§2. 可測同値関係とその従順性.

✓ 集合 X 上の同値関係とは, $R \subset X \times X$ で

- $\forall x \in X \quad (x, x) \in R$
- $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

をみたすもののこと.

✓ 主に考えたい同値関係:

G 可算群 $\curvearrowright (X, \mu)$ p.m.p. action on a standard probability space

$\to \quad R(G \curvearrowright X) := \{ (x, g^{-1}x) \mid x \in X, g \in G \}.$

<u>Def</u> (1) Polish space := 可分な位相空間で, 完備な距離で距離付けられるもの.

(2) standard Borel space := 可測空間 $(X, \mathcal{B})$ であって, $\exists P$: Polish sp.

$$(X, \mathcal{B}) \simeq (P, \underbrace{P\text{のボレル代数}}_{P\text{の open set で生成される }\sigma\text{-alg.}})$$

となるもののこと.

(3) standard probability space

$:\Leftrightarrow$ 確率空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で $(X, \mathcal{B})$ が standard Borel space であるもの.

Facts ① $(X, \mathcal{B})$ standard, $A \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ $(A, \mathcal{B}|_A)$ も standard.

② $(X, \mathcal{B})$ standard, X : 非可算

$\Rightarrow$ $(X, \mathcal{B}) \simeq ([0,1], \text{Borel})$

③ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ standard prob. sp., atom なし.

$\Rightarrow$ $(X, \mathcal{B}, \mu) \underset{\varphi}{\simeq} ([0,1], \text{Borel}, \text{Leb})$.

測度空間の同型 (§0で定義した).

(μの) atom とは, $A \in \mathcal{B}$ で $\mu(A) > 0$ であって

$B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$ $\Rightarrow$ $\mu(B) = 0$ or $\mu(B) = \mu(A)$

となるもののこと.

(注) $A \in \mathcal{B}$ が μ の atom ならば, $\exists x \in A$

$\mu(\{x\}) = \mu(A)$.

記号 X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ に対し、

$$r : \mathcal{R} \to X \qquad\qquad s : \mathcal{R} \to X$$
$$(x, y) \mapsto x \qquad\qquad (x, y) \mapsto y$$

range map　　　　　source map

$x \in X$ に対し $[x]_{\mathcal{R}} :=$ x の同値類
$$= \{ y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{R} \}.$$
┘

G 可算群 $\curvearrowright (X, \mathcal{B})$ 可測.

$\to \mathcal{R} := \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ は次をみたす:

(1) $\mathcal{R} \subset X \times X$ 可測.

(実際. $\mathcal{R} = \bigcup_{g \in G} \underbrace{\text{graph } g}$ ← 可測 演)

(2) $\forall x \in X$ $[x]_{\mathcal{R}}$ は可算.

Def X standard Borel space.

X 上の可算ボレル同値関係とは、X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ で上の (1), (2) をみたすもののこと. ┘

Fact $\forall \mathcal{R}$ on X 上のDefのもの

$\exists G$ 可算群 $\curvearrowright X$ 可測 s.t. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$.
┘

Def $\mathcal{R}$ on X 可算ボレル同値関係.

μ on X prob. measure.

$\mathcal{R}$ が μ を保つとは、

「$A, B \subset X$ $\varphi : A \xrightarrow{\sim} B$ graph $\varphi \subset \mathcal{R}$

$\Rightarrow \varphi_* \mu|_A = \mu|_B$ 」

が成り立つことをいう.

保測同値関係とは、このようなもの $(\mathcal{R}, \mu)$ のこと.

$\mathcal{R}$ on (X, μ) とかいたりもする.
┘

例 $G \curvearrowright (X, \mu)$ pmp.

