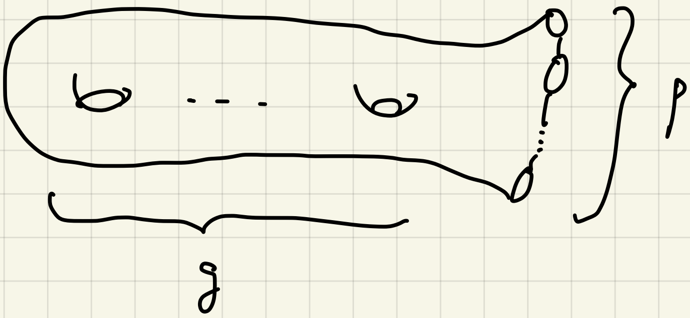
§6 曲面の写像類群

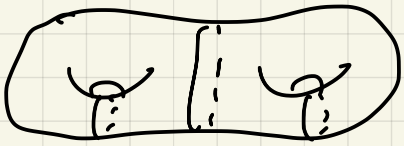
S cpt, orientable surface
$\shortparallel$
$S_{g,p}$ of genus g with p boundary components



$K(S) := 3g+p-4$

$K(S)+1$ = $\underbrace{\text{パンツ}}$分解するのに必要な simple closed curve の数

$S_{0,3}$



s.c.c 3つ.

大体 $K(S)>0$ の場合を扱う.

subsurfaceとして $S_{0,3}$ と $K(S)=0$ のものも扱う.
($S_{0,4}$, $S_{1,1}$)

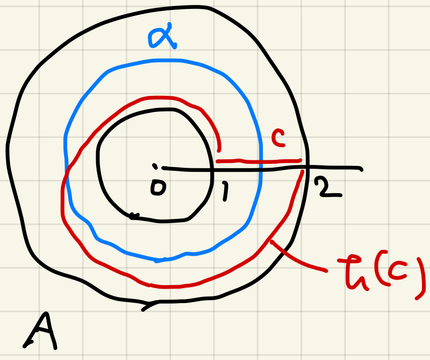
$\mathrm{Mod}(S) := \mathrm{Homeo}_+(S)/\text{isotopy}$　　Sの写像類群.

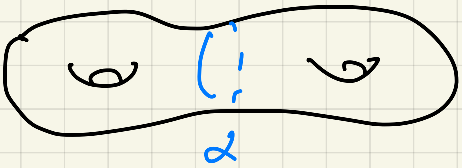
$\mathrm{Mod}^*(S) := \mathrm{Homeo}(S)/\text{isotopy}$

$\vee$ index 2

$\mathrm{Mod}(S)$

例1 Dehn twist $t_\alpha \in \mathrm{Mod}(S)$ for $\alpha \subset S$ s.c.c.





アニュラス

αに沿って ねじる.

$t_\alpha : A \to A$

$$t_\alpha(r,\theta) = (r, \theta + 2\pi(r-1))$$

$V(S) :=$ S上の simple closed curve で 1点にも ∂Sの成分にも homotopic でないもの全体 / isotopy

$i: V(S) \times V(S) \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ intersection number

$i(\alpha,\beta) = \alpha, \beta$ の代表をとったときの $|\alpha \cap \beta|$ の最小化.

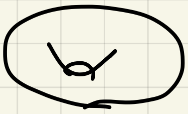
Note: $i(\alpha,\alpha) = 0 \quad \forall \alpha$

☆ (1) $\alpha \in V(S) \Rightarrow \langle t_\alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

(2) $\alpha \neq \beta \in V(S)$, $i(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow \langle t_\alpha, t_\beta \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$

(3) $i(\alpha,\beta) \neq 0$ ならば: $\langle t_\alpha^N, t_\beta^M \rangle \simeq F_2$

N, M : 十分大

例 $S = T$ torus  $\kappa(T) = -1 < 0.$

$$\mathrm{Mod}(S) \simeq SL_2\mathbb{Z} \curvearrowright (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 = T$$

例 $\mathrm{Mod}(S_{0,3}) \simeq \mathfrak{S}_3$ (∂ comp. の入れ替え)

目標の定理 $\kappa(S) > 0$ とし. $G := \mathrm{Mod}^*(S)$.

$$G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu), \quad G \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y, \nu)$$

$$\alpha \underset{OE}{\sim} \beta \Rightarrow \alpha \simeq \beta.$$

もう一つ : $\mathrm{Mod}(S)$ を lattice として含む位相群の決定.

