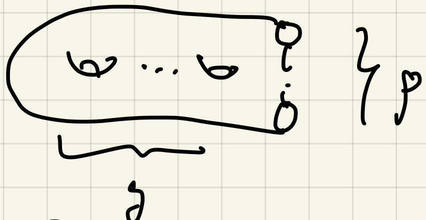
復習 $S = S_{g,p}$



$\mathrm{Mod}(S) := \mathrm{Homeo}_+(S)/_{\text{isotopy}}$

$\mathrm{Mod}^*(S) := \mathrm{Homeo}(S)/_{\text{isotopy}}$

$\kappa(S) = 3g+p-4.$

Thm (Ivanov et.al.) $\kappa(S) > 0.$

$G_1, G_2 < \mathrm{Mod}^*(S)$ finite index

$f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2 \Rightarrow \exists\, g \in \mathrm{Mod}^*(S)$ $f = \mathrm{Ad}\,g.$

Step 1 (hard).

$V(S) :=$ the isotopy classes of s.c.c. on S

$\cup$

α $\underset{\text{homotopic}}{\not\simeq}$ 1点, ∂ comp.

$\alpha \mapsto t_\alpha \in \mathrm{Mod}(S)$ Dehn twist. $D_\alpha := \langle t_\alpha \rangle$

Show that $\forall \alpha \in V(S)$ $\exists!\, \beta \in V(S)$

$$f(D_\alpha \cap G_1) = D_\beta \cap G_2.$$

$\lrcorner$

前回 ①と② の証明を説明した.

① $N \lhd H < G(m) \underset{\text{finite index}}{(< \mathrm{Mod}(S))}$

N : infinite amenable , H : non amenable

$\Rightarrow$ H : reducible

i.e. $\exists \sigma \in \Sigma(S)$ $\quad h\sigma = \sigma \quad \forall h \in H$.

② 略.

これらの主張は.

(＊) $\mathrm{Mod}(S) \curvearrowright \mathcal{PMF} = \mathcal{MIN} \sqcup \mathcal{MIN}^c$

$$\mathcal{MIN} \downarrow \partial\mathcal{C}(S), \qquad \mathcal{MIN}^c \downarrow \Sigma(S)$$

上の prob meas の空間における fixed pt を使って示した.

→ 同値関係の設定でも実行可能!

$G = \mathrm{Mod}^*(S)$.

$G \curvearrowright (X, \mu)$, $G \curvearrowright (Y, \nu)$ free pmp.

$G \curvearrowright X \underset{OE}{\sim} G \curvearrowright Y$ とする つまり

$\exists f : (X, \mu) \xrightarrow{\sim} (Y, \nu)$ $\quad f(Gx) = Gf(x)$.

<u>Thm</u> 実は この2つの作用は 同型になる。

つまり $\exists \tilde{f} : X \xrightarrow{\sim} Y$ $\quad \tilde{f}(gx) = g\tilde{f}(x)$ $\forall g \in G$ $\forall x \in X$.

<u>Rem</u> この種の rigidity をもつ 可算群の 初めての 例を与えた Thm.

$\mathcal{R} := \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$, $\mathcal{R}' := \mathcal{R}(G \curvearrowright Y)$.

$F : \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}'$ $\quad F(x, y) = (f(x), f(y))$.

<u>Prop</u> (Ivanov Step 1 に対応)

$\alpha \in V(S)$ に対し. $\quad \mathcal{D}_\alpha := \mathcal{R}(D_\alpha \cap X)$

$\mathcal{D}'_\alpha := \mathcal{R}(D_\alpha \cap Y)$.

すると. $\forall \alpha \in V(S) \quad \exists X = \bigsqcup_n X_n$ countable measurable partition

$\exists \beta_n \in V(S)$

$$F(\mathcal{D}_\alpha|_{X_n}) = \mathcal{D}'_{\beta_n}|_{f(X_n)}.$$

(special)

<u>Key tools</u> : ⊗, Prob(PMF) における fixed pt,

(non) amenability, normal subeq. rel.

↑

normal subgroup の類似.

Prop の証明は基本的には前回のギロンにならう.

Pf of Thm

Define $\rho : G \times X \to G$ by

$$f(gx) = \rho(g, x) f(x).$$

$\to$ $\rho(gh, x) = \rho(g, hx)\, \rho(h, x)$.

cocycle id. とよぶ.

(第1変数を固定. ρ は homo $: G \to G$ みたいなもの.)

Pf $\rho(gh, x) f(x) = f(ghx) = \rho(g, hx) f(hx)$

$= \rho(g, hx)\, \rho(h, x) f(x)$ $\blacksquare$

Define $\varphi : X \times V(S) \to V(S)$ by

$$\varphi(x, \alpha) = \beta_n \quad \text{if } x \in X_n \ (\text{in Prop}).$$

☆ a.e. $x \in X$ $\varphi(x, \cdot) : V(S) \to V(S)$

is an auto. of $\mathcal{C}(S)$.

$\to$ $\varphi(x, \cdot) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(S)) \simeq G$

$\varphi(x, \cdot) = \varphi(x)$ とかく.

