

§7 從 1.13 起

S: $\frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu (\gamma^\mu)^{\text{inst}} \gamma^\nu$

$$\ell^\infty(S) := \left\{ \xi : S \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\xi\|_\infty := \sup_{s \in S} |\xi(s)| < \infty \right\}$$

Def $S.L. \equiv -\gamma$ (mean) τ s.

$$m : l^\infty(S) \rightarrow \mathbb{C} : \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim$$

$$\begin{cases} \cdot \quad \xi \geq 0 \Rightarrow m(\xi) \geq 0 \\ \cdot \quad m(1) = 1 \end{cases}$$

$\gamma \in \mathcal{L}^0(S)$ const. f.d.

Σπιδιότα, 25.12.20.

7

★ $m \in \mathcal{L}^b(S)^*$ z. $\|m\| = 1$.

P4 $\exists$ が、実は $\exists$ の $\forall$ だ: $\exists \leq |\exists| \leq \|\exists\|_{\infty}$

$$\phi \quad m\left(\frac{z}{3}\right) \leq m(|z|) \leq m(\|z\|_\infty) = \|z\|_\infty.$$

$$\sum d^n \subseteq \mathbb{R} \text{ 70 j 5.}$$

$$|m(\zeta)| \leq |m(\operatorname{Re} \zeta)| + |m(\operatorname{Im} \zeta)|$$

$$\leq \| \operatorname{Re} z \|_\infty + \| \operatorname{Im} z \|_\infty \leq 2 \| z \|_\infty.$$

$$T=2 \quad m \in l^{\infty}(S)^T$$

Def: M on $(S, P(S))$ is s.f.l.

$m: \ell^\infty(S) \rightarrow \mathbb{C}$ is M : s.t. "finite" $\sum$ is finite.
 $\sum_{i=1}^n$ (100% - 7% 92% 100%)

$$\xi = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i} \quad \text{finite sum}$$

$$m(\xi) := \sum_{i=1}^n c_i M(A_i) \in \mathbb{C}$$

$\xi \geq 0$ is s.f.l. ξ_n : finite $\nearrow \xi$ - s.f.l.
 $\xi \in \mathbb{C}$

$$m(\xi) := \lim_n m(\xi_n) \text{ exists.}$$

✓ well-defined!

└

$$G \text{ T.F. } \curvearrowright S$$

$$g \in G, \xi \in \ell^\infty(S), s \in S$$

$$\curvearrowright G \curvearrowright \ell^\infty(S) \quad (g\xi)(s) = \xi(g^{-1}s)$$

$$\curvearrowright G \curvearrowright \ell^\infty(S)^* \quad (gm)(\xi) = m(g^{-1}\xi)$$

$$\uparrow m \in \ell^\infty(S)^*$$

Def 3 $m(\xi) = \langle \xi, m \rangle \in \mathbb{C}$

$$\langle \xi, gm \rangle = \langle g^{-1}\xi, m \rangle$$

is ok.

Def. $m \in \ell^\infty(G)$ が G -invariant.

$$\Leftrightarrow \forall g \in G, \quad \int g m = \int m.$$

• G : 従順 (amenable)

$$\Leftrightarrow \exists m \in \ell^\infty(G) \text{ (左) } G\text{-不変} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \ell^\infty(G) \text{ (左) } G\text{-不変} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists m \in \ell^\infty(G) \text{ (左) } G\text{-不変} \Leftrightarrow$$

最初の例 G : 有限群.

$$m(\xi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g), \quad \xi \in \ell^\infty(G)$$

は G -不変 $\Leftrightarrow$ m G 上一定.

よって G は従順である.

例 $\mathbb{Z}$ は従順である.

PP $M := \mathbb{Z}$ 上の ℓ^∞ 全体

$$= \left\{ m \in \ell^\infty(\mathbb{Z})^* \mid \forall \xi \geq 0, m(\xi) \geq 0, m(1) = 1 \right\}$$

凸閉.

