§3. treeing 付き同値関係.

自由群の類似物.

ケーリーグラフ

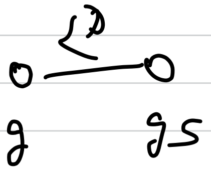
Def G : 可算群

$S \subset G$ を G の対称な生成系とし, $e \notin S$ とする.

$S = S^{-1}$ $G = \langle S \rangle$

このとき, ケーリーグラフ $\Gamma = \Gamma(G, S)$ を,

$V(\Gamma)$ 頂点の集合 $:= G$

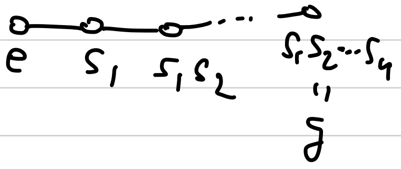


$g \in G, \ s \in S$

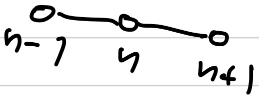
で定める.

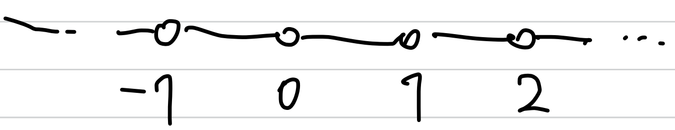
✓ S が G を生成するので Γ は連結.

$g = s_1 s_2 \cdots s_n$


e
s₁
s₁s₂
s₁s₂⋯sₙ
‖
g

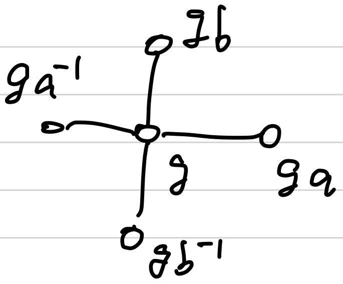
例 $\Gamma = \Gamma(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$



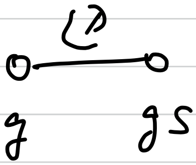


例 $F_2 = \langle a, b \rangle$, $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$

グラフ Γ を次で定める：

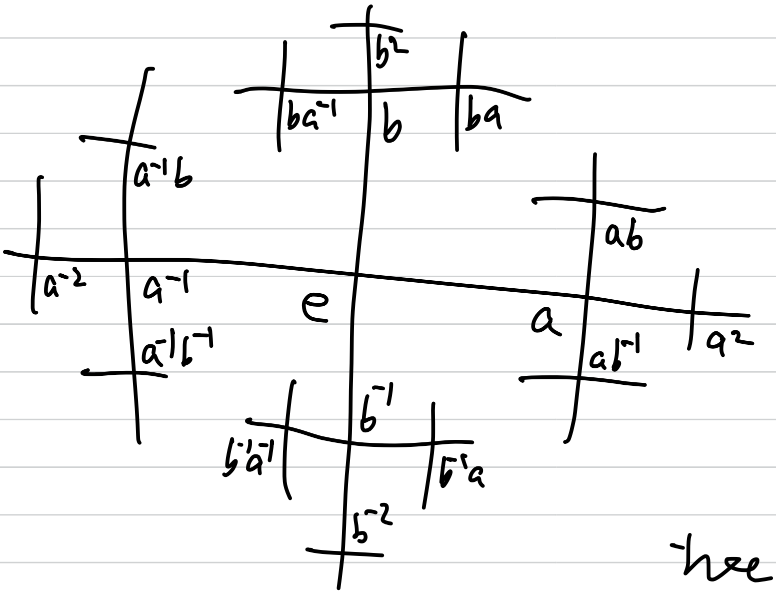

gb
ga^{-1}
g
ga
gb^{-1}

Γ の頂点の集合 $V(\Gamma) := F_2$



$g \in F_2$, $s \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$

→


b^2
ba^{-1}
b
ba
$a^{-1}b$
ab
a^{-2}
a^{-1}
e
a
a^2
$a^{-1}b^{-1}$
ab^{-1}
b^{-1}
$b^{-1}a^{-1}$
$b^{-1}a$
b^{-2}

tree になる。

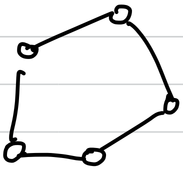
‖

連結なグラフで

circuit を持たないもの。

‖

単純な closed path.



木 = wood

樹 = tree

Def R on X 可算ボレル同値関係. $\Delta_X := \{(x,x)\} \subset R$

$\Sigma \subset R \setminus \Delta_X$ 可測 かつ 対称とする.