<u>Recall</u> Ivanov 2.4. $f: G_1 \xrightarrow{\cong} G_2$, $h \in G_1$

$$\forall \alpha \ \exists \beta \quad f(D_\alpha \cap G_1) = D_\beta \cap G_2$$

Define $\varphi : V(S) \to V(S)$ $\alpha \mapsto \beta$. $\to$ $\varphi = g$

$\exists g \in \mathrm{Mod}^*(S)$

$$f(h \underbrace{t_\alpha^n}_{\in G_1} h^{-1}) = f(t_{h\alpha}^{\pm n}) = t^m_{\varphi(h\alpha)} \quad \exists m \neq 0$$

$$f(h \, t_\alpha^n \, h^{-1}) = f(h)\, t^{m'}_{\varphi(\alpha)}\, f(h)^{-1} = t^{m'}_{f(h) g \alpha}$$

$$t^m_{\varphi(h\alpha)} = t^m_{gh\alpha}$$

$\Rightarrow$ $f(h) g \alpha = g h \alpha$. $\forall \alpha$

$\Rightarrow$ $f(h) g = g h$

$f(h) = g h g^{-1}$ $\square$

☆ 対応して. 今. $\varphi : X \to G$ とれれば.

$$\rho(h, x) = \varphi(hx)\, h\, \varphi(x)^{-1}. \quad \forall h \in G.$$

が示せ.

$f: X \rightrightarrows Y$ 　 $f(gx) = \rho(g,x) f(x)$ で ρ を定義していた。

$\tilde{f}: X \to Y$ を $\tilde{f}(x) = \varphi(x)^{-1} f(x)$ で定める。

$$\tilde{f}(gx) = \varphi(gx)^{-1} f(gx) = \varphi(gx)^{-1} \rho(g,x) f(x)$$

$$= g\varphi(x)^{-1} f(x) = g\tilde{f}(x).$$

よって $\tilde{f}: X \to Y$ は G-equiv.

$\tilde{f}$ は同型である。

∵ $\tilde{f}$ は G-eq. で $G \curvearrowright X$, $G \curvearrowright Y$ は free なので

$\tilde{f}$ は各 G-orbit上で全射。

$$f(Gx) = Gf(x) \underset{\tilde{f}\text{の定義より}}{=} G\tilde{f}(x) \underset{\text{G-eq.}}{=} \tilde{f}(Gx).$$

よって f と $\tilde{f}$ は各 G-orbit in X を同じ G-orbit in Y にうつす。

$f: X \rightrightarrows Y$ なので $\tilde{f}: X \rightrightarrows Y$ である。 □

これで Thm が示せた。

実際にはより強い次の主張も示せる:

Thm $G = \mathrm{Mod}^*(S)$, H : (arbitrary) countable group

$$G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu) \underset{OE}{\sim} H \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y,\nu)$$

$\Rightarrow$ α と β は virtually isomorphic.

- $N \triangleleft H$ finite　$H \curvearrowright Y \to H/N \curvearrowright Y/N$.
- $H_1 < H$ finite index

$$H_1 \curvearrowright Y_1 \to H \curvearrowright H/H_1 \times Y_1$$

induced action.

Virtual isom. とは、この2つの操作を除いて同型になっていること。

(follows from the last Thm via Furman's argument).

Rigidity of other groups

Thm (Zimmer 1980)

$G_1 = SL_n\mathbb{R}$, $G_2 = SL_m\mathbb{R}$ $\quad n, m \geq 3$.

$G_i \overset{\alpha_i}{\curvearrowright} (X_i, \mu_i)$ ergodic free pmp.

$\alpha_1 \underset{OE}{\sim} \alpha_2 \implies \alpha_1 \simeq \alpha_2$. (strong type rigidity)

Thm (Furman 1999) $\quad n \geq 3$

(i) $SL_n\mathbb{Z} \overset{\alpha}{\curvearrowright} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ satisfies superrigidity

i.e. $\alpha \underset{OE}{\sim} H \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y, \nu)$ $\quad$ H: arbitrary countable group

$\implies \alpha \underset{\text{virtually}}{\simeq} \beta$

(ii) H : countable group に対し.

$\exists\, SL_n\mathbb{Z} \curvearrowright (X, \mu) \underset{OE}{\sim} H \curvearrowright (Y, \nu)$

$\implies$ H is a lattice in $SL_n\mathbb{R}$ (virtually)

i.e. discrete & $\mathrm{vol}(SL_n\mathbb{R}/H) < \infty$

(e.g. $\mathbb{Z}^n < \mathbb{R}^n$, $SL_n\mathbb{Z} < SL_n\mathbb{R}$.)

Rem (ii) の $\Leftarrow$ もほぼ正しい.

Rem Zimmer (1991) proved (ii)

if $\exists\, H \to GL_N\mathbb{C}$ with ∞ image

Thm (本田)

- $\mathrm{Mod}^*(S)$ strong & super rigidity (2010)

  for every ergodic free pmp actions

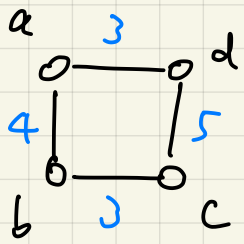
- $SL_3\mathbb{Z} \underset{P}{*} SL_3\mathbb{Z}$ ———— (2011)

  $P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$

Recent results

以下の群は写像類群と同じ rigidity をもつ:

- Certain Artin group. (Horbez–Huang 2020)

$\Gamma :=$  ラベル付き有限グラフ.

$$G_\Gamma := \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; \begin{array}{l} (ab)^4 = (ba)^4 \\ (bc)^3 = (cb)^3 \\ (cd)^5 = (dc)^5 \\ (da)^3 = (ad)^4 \end{array} \right\rangle$$

- $\mathrm{Out}(F_n)$, $n \geq 3$ (Guirardel–Horbez, 2021)

($\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Out}(\pi_1(S))$ if S is closed)

PMF, $C(S)$ の analogue がある.