$A, B \subset X$ $\varphi : A \xrightarrow{\sim} B$ graph $\varphi \subset \mathcal{R} := \mathcal{R}(G \curvearrowright X) = \bigcup_{g \in G} \text{graph } g$

ならば、

$\exists A = \bigsqcup_{g \in G} A_g$ $\varphi(x) = gx$ $\forall x \in A_g$

各 g は μ を保つので φ も保つ.

よって $(\mathcal{R}(G \curvearrowright X), \mu)$ は保測同値関係となる.
┘

(R, μ) の従順性を定義したい。

R の積をもつ： $(x,y)(y,z) = (x,z)$

（ G：従順 $\underset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\, m : \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ 左不変ミーン ）

$x, y \in X$ に対し、 $R^x := r^{-1}(x) = \{(x,y) \mid y \in [x]_R\}$

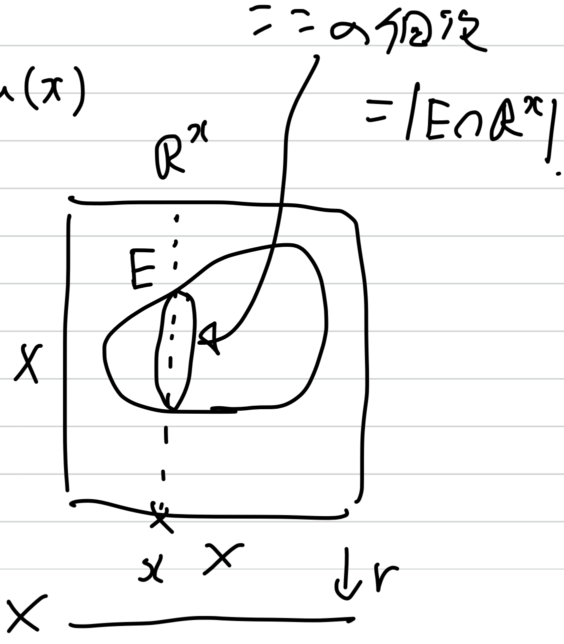
Def R on (X, μ) が従順であるとき、

$\sigma : \underbrace{L^\infty(R)}_{①} \to \mathbb{C}$ $\underbrace{\text{左不変}}_{③}\underbrace{\text{ミーン}}_{②}$

が存在することをいう。 ┘

① R 上の測度 μ^1 を次で定める：

$$\mu^1(E) := \int_X |E \cap R^x| \, d\mu(x)$$



✓ $x \mapsto |E \cap R^x|$ は可測か？

Yes！

実際. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \overset{\exists}{\curvearrowright} X)$ とかくと.

$$= \bigsqcup_{g \in G} R_g, \quad R_g \subset \mathrm{graph}\, g$$

$$r : \mathcal{R} \to X$$
$$(x, y) \mapsto x$$

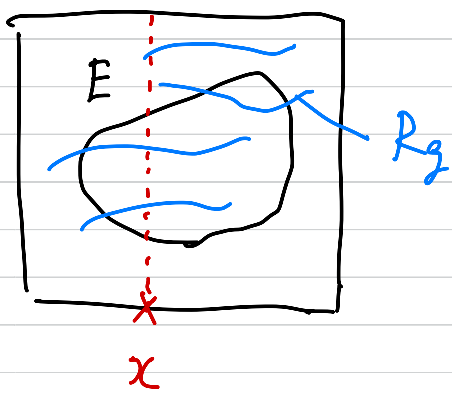
$r : R_g \to X$ 可測, 単射.

(ここで Fact Y, Z : standard Borel
$f : Y \to Z$ 可測, 単射.
$\Rightarrow f(Z) \subset Y$ 可測, $f : Y \to f(Y)$ 可測同型)

$\to$ $r(E \cap R_g) \subset X$ 可測.

よって $|E \cap \mathcal{R}^x| = \sum_{g \in G} 1_{r(E \cap R_g)}(x)$, $\forall x \in X$

よって $x \mapsto |E \cap \mathcal{R}^x|$ は可測!