$(x,y) \in \Sigma \Rightarrow (y,x) \in \Sigma$

(1) $x \in X$ に対し. グラフ $\Sigma[x]$ を

$\Sigma[x]$ の頂点の集合は $[x]_R$

$\underset{y}{\circ}\overset{\text{辺}}{\text{———}}\underset{z}{\circ} \iff (y,z) \in \Sigma$

$y \in, \ni z$
$[x]_R$

で定める.

✓ $(x,x') \in R$ のとき. $\Sigma[x] = \Sigma[x']$.

(2) $\forall x \in \Sigma$ $\Sigma[x]$ が連結のこと.

(つまり. Σ が R を生成すること)

Σ は R の graphing であるという.

(3) $\forall x \in \Sigma$ $\Sigma[x]$ が tree のとき.

Σ は R の treeing であるという.

樹系

┘

例 $\underset{\cup}{G}$ 可算群 $\overset{\text{free}}{\curvearrowright} X$ 可測 $\to \mathcal{R} := \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$

$e \notin S$ 対称有限生成系 $\to \Gamma = \Gamma(G, S)$ ケーリーグラフ.

$$\Sigma := \{ (x, sx) \mid x \in X, s \in S \}$$

このとき. $\forall x \in X$

$$V(\Gamma) = G \longrightarrow [x]_{\mathcal{R}}$$
$$g \longmapsto g^{-1}x$$

により $\Gamma \simeq \Sigma[x]$.

実際. $g \text{ — } gs \longmapsto g^{-1}x \text{ — } (gs)^{-1}x = s^{-1}g^{-1}x$ $\quad (g^{-1}x, s^{-1}g^{-1}x) \in \Sigma$.

⌟

Γ : 連結より $\Sigma[x]$ も連結になるので.

Σ は $\mathcal{R}$ の graphing となる.

特に $G = F_2$, $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ のとき.

上の Σ は $\mathcal{R}$ の treeing になる.

⌟

例 $X = \prod_{\mathbb{N}} \{0, 1\}$

$\cup$

$X' := \{ (x_n) \in X \mid (x_n)$の中に 0 と 1 がともに無限個存在する $\}$

$f : X' \to X'$

$(x_n) \mapsto$「$x_1, x_2, \cdots$ のうち、最初の 0 を 1 にして、他は変えないで得られる列」

$$(0, 0, 1, 0, \cdots) \overset{f}{\longmapsto} (1, 0, 1, 0, \cdots)$$

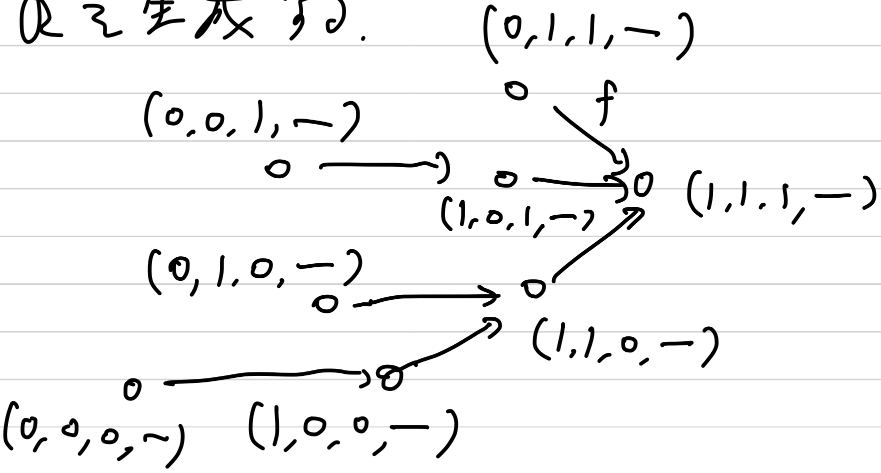
$$(1, 1, 0, 0, \cdots) \overset{f}{\longmapsto} (1, 1, 1, 0, \cdots)$$

（$\cdots$ の部分は変えない）

$R := \{ ((x_n), (y_n)) \in X' \times X' \mid$ 十分大のすべての n に対し $x_n = y_n \}$

✓ $\forall x \in X' \quad (x, f(x)) \in R$.

✓ graph f は R を生成する.

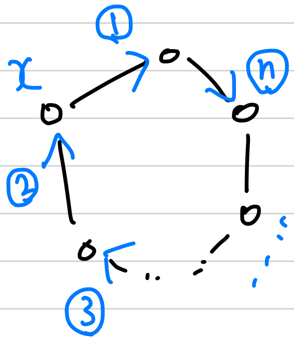


✓ $\Sigma := \{(x, f(x)), (f(x), x) \mid x \in X'\}$

は R の treeing となる.