Banach-Alaoglu 5) M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间.

$m_0 \in M$ 是 $\mathcal{H}$ 中的元. ($\delta_0 \in M$ 未必成立)

$g := 1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. ($g^k = k \in \mathbb{Z}$).

$$m_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g^k m_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

显然 $m_n \in M$.

$(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛于 $m \in M$ 当且仅当 $m = m_0$.

若 $m = m_0$ 则 $\|m_n - m_0\| \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \|g m_n - m_n\| &= \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^n g^{k+1} m_0 - \sum_{k=0}^n g^k m_0 \right\| \\ &= \frac{1}{n+1} \|g^{n+1} m_0 - m_0\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (n \rightarrow \infty).$$

$\eta \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, $\varepsilon > 0$ 任意.

$$\langle \eta, m_n \rangle \approx_\varepsilon \langle \eta, m \rangle$$

因为 η 有界, 所以 $\langle \eta, m_n \rangle \approx_\varepsilon \langle \eta, m \rangle$.

n 充分大时 ε

$$\langle \eta, g m_n \rangle = \langle g^{-1} \eta, m_n \rangle \approx_\varepsilon \langle g^{-1} \eta, m \rangle$$

$$k \geq 1 \quad \langle \eta, u \rangle = \langle g^{-1} \eta, u \rangle = \langle \eta, gu \rangle \text{ となり.}$$

$$\text{すなわち } \forall \eta \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ に対して } \exists u \text{ であり } gu = u. \quad \square$$

Facto (1) $\mathbb{T}$ 上の $\mathbb{Z}$ は amenable. (e.g. $\mathbb{Z}^d$).

(2) $N \triangleleft G$ のとき.

$$N, G/N : \text{amenable} \Rightarrow G : \text{amenable} \quad (\text{演})$$

$$(\text{特に } G_1, G_2 \text{ amenable} \Rightarrow G_1 \times G_2 \text{ amenable.})$$

(2)' (2) の $\Leftarrow$ も成り立つ.

(3) $\mathbb{T}$ 上の $\mathbb{Z}$ は amenable. ((1) & (2) から得られる)

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G, \quad G_i/G_{i-1} \text{ abelian}$$

となり G は $\mathbb{Z}$ である. └

例 $F_2 = \langle a, b \rangle$ 自由群は amenable ではない.

$$:= \{a, a^{-1}, b, b^{-1} : \text{その関係は } \{ \} \}$$

$$a b a^{-1} b^{-1}$$

「 a と a^{-1} がそれぞれ消えたら」

b と b^{-1} もそれぞれ消えたら」

空の文字列も関係式を満たす。
e

の逆は.

pf ~~analogous~~ $\Rightarrow$. $\exists m: F_2$ -不変 $\Rightarrow m F_2$.

$$F_2 = \{e\} \sqcup \underbrace{W_a \sqcup W_{a^{-1}}}_{\uparrow} \sqcup W_b \sqcup W_{b^{-1}}$$

$\uparrow$ $\frac{1}{2} F_2$ が a, a^{-1} mod 全体.

$$= W_a \sqcup a W_{a^{-1}}$$

$$= W_b \sqcup b W_{b^{-1}}$$

$$\rightarrow 1 = m(F_2) = m(\{e\}) + \underbrace{m(W_a) + m(W_{a^{-1}})}_{\substack{\text{" } a \\ m(W_{a^{-1}})}} + \underbrace{m(W_b) + m(W_{b^{-1}})}_{\substack{\text{" } b \\ m(W_{b^{-1}})}}$$

$$= m(W_a) + \underbrace{m(a W_{a^{-1}})}_{\substack{\text{" } a \\ m(W_{a^{-1}})}}$$

m is left-invariant.

$$= m(W_b) + \underbrace{m(b W_{b^{-1}})}_{\substack{\text{" } b \\ m(W_{b^{-1}})}}$$

$$m(W_{b^{-1}})$$

$$\rightarrow 1 = m(\{e\}) + 1 + 1 \geq 2 \quad \text{矛盾} \quad \square$$

Prop $H < G$, $G: \text{amenable} \Rightarrow H: \text{amenable}$.