これに先立つ群に対する主張 :

Thm (Ivanov et. al.)

$\kappa(S) > 0$, $G_i < \mathrm{Mod}^*(S)$ finite index. $i=1,2$

$\forall f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ $\exists g \in \mathrm{Mod}^*(S)$

$$f(h) = g h g^{-1} \quad \forall h \in G_1.$$

The Thurston boundary PMF

✲ $V(S) \hookrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{V(S)}$ $\qquad \alpha \mapsto i(\alpha, \cdot)$

$$\hookrightarrow P\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(S)} := \left(\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(S)} \setminus \{0\}\right) \Big/ \mathbb{R}_{>0}^{\times}$$

$$PMF := \overline{V(S)} \text{ in } P\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(S)}.$$

the space of projective measured foliations on S

✲ $\mathcal{T} := \{$ hyperbolic metrics on $S \}$ the Teichmüller space.

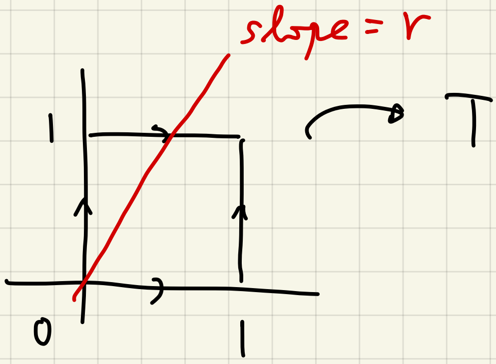
$$h \in \mathcal{T} \hookrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{V(S)}, \qquad h \mapsto h(\cdot)$$

geodesic on Σ_h

✲ $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \sqcup \underbrace{PMF}$ the Thurston compactification of $\mathcal{T}$

$\mathcal{T} \cong B^{6g+2p-6}$ (homeo), $\qquad PMF \cong S^{6g+2p-7}$

torus の場合



$V(T) \leftrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$

slope $\longleftarrow$ r

r の s.c.c.

foliation on T with irrational slope. $\leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mod(S) の元の分類

$$g \in \mathrm{Mod}(S) \curvearrowright \overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \mathcal{PMF} \sim B^{6g+2p-6}$$

Each f has a fixed pt in $\overline{\mathcal{T}}$ by Brower.

$$\mathrm{MIN} := \{ x \in \mathcal{PMF} \mid i(x, \alpha) \neq 0 \ \forall \alpha \in V(S) \}$$

Rem $i(x,y) = 0$ or $\neq 0$ makes sense for $x, y \in \mathcal{PMF}$.

トーラスの場合. $\mathrm{MIN} \leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Thm (Thurston et.al.) $g \in \mathrm{Mod}(S)$

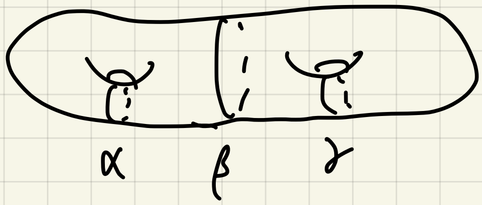
次のいずれかが成りたつ：

(1) g fixes a pt in $\mathcal{T}$ $\rightarrow$ g finite order.

(2) g fixes a pt in $\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$.

(3) g fixes a pt in $\mathcal{MIN}$.