[各頂点から出る矢印は 1 本.

n-circuit



に対し、 $f^n(x) = x$

となるが.

これは f の定義から

ありえない.]

$f^n(x) = x_1, x_2, \cdots$ のうち最初の n 個の 0 を 1 にしたもの.

┘

treeing のコスト

$\mathcal{R}$ on (X,μ) 可測同値関係.

Σ : treeing of $\mathcal{R}$.

μ¹の定義.

Def $C(\Sigma) := \frac{1}{2}\mu^1(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_X |\Sigma \cap \mathcal{R}^x| \, d\mu(x)$

Σのコストという.

$\subset \Sigma[x]$

✓ $|\Sigma \cap \mathcal{R}^x| = \deg_{\Sigma[x]}(x)$

！頂点xにつながっている辺の本数

は辺 $\Longleftrightarrow (x,y) \in \Sigma$.

→ $2C(\Sigma) =$ tree $\Sigma[x]$ における

頂点 x の degree の μ に関する平均.

例 $F_n \curvearrowright (X,\mu)$ pmp free $\quad F_n = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$

$\Sigma := \{ (x, a_i^{\pm 1}x) \mid x \in X \}$

→ $C(\Sigma) = \frac{1}{2}\mu^1\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{graph}\, a_i \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{graph}\, a_i^{-1} \right)$

$= n.$

┘

“treeing のコスト = 自由群のランクの類似物”

Thm (Gaboriau, 2000, 証明しない)

R on (X, μ) 保測同値関係.

Σ : R の treeing.

このとき.

$$C(\Sigma) = \inf \{ C(\Phi) \mid \Phi : R \text{ の graphing} \}.$$

特に. R の treeing のコストは treeing のとり方によらない.

┘

Cor $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $n \neq m$ のとき.

$$F_n \curvearrowright (X, \mu) \underset{\text{OE}}{\not\sim} F_m \curvearrowright (Y, \nu)$$

↖ free, pmp. ↗

┘

tree T に対し. $V(T)$: 頂点の集合

$E(T)$: 辺 —— . (向きなし)

T : 局所有限 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall v \in V(T)$ $\deg_T v < \infty$.

locally finite

Thm (今日の目標)

$\mathcal{R}$ on (X,μ), $\forall x \in X$ $|[x]_{\mathcal{R}}| = \infty$ とする.

Σ : $\mathcal{R}$ の treeing

$\forall x \in X$ $\Sigma[x]$ locally finite とする.

($C(\Sigma) < \infty$ ならば これは満たされる)

$\parallel$ $\frac{1}{2}\int_X \deg_{\Sigma[x]}(x)\, d\mu(x)$ なので

このとき,

(1) $C(\Sigma) \geq 1$.

(2) $C(\Sigma) = 1 \iff (\mathcal{R}, \mu)$: 従順.

$\lrcorner$

(2)の $\Leftarrow$ ($(\mathcal{R}, \mu)$ ergodic ならば)

CFW と Dye より $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{Z} \curvearrowright X)$ とかける.

$\mathcal{R}$ は cost 1 の treeing Φ をもつ

($\mathbb{Z} \curvearrowright X$ からくるもの)

Gab. より $C(\Sigma) = C(\Phi) = 1$.

$\lrcorner$

tree のエンド

T : tree

Def (1) T の道 := $(v_i)_{i=0}^{n} \subset V(T)$ で

(path) $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(T)$ となるもの.

(2) T の線 := T の道 $(v_i)_{i=0}^{n}$ で

simple

$\underbrace{v_i \neq v_j \quad \forall i \neq j}$

(geodesic) となるもの

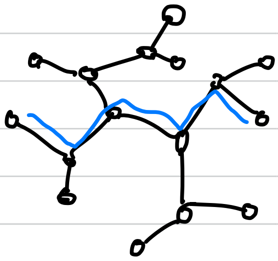
$\Updownarrow$

$\forall i \quad v_i \neq v_{i+2}$

つまり

back-tracking がない.

back-tracking が ないようにたどれば simple path になる.



(3) T の射線 := $(v_i)_{i=0}^{\infty} \subset V(T)$ で

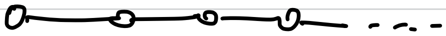
(ray) $\forall n \quad (v_i)_{i=0}^{n}$ が T の線になるもの.