① の $L^\infty(\mathcal{R})$ とは. $L^\infty(\mathcal{R}, \mu^1)$ のこと.

② **Def** $(\mathcal{R}, \mu)$ 上のミーンとは

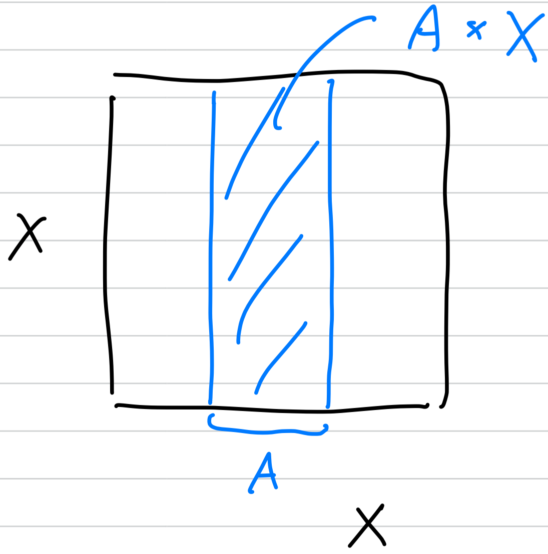
線型写像 $\sigma : L^\infty(\mathcal{R}) \to \mathbb{C}$ で次をみたすもののこと:

(i) $\xi \in L^\infty(\mathcal{R})$, $\xi \geq 0 \Rightarrow \sigma(\xi) \geq 0$.

(ii) (the balanced property, 均こう性)

$$\forall A \subset X \quad \sigma(1_{\mathcal{R} \cap (A \times X)}) = \mu(A)$$

特に $\sigma(1) = 1$.



イメージ: $\sigma = \int_X m_x \, d\mu(x)$

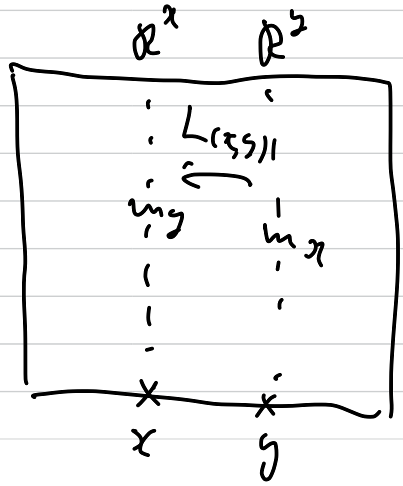
m_x : $\mathcal{R}^x$ 上のミーン.

注 $\sigma \in L^\infty(\mathcal{R})^*$
$\|\sigma\| = 1$.

$L_{(x,y)} : \mathcal{R}^y \to \mathcal{R}^x$

$(y,z) \mapsto (x,y)\cdot(y,z)$
$= (x,z)$

左かけ算



③ σ の左不変性.

$$[\mathcal{R}] := \{ T \in \mathrm{Aut}(X, \mu) \mid Tx \in [x]_{\mathcal{R}} \ \forall x \in X \}$$

the full group of $(\mathcal{R}, \mu)$.

$\left(\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X) \text{ のとき. } \quad g \in G \Rightarrow g \in [\mathcal{R}] \right)$

✓ $[\mathcal{R}] \curvearrowright \mathcal{R}$ 左から掛算

T i.e. $T \cdot (x, y) := (Tx, y) \ \left(= (Tx, x)(x, y) \right)$

→ $[\mathcal{R}] \curvearrowright L^\infty(\mathcal{R})$ 誘導

$$(T\xi)(x, y) := \xi\left(T^{-1}(x, y)\right)$$
$$= \xi(T^{-1}x, y).$$

→ $[\mathcal{R}] \curvearrowright L^\infty(\mathcal{R})^*$

Def $\sigma \in L^\infty(\mathcal{R})^*$ が この作用で不変なとき.

σ は「左不変である」という.

