

高維散乱とエルゴード理論

§0 導入

G 可算群 $\rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ 確率測度空間.

p.m.p.

$$\mu(X) = 1.$$

(= probability-measure-preserving)

つまり, $g \in G$ は $(X, \mathcal{B})$ の可測変換.

μ は G 不変. (i.e. $\forall A \in \mathcal{B} \quad gA \in \mathcal{B}$ かつ
 $\mu(gA) = \mu(A)$).

$$\rightarrow R(G \curvearrowright X) := \{(x, g^{-1}x) \mid x \in X, g \in G\}$$

$\cap$
 $X \times X$: $G \curvearrowright X$ の軌道同値関係. (orbit equivalence relation)

✓ x の同値類 = x の軌道, つまり $\{gx \mid g \in G\}$
 $\uparrow$
 X

✓ 同様の同値関係 R on X は "群" とも:

$$(x, y)(y, z) = (x, z), \quad (x, y), (y, z) \in R.$$

$\rightarrow R$ は群 M の作用に由来.

「測度を移す」の意味.

Goal (保測) 同位図位 に対する 自由作用の類似物を
考察し. そこから導かれた問題に集中.

例 (無生反回転)

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (\simeq [0, 1)) \quad \leftarrow \text{1周期-7-24/2 m 3 4.}$$

可測性 2.1.2.1

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ とする.}$$

$$T_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \quad t \mapsto t + \alpha \pmod{1} \text{ とする.}$$

$$\rightarrow \mathbb{Z} \curvearrowright (\mathbb{T}, \mu) \quad \text{p.m.p. 作用}$$
$$n \mapsto T_\alpha^n$$

* $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ の場合})$ 二点作用の ergodicity 2.2.2.

$$\text{2.2.2. } A \subset \mathbb{T}, T_\alpha A = A \text{ ならば } \mu(A) = 0 \text{ or } 1.$$

$$\left(1_A \in L^2(\mathbb{T}) \text{ と } \gamma \text{-1 2 級反復作用 } \gamma \text{ の場合.} \right)$$

」

Def (0) $(X, \mu), (Y, \nu)$ 測度空間 (測度) 空間.

$$(X, \mu) \underset{\text{def}}{=} (Y, \nu) \Leftrightarrow \exists f: \underbrace{X'}_{\cap X} \xrightarrow{\sim} \underbrace{Y'}_{\cap Y} \text{ 可測同値.}$$

$$\text{c.t. } \mu(X \setminus X') = 0 = \nu(Y \setminus Y')$$

$$f_* (\mu|_{X'}) = \nu|_{Y'}$$

(一般) $g: X \rightarrow Y$ 可測 μ on X 測度. $g_* \mu$ on Y 測度.

$$(g_* \mu)(B) = \mu(g^{-1}B), B \subset Y \text{ 可測. } \quad \rfloor$$

(1) G 可測空間 (X, μ) p.w.p. (Y, ν) p.w.p. $I \subset \mathbb{R}^+$.

$$G \cap (X, \mu) \underset{\text{a.e.}}{=} G \cap (Y, \nu)$$

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists f: (X, \mu) \xrightarrow{\sim} (Y, \nu)$$

$$\forall g \in G \text{ a.e. } x \in X \quad f(gx) = g f(x). \quad \rfloor$$

(2) $G \curvearrowright (X, \mu), H \curvearrowright (Y, \nu)$ p.w.p. isom.

$$G \curvearrowright (X, \mu) \underset{OE}{\sim} H \curvearrowright (Y, \nu)$$

(orbit equivalent, 軌道同値)

$$\Leftrightarrow \exists f: (X, \mu) \xrightarrow{\sim} (Y, \nu)$$

$$\text{a.e. } f(Gx) = Hf(x) \quad \text{a.e. } x \in X.$$

* OE の 作用の軌道同値関係の一致性について :

$$G \curvearrowright X \rightarrow \mathcal{O}(G \curvearrowright X) := \{(x, g^{-1}x) \mid x \in X, g \in G\}$$

$$\checkmark G \curvearrowright X \underset{OE}{\sim} H \curvearrowright Y$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}(G \curvearrowright X) \cong \mathcal{O}(H \curvearrowright Y)$$

$$\text{つまり } \exists f: X \xrightarrow{\sim} Y \text{ 同位写が存在する.}$$

例 $\alpha, \beta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \simeq \mathbb{T}$.

$$\mathbb{Z} \curvearrowright_{\alpha} (\mathbb{T}, m) \quad , \quad \mathbb{Z} \curvearrowright_{\beta} (\mathbb{T}, m) \quad \text{無固定点} \\ n \mapsto T_{\alpha}^n \quad \quad n \mapsto T_{\beta}^n$$

$\simeq$ である. $T_{\alpha} \simeq T_{\beta} \iff \beta = \alpha \text{ or } 1 - \alpha.$

($\iff$: $\simeq$ が作れる. $\Rightarrow$: $\mathbb{T}$ -上の測度 μ)

次のように定義する

Def. $G \curvearrowright (X, \mu)$ p.m.p. $\mathfrak{G}$ (essentially) free

$$\iff_{\text{def}} g \in G \text{ に対して a.e. } x \in X \text{ に対して } gx = x \Rightarrow g = e.$$

$G \curvearrowright (X, \mu)$ p.m.p. $\mathfrak{G}$ ergodic

$$\iff_{\text{def}} A \subset X \text{ に対して } \forall g \in G \quad gA = A \text{ ならば } \mu(A) = 0 \text{ or } 1.$$

□

Thm (Dye, 1959)

$$\forall \mathbb{Z} \curvearrowright_{\sigma} (X, \mu) \text{ ergodic, free p.m.p. } \sigma \sim_{\text{OE}} T_{\sqrt{2}}.$$

特に. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad T_{\alpha} \sim_{\text{OE}} T_{\beta}.$

定理 3.2 $\forall G : \text{可算無限群} \quad (\text{e.g. } \mathbb{Z}^d)$

$\forall G \curvearrowright (X, \mu)$ ergodic, free, pmp. $\sigma \sim_{\text{OE}} \tau_{\mathbb{Z}}$. ┘

Thm (Ornstein-Weiss, 1980).

$G : \text{可算無限群} \curvearrowright (X, \mu)$ ergodic, free pmp.

$\Rightarrow$ a.e.

$\sigma \sim_{\text{OE}} \tau_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow G : \text{従順} (\text{amenable}).$

┘

非従順な群の典型例:

F_n : 階数 $n \geq 2$ の自由群.

および $F_n \ni$ 合成群.

7.5

§1. 従順群

§2. 任意の同位体像とその従順性.

§3. 任意の同位体像.

§4. Gaboriau-Lyons の定理