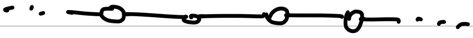
(4) T の射線 $(u_i)_{i=0}^{\infty}$, $(v_i)_{i=0}^{\infty}$ が同値であるとは,

$$\exists M, N \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad u_{i+M} = v_{i+N}$$

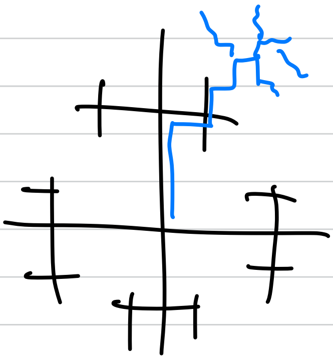
となることをいう.

- T の射線の同値類を T のエンドという.
- $e(T) := |T$ のエンド$|$ を T のエンド数という.

例 ①  エンド数 = 1

②  エンド数 = 2

$\Gamma(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$

③ 

$\Gamma(F_2, \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\})$

エンド数 = ∞

Tのエンド $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ による片側無限既約語

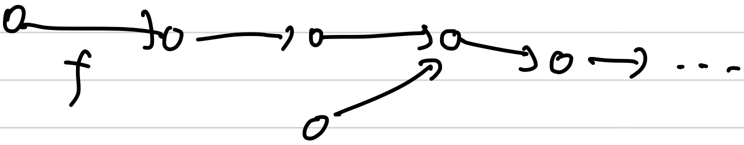
$bababab^{-1}a \cdots$

④ $X = \prod_{\mathbb{N}} \{0, 1\}$
$\cup$
X' = (x_n) で 0 と 1 がともに無限個現れるもの全体

$f: X' \to X'$ からできる tree Σ について.

$x_1, x_2, \cdots$ で最初に現れる 0 を 1 にする.

$\forall x \in X'$ $\Sigma[x]$ のエンド数は 1 である.



✓ 各頂点から矢印が1本出ている。

✓ 矢印をずっとたどれる。→ 列ができる。

✓ $[x]_R$ 内のどの2点をとっても、
(y_n), (z_n)
そこから矢印をたどればいずれ出会う。

（実際、$(y_n) \underset{R}{\sim} (z_n)$ より $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ y_n = z_n$

$$\begin{array}{ccc} (y_1, \cdots, y_{N-1}, y_N, \cdots) & \overset{f}{\mapsto} \cdots \overset{f}{\mapsto} & (1, \cdots, 1, y_N, y_{N+1}, \cdots) \\ & & \qquad\quad \| \\ (z_1, \cdots, z_{N-1}, z_N, \cdots) & \overset{f}{\mapsto} \cdots \overset{f}{\mapsto} & (1, \cdots, 1, z_N, z_{N+1}, \cdots) \end{array}$$

よって出会う。）

✓ 各 $x \in X'$ に対し、x に入ってくる $[x]_R$ の点の個数は有限。

（実際、$x = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{\uparrow}, 0, \text{——})$ とすると、
その様な点は ここの部分を変えたもののみ）

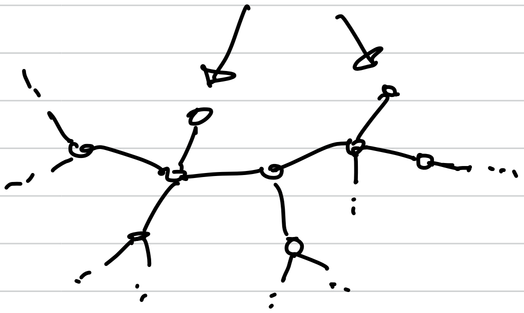
→ $I[x]$ のエンド数は1。

⌋

treeの剪定（せんてい）

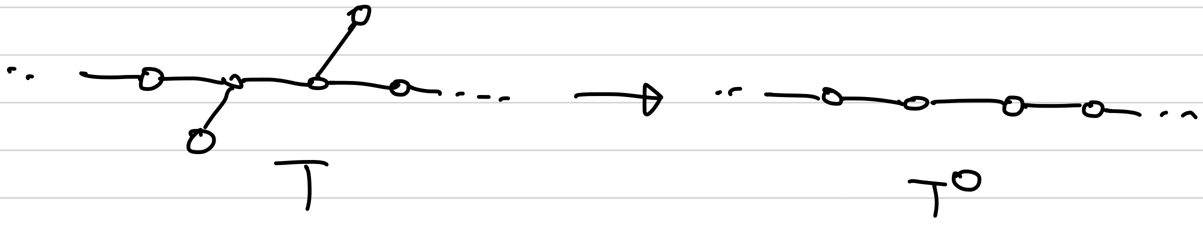
Def T : tree

(1) $\deg v = 1$ となる $v \in V(T)$ を T の端点という.