PP $m: G\text{-invariant} \Rightarrow m|_H$ is H -invariant.

$$S < G \text{ s.t. } G = \bigcup_{s \in S} Hs \text{ disjoint union.}$$

$$\bar{\Phi}: G \rightarrow H \text{ s.t. } \bar{\Phi}(hs) = h, \quad h \in H, s \in S$$

is well-defined.

$$\checkmark \bar{\Phi} \text{ is } H\text{-invariant. (s.t.) } \bar{\Phi}(hg) = h \bar{\Phi}(g) \\ \forall h \in H \quad \forall g \in G$$

$$\bar{\Phi}_* m \text{ on } H?$$

$$(\bar{\Phi}_* m)(A) = m(\bar{\Phi}^{-1}(A)), \quad A \subset H$$

is well-defined. $\bar{\Phi}_* m$ is H -invariant $\Rightarrow$ is good. $\square$

Cor $F_2 < G \Rightarrow G: \text{non-amenable}$.

Q $\Leftarrow$ is it true? (von Neumann-Day's result).

is $\Leftarrow$ No. s.t. $\exists G \text{ non-amenable } F_2 \not< G$

is that. So s.t. G is amenable or not is not decidable.

弱収束条件 (Reiter)

G : 可算群.

$$Prob(G) := \{ \xi \in \ell^1(G) \mid \xi \geq 0, \|\xi\|_1 = 1 \}$$

$$\checkmark \quad G \curvearrowright G \text{ 左可換} \rightarrow G \curvearrowright \ell^1(G) \\ \hookrightarrow \bigcup Prob(G)$$

Def $(\xi_n)_n \subset Prob(G)$ 2.

$$\forall g \in G \quad \|g\xi_n - \xi_n\|_1 \rightarrow 0$$

$\Sigma \tau_j$ も $n \rightarrow \infty$ とき $G \curvearrowright \Sigma \tau_j$ 2.

✓

例 $G = \mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}$. $\xi_n = \frac{1}{2n+1} 1_{[-n, n]} \in Prob(\mathbb{Z})$

は $\Sigma \tau_j$ 2.

$$\left(\begin{array}{l} \text{実際 } g := 1 \in \mathbb{Z} \text{ 2.} \\ \|g\xi_n - \xi_n\|_1 = \frac{2}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{array} \right)$$

★ G が ライト-312 とは: G は *areable*.

PP $(\xi_n)_n \subset \text{Prob}(G)$ ライト-312 ではない.

$\cap$
 $\{\xi \rightarrow \gamma \text{ on } G\} : \text{測度 コンパクト.}$

$\exists m : \xi \rightarrow \gamma \text{ on } G, (\xi_n)_n$ の 測度 連続性 0.

m は G -不変 2-測度.

□

Thm $G : \text{areable} \Rightarrow G$ は ライト-312 かつ,

(証明あり).

Obs $\text{Prob}(G) \subset \{\xi \rightarrow \gamma \text{ on } G\} (\subset \ell^0(G)_1^*)$

$\uparrow$ weak* dense

(Hahn-Banach の 分離定理 による)

演

$m : G$ -不変 $\xi \rightarrow \gamma$ と Td .

$\exists (\xi_i)_i \subset \text{Prob}(G) \quad \xi_i \rightarrow m, \text{ weak}^*$
 not

$\eta \in \mathcal{L}^0(G)$ に対し.

$$\langle \eta, g\xi_i - \xi_i \rangle = \langle \tilde{g}'\eta - \eta, \xi_i \rangle$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle \tilde{g}'\eta - \eta, m \rangle &= \langle \eta, g_m - m \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって $g\xi_i - \xi_i \rightarrow 0$ weak.

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ の存在を確かめよう。

└