline $\Rightarrow$: $(\xi_n) \subset \mathrm{Prob}(G)$ ライターとして.

$v_n(g) := \xi_n(g^{-1})^{1/2}$ とすればよい.

$\Leftarrow$: (v_n) があれば.　$\xi_n(g) := |v_n(g^{-1})|$ とすれば.

$(\xi_n) \subset \mathrm{Prob}(G)$ はライターになる.

□

<u>Pf of Thm</u> $P := \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}\pi_s$ on $\ell^2(G)$.

G: amenable $\Leftrightarrow$ $r(P)=1$

を示せばよい.

$\Rightarrow$: Lem より $\exists (v_n)\subset \ell^2(G)$ $\|v_n\|=1$

$\forall g\in G$ $\|\pi_g v_n - v_n\|\to 0$.

$\to$ $\|Pv_n - v_n\|\longrightarrow 0$. $\to$ $1\in\sigma(P)$.

$\Leftarrow$: $r(P)=1$ より $1\in\sigma(P)$ or $-1\in\sigma(P)$.

$\varepsilon>0$ に対して. $\exists \xi\in\ell^2(G)$

$\|\xi\|=1$, $|\langle P\xi,\xi\rangle| > 1-\varepsilon$.

$\eta := |\xi| \in \ell^2(G)$ とする.

$$1-\varepsilon < |\langle P\xi,\xi\rangle| \le \langle P\eta,\eta\rangle = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}\langle\pi_s\eta,\eta\rangle.$$

よって 各 $s\in S$ に対し.

$$\langle\pi_s\eta,\eta\rangle > (1-\varepsilon)|S| - \sum_{t\in S\setminus\{s\}}\langle\pi_t\eta,\eta\rangle$$

$$\ge (1-\varepsilon)|S| - (|S|-1) = 1-\varepsilon|S|.$$

よって ライターの ℓ^2版が成りたつ. $\blacksquare$

(※) $\Gamma = \Gamma(G, S)$ ケーリーグラフにおいて.

$u, v \in V(\Gamma) (= G)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し.

$c(u, v, n) :=$ u から v への単純な道で長さが n のものの個数.

$P := \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \pi_s$ として,

$$|S|^n \langle P^n \delta_u, \delta_v \rangle = \left\langle \sum_{s_1, \cdots, s_n \in S} \delta_{u s_n^{-1} \cdots s_2^{-1} s_1^{-1}}, \delta_v \right\rangle$$

$$\geq c(u, v, n)$$

$$\wedge\!|$$

$$|S|^n \|P\|^n$$

$$\|$$

$$|S|^n r(P)^n.$$

$\to$ $c(u, v, n) \leq |S|^n r(P)^n$. — ⊛

┘

自由極小全域森林 (the free minimal spanning forests.

$E := E(\Gamma)$

$$(X, \mu) := \prod_{E} ([0,1], \mathrm{Leb})$$

$\Phi : X \to \{0,1\}^E$ を

$$X' := \{x \in X \mid x : E \to [0,1] \text{ は単射}\}$$

上で次のように定める：

(✓ $\mu(X \setminus X') = 0$ である)

$x \in X'$ とする.

$e \in E$ に対し, $x(e) \in [0,1]$ を e のラベルとよぶ.

$\Gamma = \Gamma(G, S)$ の単純な closed path c に対し,

c を通る辺でラベルが $\underbrace{\text{最大のもの}}_{}$ を取り除く.

(x : 単射なので. これは唯一である)

これをすべての c に対して成り立つ.

残った辺の集合を $\Phi(x) \in \{0,1\}^E$ とする. ┘

✓ $\Phi(x)$ は forest (つまり連結成分が tree).

$\mathfrak{F} := \Phi_* \mu$: the free minimal spanning forest

FMSF.

✓ $\Phi : (X, \mu) \to (\{0,1\}^E, \mathfrak{F})$

G. 同変. 保測.

$G \curvearrowright \Gamma$ をかり算.

✓ $v \in V(\Gamma)$ に対し.

$$\delta_{\mathfrak{F}}(\Gamma, v) := \int_X \deg_{\Phi(x)}(v)\, d\mu(x)$$

v の $\mathfrak{F}$ に関する平均次数.

今, $G \curvearrowright V(\Gamma)$ transitive であるう,

Φ : G-同変 & μ : G-不変 なので

$\delta_{\mathfrak{F}}(\Gamma, v)$ は v によらない.

$\delta_{\mathfrak{F}}(\Gamma)$ とかく.

<u>Thm 1</u> (Thom, 2016) $e \notin S$ のとき.

$$\delta_{\mathcal{F}}(\Gamma) \geq (1-\log 2)\frac{1}{r(P)}.$$ (後で示す)

<u>Thm 2</u> (Thom, 2015) 王さかー.

G : 有限生成, 非従順群.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists S \subset G$ 対称な有限生成系.

$e \notin S, \quad r(P) = \rho(G, S) < \varepsilon.$

┘

<u>Pf of GL</u> G : 非従順とする.

G : 有限生成としてよい. $\left(G_n < G_{n+1} < G = \bigcup_n G_n \right.$
$\forall n \ G_n$: amenable
$\left. \Rightarrow G : \text{amenable} \right)$

$S \subset G$ で $\dfrac{1-\log 2}{r(P)} > 2$ となるものをとる. (Thm 2)

$\Gamma := \Gamma(G, S)$ とすると. $\delta_{\mathcal{F}}(\Gamma) > 2$. (Thm 1)

$G \curvearrowright (X, \mu) := \prod_E ([0,1], \mathrm{Leb})$, $E = E(\Gamma)$.