(2) T に対し. T の端点とそれについている辺を除いて得られる T の subtree を T^0 とおく.

$T \rightsquigarrow T^0$ のプロセスを T の剪定とよぶ.



┘

Prop T : loc. finite tree

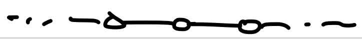
$T_0 := T$, $T_n := (T_{n-1})^\circ$, $n \geq 1$ として. $T_\infty := \bigcap_n T_n$ とする.

(1) T_∞ は端点をもたない.

(2) $e(T) = 1 \Rightarrow T_\infty = \phi$.

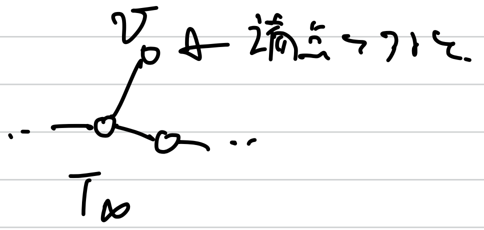
(3) $e(T) \geq 2$ のとき. $e(T) = e(T_\infty)$.

特に $T_\infty \neq \phi$.

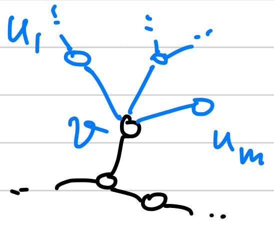
(4) $e(T) = 2$ のとき. $T_\infty =$  .

$\Gamma(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$

Pf (1)



T : loc. finite なので

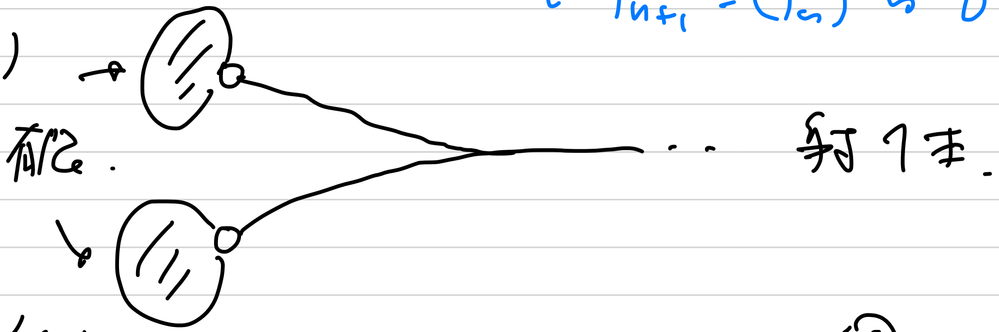


v につながる $T \setminus T_\infty$ の頂点は有限個. $u_1, \cdots, u_m$

十分大の n に対し T_n は $u_1, \cdots, u_m$ を含まない.

→ $T_{n+1} = (T_n)^\circ$ は v を含まない. 矛盾

(2)

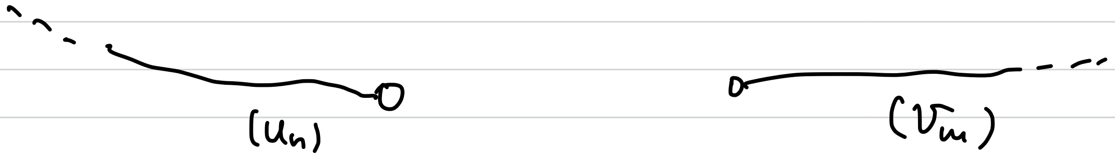


端点があり, どんどんとっていくと ▨ はなくなる.

(3) Tの直線 := V(T)の列 $(v_n)_{\underset{\sim\sim}{n\in\mathbb{Z}}}$ で、

$\forall k<l\in\mathbb{Z}$ $(v_n)_{n=k}^{l}$ が Tの道であるもの.

$e(T)\geq 2$のとき、　同値でない射が2本ある.



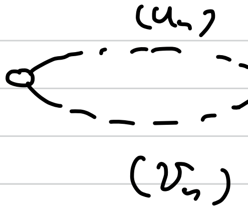
そういうのは、十分先では交わらない.