☆ G : amenable $\curvearrowright (X, \mu)$ pmp, $R := R(G \curvearrowright X)$

このとき (R, μ) は amenable.

Pf $\exists m : \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ 左不変ミーン

$\sigma : L^\infty(R) \to \mathbb{C}$ 左不変ミーンを作りたい.

$$L^\infty(R) \to \ell^\infty(G)$$
$$\xi \mapsto \bar{\xi} \qquad \bar{\xi}(g) := \int_X \xi(x, g^{-1}x)\, d\mu(x).$$
$$g \in G$$

$\sigma : L^\infty(R) \to \ell^\infty(G) \xrightarrow{m} \mathbb{C}$ と定める.

✓ $A \subset X$ に対し. $\overline{1_{R \cap (A \times X)}} = \mu(A)$ 定数

$\to \sigma(1_{R \cap (A \times X)}) = m(\mu(A)) = \mu(A).$

均一性 OK.

✓ $\xi \mapsto \bar{\xi}$ は G-同変である.

$(G \to [R] \curvearrowright L^\infty(R)$ とみなす.$)$

実際. $\overline{(g\xi)}(t) = \int_X (g\xi)(x, t^{-1}x)\, d\mu(x)$

$$= \int_X \xi(g^{-1}x, t^{-1}x)\, d\mu(x)$$

g は μ を保つ

$$= \int_X \xi(x, t^{-1}gx)\, d\mu(x)$$

$$= \bar{\xi}(g^{-1}t) = (g\bar{\xi})(t) \quad \text{ok.}$$

$$\to \quad \forall g \in G \quad \sigma(g^{-1}\xi) = \sigma(\xi)$$

$$\sigma(g^{-1}\xi) = (g\sigma)(\xi)$$

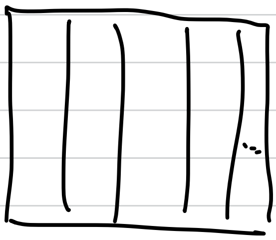
これが ξ と $T \in [R]$ にしても成り立つことから.

$$\exists\, X = \bigsqcup_{g \in G} A_g \qquad T = g \text{ on } A_g$$

とかけることと, σ の可算加法性による. 済 $\blacksquare$

Key obs.

X



$A_1\ A_2\ \cdots$

X

$\xi \in L^\infty(R)$

$$\xi = \sum_n \xi \cdot 1_{A_n}$$

σ は有限加法的なのだが この意味では可算加法的である.

$$\to \sigma(\xi) = \sum_n \sigma(\xi \cdot 1_{A_n})$$

可算加法性.

☆ $G \curvearrowright (X,\mu)$ pmp, free, $R := R(G \curvearrowright X)$

(R,μ) amenable $\Rightarrow$ G amenable.

Pf $\exists\, \sigma : L^\infty(R) \to \mathbb{C}$ 左不変ミーン

$m : \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ 左不変ミーンを作りたい.

$$\begin{aligned} \ell^\infty(G) &\to L^\infty(R) \\ \xi &\mapsto \tilde{\xi} \end{aligned} \qquad \tilde{\xi}(x, g^{-1}x) := \xi(g)$$

$G \curvearrowright X$ free なので定まる.

$m : \ell^\infty(G) \to L^\infty(R) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}$ と定める.

✓ $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ が G-同変であることを示せばよい.

$$\widetilde{(g\xi)}(x, t^{-1}x) = (g\xi)(t) = \xi(g^{-1}t).$$

$g, t \in G$

$$\|$$

$$(g\tilde{\xi})(x, t^{-1}x) = \tilde{\xi}(g^{-1}x, \underbrace{g^{-1}x}_{}) = \xi(g^{-1}t)$$

$$\text{“} t^{-1}g\, g^{-1}x = (g^{-1}t)^{-1} g^{-1}x$$

$$\to \widetilde{g\xi} = g\tilde{\xi}$$

■

Cor $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$, $H \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y, \nu)$ pmp, free

$$\alpha \underset{OE}{\sim} \beta, \quad G: \text{amenable} \Rightarrow H: \text{amenable}.$$