☆ $\Sigma(S) := \{ \sigma \subset V(S) \mid \sigma \neq \phi$, σ is disjoint な s.c.c. の類を代表にもつ $\}$



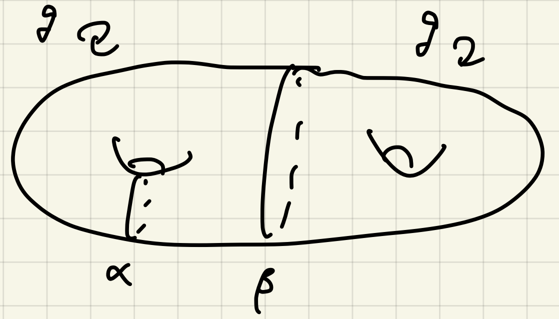
$\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \Sigma(S)$.

実は $\exists\, \Phi : \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN} \rightarrow \Sigma(S)$

$\mathrm{Mod}(S)$-equiv.

よって (2) $\Rightarrow$ g fixes a pt in $\Sigma(S)$.

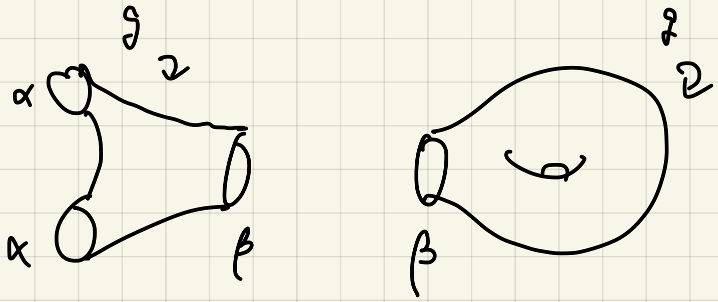
このとき g を reducible という。



$\sigma = \{\alpha, \beta\}$

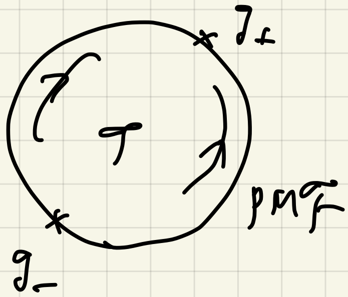
$g\sigma = \sigma$

$\downarrow$ α, β で切る.



小さい subsurface の MCG の話に reduce される.

☆ (3) のとき. g は sink-source dynamics をもつ.



$\exists g_\pm \in \mathcal{PMF}$

このとき. g は pseudo-Anosov であるという.

(トーラスのときの hyperbolic element に対応

例えば. $g = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2\mathbb{Z}$　　固有値 $0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$

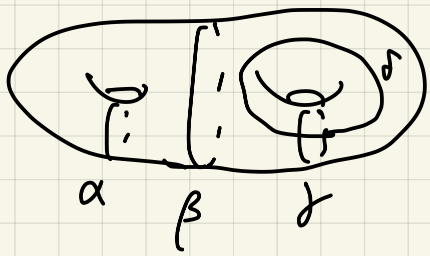
固有ベクトル v_-　　v_+

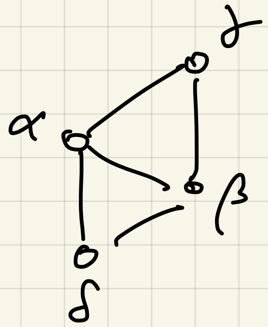
g は v_+ 方向に λ_+ 倍に拡大. v_- 方向に λ_- 倍に縮小)

The complex of curves

$\mathcal{C}(S)$: $V(S)$ = vertices

$\Sigma(S)$ = simplices





$\subset \mathcal{C}(S)$

Thm (Masur-Minsky)

$\kappa(S) > 0$ ならば: $\mathcal{C}(S)$ に辺に長さ1の距離を入れたとき、Gromov hyperbolic metric space になる。