(どんな先でも交わっていたら、交わる点の間で、

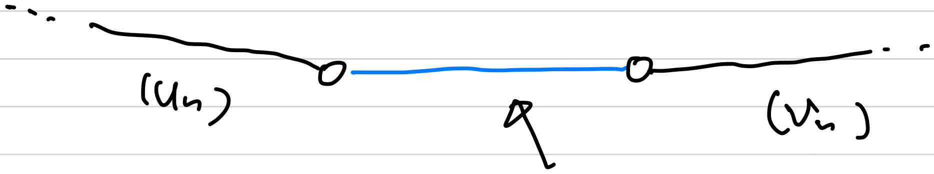
2つの射は一致するので

結局 (u_n) と (v_m) は同値に

なっている.)



こういうのは起こらない.



2つの射を交わらないようにして、道でつなぐ.

→ 直線ができる.

✓ どんな2つの異なるエンドどうしも直線で結べる.

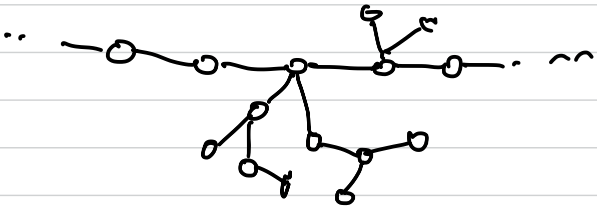
✓ 直線は、剪定をくり返しても残り続ける.

→ (3) ok. ┘

(4) 直径が1本あり. 途中に生えているのは

有限な tree のみ.

(次の㊟による) ▨



㊟ 一般に T loc. finite tree に対し.

T が端をもつ (つまり $e(T) \geq 1$) $\iff$ $|V(T)| = \infty$.

(ケーニヒの補題.)

㊟ loc. finite でないと. Prop. (1) も正しくない.

ケーニヒの補題も正しくない.

treeing のエンドと剪定

R on (X, μ) 可測同値関係. $\forall x \in X$ $|[x]_R| = \infty$ とする.

Σ : R の treeing.

$\forall x \in X$ $\Sigma[x]$ は loc. finite tree とする.

証明略 (それの証明では loc. finite を使う)

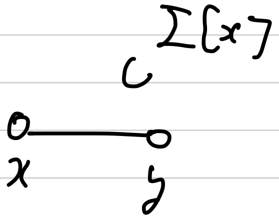
☆ $x \mapsto e(\Sigma[x])$ は可測かつ R-不変

つまり $(x, y) \in R \Rightarrow e(\Sigma[x]) = e(\Sigma[y])$

→ $e(\Sigma[x])$ は一定である場合に考えればよい.

今後はそうする. $e := e(\Sigma[x]) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$X^\circ := \{x \in X \mid |\Sigma \cap R^x| = 1\}$



辺で結ばれる

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in \Sigma$.

$\Sigma^\circ := \Sigma \cap (X^\circ \times X^\circ)$

→ Σ° は $R|_{X^\circ}$ の treeing であり.

$\forall x \in X^\circ$ $\Sigma^\circ[x] = (\Sigma[x])^\circ$

つまり $\Sigma[x]$ を剪定したもの.

☆ $C(\Sigma) - \mu(X) = C(\Sigma^\circ) - \mu(X^\circ)$

証

$$\begin{array}{ccc} \underset{E :=}{} \{(x,y) \in \Sigma \setminus \Sigma^\circ \mid \deg_{\Sigma[x]}(x) = 1\} & \to & X \setminus X^\circ \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

これは同型で、range map の制限.

$$\longrightarrow \mu^1(E) = \mu(X \setminus X^\circ)$$

$$\Sigma \setminus \Sigma^\circ = E \sqcup \underbrace{E^{-1}}_{\substack{\shortparallel \\ \{(y,x) \mid (x,y) \in E\}}}$$

であり、

$$\underbrace{\mu^1(\Sigma \setminus \Sigma^\circ)}_{\substack{\shortparallel \\ 2(C(\Sigma) - C(\Sigma^\circ))}} = 2\mu^1(E) = 2\mu(X \setminus X_0).$$

▨

$X_0 := X$, $\Sigma_0 := \Sigma$ とし、

$$X_n := (X_{n-1})^\circ, \quad \Sigma_n := (\Sigma_{n-1})^\circ, \quad n \geq 1$$

$$X_\infty := \bigcap_n X_n, \quad \Sigma_\infty := \bigcap_n \Sigma_n$$

とする.

✓ Σ_∞ は $R|_{X_\infty}$ の treeing となり.

$$\forall x \in X_\infty \qquad \Sigma_\infty[x] = \underbrace{(\Sigma[x])_\infty}_{\uparrow} .$$

tree $\Sigma[x]$ を剪定しつづけて
得られた究極の tree.