(よって $\mathbb{Z} \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$, $F_2 \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y, \nu)$ pmp, free に対し
$$\alpha \underset{OE}{\not\sim} \beta.$$)

Pf G: amenable $\Rightarrow$ $(R(G \curvearrowright X), \mu)$ amenable

1つ目の☆　　2) $\alpha \underset{OE}{\simeq} \beta$ より

$(R(H \curvearrowright Y), \nu)$

$\uparrow$

よってこれも amenable.

$\Rightarrow H$: amenable.

2つ目の☆ $\blacksquare$

Fact (演)

(R, μ) amenable, $S \subset R$ 部分同値関係 on X

$\Rightarrow (S, \mu)$ amenable.

群の場合にならってませよ.

Fact より 特に

(R, μ) amenable, $A \subset X$, $\mu(A) > 0$

$\Rightarrow (R|_A, \mu|_A)$ amenable

ここで $R|_A := R \cap (A \times A)$. ┘

ライター条件

Def (R, μ) のライター列とは $(\xi_n) \subset L^1(R)$ で

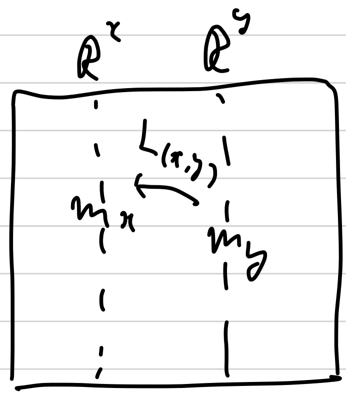
(1) $\xi_n \geq 0$

(2) a.e. $x \in X$ に対し $\displaystyle\sum_{y \in [x]_R} \xi_n(x, y) = 1$

(3) $\forall T \in [R]$ $\|T\xi_n - \xi_n\|_1 \longrightarrow 0$

をみたすもののこと。 ┘

右不変ミーンのイメージ: $\displaystyle \sigma = \int_X m_x \, d\mu(x)$



$\xi_n(x, \cdot) \rightsquigarrow m_x$ in $\ell^\infty(R^x)$

$(L_{(x,y)})_* m_y = m_x$

Thm (R,μ) : amenable $\Leftrightarrow$ (R,μ) はライター列をもつ.

Pf $\Leftarrow$: $(\xi_n) \subset \underbrace{\{R\text{上のミーン}\}}_{\text{汎弱閉}} \subset L^\infty(R)^*$

汎弱集積点 σ をとれば, σ は R 上の左不変ミーンである.

$\Rightarrow$: $\underset{\smile}{\text{群の場合}}$ にならってできる.

やってないので略. ▨

(注) G のライター列から $G \curvearrowright (X,\mu)$ pmp に対し
(free)
$(R(G\curvearrowright X),\mu)$ のライター列を作ってみよう.

Thm (Connes-Feldman-Weiss)

(R,μ), (S,ν) ergodic, pmp, amenable.

μ, ν : atom なし.

$\Rightarrow$ $(R,\mu) \simeq (S,\nu)$.

ここで:

$(\mathcal{R}, \mu)$ ergodic $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A \subset X$ に対し.

$$[A]_{\mathcal{R}} := \{ y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{R}, \; x \in A \}$$

とするとき. $\mu([A]_{\mathcal{R}}) = 0$ or 1.

($\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ とおけば $[A]_{\mathcal{R}} = GA$ であり.

これは可測.)

<u>Cor</u> G, H infinite amenable

$G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$, $H \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y, \nu)$ free, ergodic pmp.

$\Longrightarrow$ $\alpha \underset{OE}{\sim} \beta$.

$\lrcorner$