$\to \mathcal{R} := \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ $\quad$ * 例えば $G \curvearrowright [0,1]^G$ と同じ

$\vee$

$\exists \mathcal{S}$ $\quad \exists \Sigma$: treeing of $\mathcal{S}$ $\quad C(\Sigma) > 1$ とする.

$\Phi : X \to \{0,1\}^E$

$\mathfrak{F} := \Phi_* \mu$: FMSF.

✓ $\exists X' \subset X$: G-inv. $\quad \mu(X') = 1$

$\forall x \in X'$ $\quad \Phi(x) \subset \Gamma$ forest

$\Sigma := \left\{ (x, s^{-1}x) \,\middle|\, x \in X,\ s \in S,\ \{e_G, s\} \in \Phi(x) \right\}$

$\mathcal{S} :=$ Σ が生成する同値関係 $\subset \mathcal{R}$

✓ Σ は $\mathcal{S}$ の graphing.

✓ $\forall x \in X'$ $\quad \Sigma[x] \simeq \Phi(x)_0$ ($:=$ e_G を含む

$\Phi(x)$ の連結成分)

Σ での道 : $x, \ s_1^{-1}x, \ s_2^{-1}s_1^{-1}x, \ \cdots, \ s_n^{-1}\cdots s_2^{-1}s_1^{-1}x$

$\updownarrow$

$\Phi(x)$ での道 : $e_G, \ s_1, \ s_1 s_2, \ \cdots, \ s_1 s_2 \cdots s_n$

$$(s_1^{-1}x, \ s_2^{-1}s_1^{-1}x) \in \Sigma$$

$$\Rightarrow \ \{e_G, s_2\} \in \Phi(s_1^{-1}x)$$

$\Leftarrow$

つまり $\{s_1, s_1 s_2\} \in \Phi(x)$

よって Σ は S の treeing である!

$$C(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_{X'} \underbrace{\deg_{\Sigma[x]}(x)}_{= \ \deg_{\Phi(x)^0}(e_G)} \, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{F}}(\Gamma, e_G) = \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{F}}(\Gamma) > 1.$$

こうなるように
S をとった。

Thm (GL) $\blacksquare$

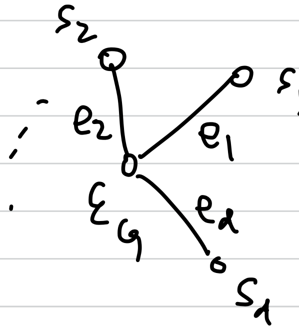
ε_G: Gの単位元

Pf of Thm 1 $\varepsilon_G \notin S$ のとき.

$$\delta_F(\Gamma) \geq (1 - \log 2)\frac{1}{r(P)}$$ を示す.

$$\Phi : X' \to \{0,1\}^E$$

$$F := \Phi_* \mu, \quad \delta_F(\Gamma) := \int_{X'} \deg_{\Phi(x)}(\varepsilon_G)\, d\mu(x).$$



$\Gamma = \Gamma(G, S)$

$d := |S|$

$i = 1, \ldots, d$ に対し.

$$A_i := \{x \in X' \mid e_i \in \Phi(x)\}.$$

$\mu(A_i)$ を考えたい.

$$(X_i, \mu_i) := \prod_{E \setminus \{e_i\}} ([0,1], \mathrm{Leb})$$

$y \in X_i$ と $t \in [0,1]$ に対し. $x \in X$ を

$$x|_{E \setminus \{e_i\}} = y, \quad x(e_i) = t$$

で定め. この x を (y, t) とかく.

$t\in[0,1]$ とする。

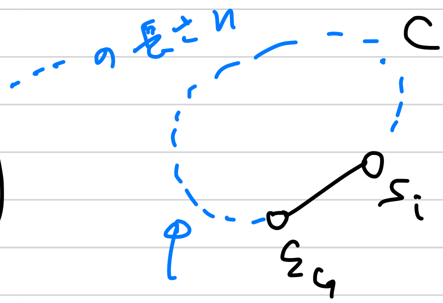
$x\in X'$ が $x(e_i)=t$ をみたすとき。

「$\exists C$: e_i を通る単純な closed path s.t.

$\forall e\neq e_i$: C が通る辺 $x(e)<t$」

$\Longleftrightarrow$ 「$e_i\notin \Phi(x)$」

$k\geq 2$



$$\mu_i\left(\{y\in X_i \mid (y,t)\in A_i\}\right)$$

$$\geq 1-\sum_{n=2}^{\infty} c(\varepsilon_4, s_i, n)\, t^n$$

この3辺のラベルが $[0,t)$ に属すると $\{\varepsilon_4, s_i\}$ が死ぬ。そうでないと生き残る。

$$\geq 1-\sum_{n=2}^{\infty} d^n r^n t^n \qquad r:=r(\rho).$$

$\circledast$

$$\geq 1-\sum_{n=1}^{\infty} d^n r^n t^n \overset{*}{=} 1-\frac{drt}{1-drt}$$

$0\leq t<\frac{1}{dr}$ のとき

$$=\frac{1-2drt}{1-drt}\geq 0$$

$\Leftarrow$ $0\leq t<\frac{1}{2dr}$ のとき。

$$\delta_{\mathcal{F}}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{d} \mu(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_0^1 \mu_i\left(\{ y \in X_i \mid (y, t) \in A_i \}\right) dt$$

$\geq E \because =$

$$\geq \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2dr}} \frac{1-2drt}{1-drt}\, dt}_{} = \frac{1-\lg 2}{dr}$$

$$= \frac{1-\lg 2}{r}.$$

$\blacksquare$