✓ $C(\Sigma) < \infty$ のとき.

$$C(\Sigma) - \mu(X) = C(\Sigma_n) - \mu(X_n)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} C(\Sigma_\infty) - \mu(X_\infty)$$

(ルベーグ収束定理より)

$$\to \quad C(\Sigma) - \mu(X) = C(\Sigma_\infty) - \mu(X_\infty).$$

┘

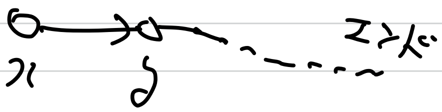
Thm の証明に入る　$\mathcal{R}$ on (X, μ)

Σ : $\mathcal{R}$ の loc. finite treeing

$e := e(\Sigma[x]) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ const. とする.

(I) $e = 1$ のとき.

$\exists\ \Sigma = \Sigma_+ \sqcup (\Sigma_+)^{-1}$



各 $(x, y) \in \Sigma_+$ は $\Sigma[x]$ のエンドへ向かう.

可測にとれる.　(証明略).

$f : X \to X$ を $(x, f(x)) \in \Sigma_+$ で定めると.

$\Sigma_+ = \mathrm{graph}\, f.$

$S \subset \mathcal{R}$ に対し.
$S^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in S\}$
とすると. $\mu^1(S) = \mu^1(S^{-1})$.
($\mathcal{R}$ が μ を保つことによる)

$\rightarrow\ \mu^1(\Sigma_+) = \mu(X) = 1.$

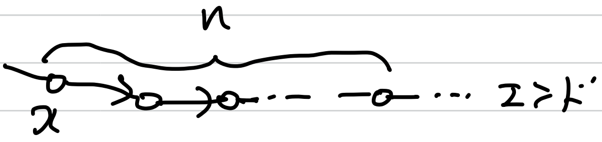
演

$$\rightarrow\ C(\Sigma) = \frac{1}{2}\left(\mu^1(\Sigma_+) + \mu^1((\Sigma_+)^{-1})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

┘

$\xi_n : R \to [0,1]$ を.



$$\xi_n(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{y は x がエンドに向かう長さnの鎖に含まれるとき.} \\ 0 & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

で定める.

✓ $\forall x \in X \quad \sum_{y\in[x]_R} \xi_n(x,y) = 1.$

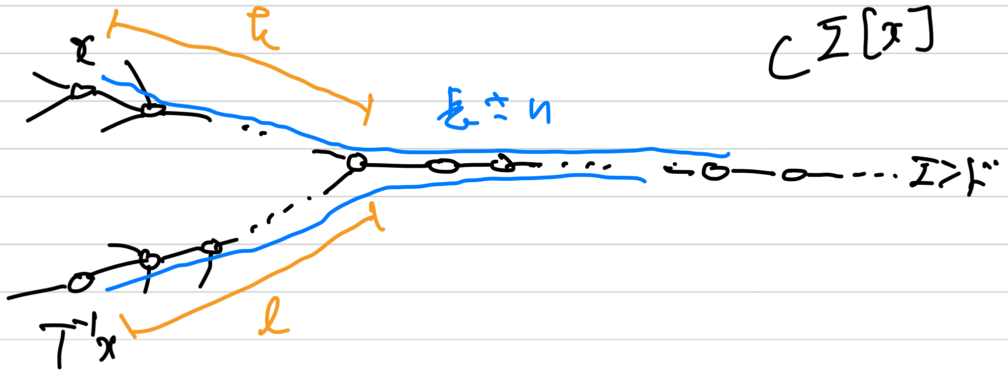
✓ $T \in [R]$ に対し. $\|T\xi_n - \xi_n\|_{L^1(\mu^1)} \to 0.$

(よって (ξ_n) は R のライターシーケンス.

(R,μ) は amenable になる.)

実際.

$$\|T\xi_n - \xi_n\|_1 = \int_X \sum_{y\in[x]_R} \Big| \underbrace{(T\xi_n)(x,y)}_{\substack{\shortparallel \\ \xi_n(T^{-1}x,\,y)}} - \xi_n(x,y) \Big| \, d\mu(x)$$


x
k
長さn
$\subset \Sigma[x]$
エンド
ℓ
$T^{-1}x$

$$\sum_{y\in[x]_R} \left| \xi_n(T^{-1}x, y) - \xi_n(x, y) \right| \underset{\uparrow}{=} \frac{k+l+|k-l|}{n+1}$$

n : 十分大. $\quad \to 0.$

$(n\to\infty).$

ルベーグ収束定理より $\|T\xi_n - \xi_n\|_1 \to 0.$

⌟

(I) e = 1 のときを考える :

$C(I) = 1$ であって. (R, μ) は従順.

(Ⅱ) $e = 2$ のとき.

Σ を分割して X_∞, Σ_∞ を得る.

$x \in X$ に対し. $\Sigma[x]$ のエンド数は 2 なので

$(\Sigma[x])_\infty$ のエンド数も 2 であり. 特に空でない.

よって X_∞ は $\underbrace{\mathcal{R} \text{ の各同値類と交わる}}_{\nearrow\varnothing}$. — ⊛

✓ 一般にこのような可測集合 $\underset{A}{}$ は正の測度をもつ.

(証明. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ とかけば. $GA = X$ である.)

✓ Σ_∞ は $\mathcal{R}|_{X_\infty}$ の treeing であり.

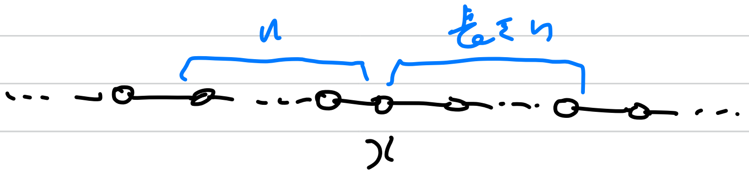
$$\forall x \in X_\infty \quad \Sigma_\infty[x] \simeq \underset{\Gamma(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})}{\cdots - \circ - \circ - \circ - \cdots}$$

$$\to \quad C(\Sigma_\infty) = \frac{1}{2} \int_{X_\infty} \underbrace{\deg_{\Sigma_\infty[x]}(x)}_{\overset{\shortparallel}{2}} \, d\mu(x) = \mu(X_\infty)$$

$$\to \quad C(\Sigma) = \mu(X) = 1.$$

✓ $R|_{X_a}$ が amenable であることを示せば

R : amenable が従う. (⊛ による. 証明略)



$x \in X$ に対し,

$$\xi_n(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & d_{\Sigma_a[x]}(x,y) \le n \text{ のとき.} \\ 0 & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

✓ (ξ_n) は (R,μ) のライター列である.

(さっきと証明はほぼ同じ.)

┘

(II) $e=2$ のときのまとめ :

$C(I)=1$ であって, (R,μ) は従順.

(III) $e \geqq 3$ のとき.

Σ を剪定して X_∞, Σ_∞ を得る.

(II) と同様に.

✓ X_∞ は $\mathcal{R}$ の各同値類と交わり, $\mu(X_\infty) > 0$.

✓ $\forall x \in X_\infty$ $\Sigma_\infty[x]$ は端点をもたず.

$$e(\Sigma_\infty[x]) = e \geqq 3.$$

今, $C(\Sigma_\infty) = \frac{1}{2} \int_{X_\infty} \deg_{\Sigma_\infty[x]}(x)\, d\mu(x)$ であり

$\forall x \in X_\infty$ $\deg_{\Sigma_\infty[x]}(x) \geqq 2$ である. 端点をもたないので.

✓ $Z := \{ x \in X_\infty \mid \deg_{\Sigma_\infty[x]}(x) \geqq 3 \}$ とすると.

Z は $\mathcal{R}$ の各同値類と交わる.

(そうでないと, $\Sigma_\infty[x] = \cdots \underbrace{-\circ-\circ-\circ-\circ-}_{\Gamma(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})} \cdots$

になり $e \geqq 3$ に反する.)

$\rightarrow$ $\mu(Z) > 0$.

ということは, $\deg \geqq 3$ となる点はかなり多い.

$$C(\Sigma_\infty) = \frac{1}{2}\int_{X_\infty} \underbrace{\deg_{\Sigma_\infty[x]}(x)}_{\begin{cases} \geq 3 & \text{if } x \in Z \\ = 2 & \text{if } x \notin Z \end{cases}} d\mu(x) > \mu(X_\infty)$$

$\to$ $C(\Sigma) > \mu(X) = 1$.

(III) $e \geq 3$ のときのまとめ：

$C(\Sigma) > 1$ であって. $\xRightarrow[\text{CFW + Gab.}]{}$ (R, μ)：非従順.

(Thm) ▨

Fact (III) のとき. (R, μ) non.amenable ち.

Gaboriau の定理なしに 剪定を頑張れば示せる.

(Adams 1990 + Levitt 1995)

剪定の導入.

Fact (III) が成りたつとき. 実は $e = \infty$ である.