$\shortparallel$

$\dim \mathcal{C}(S)$

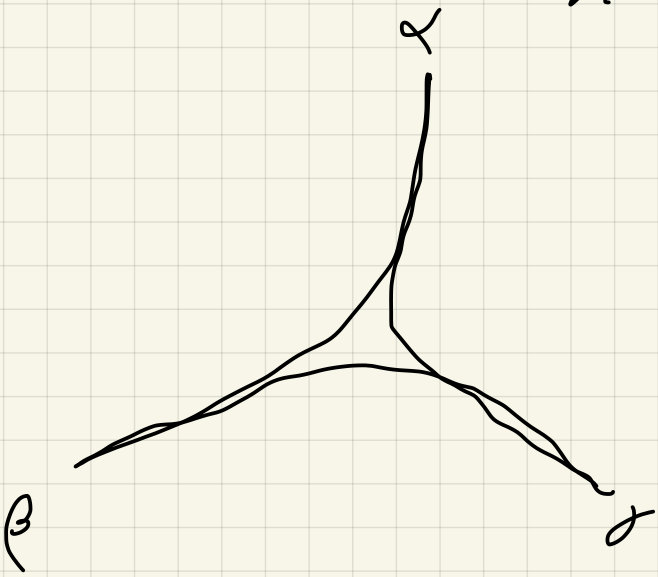
(つまり geodesic triangle が一様に細い)

$\exists \delta > 0.$

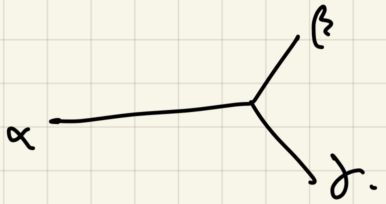
$\forall \alpha, \beta, \gamma$

$[\alpha, \beta]$

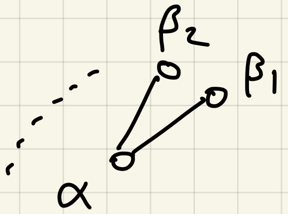
$\subset N_\delta([\beta, \gamma] \cup [\gamma, \alpha])$

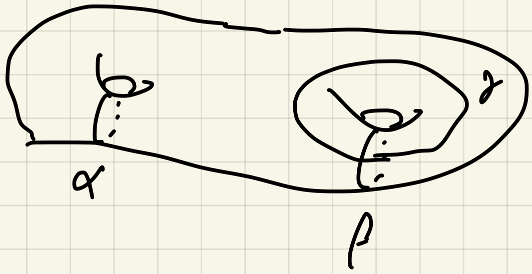


<u>例</u> tree 三角形がつぶれている.



☆ $\mathcal{C}(S)$ is locally ∞.





例えば: $\beta_i = t_\gamma^i(\beta)$

局所コンパクトでないので、扱いずらい.

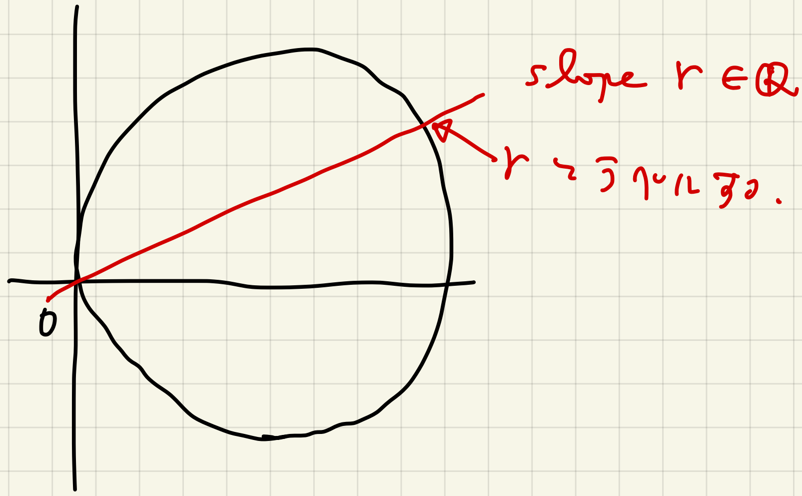
☆ $\partial\mathcal{C}(S)$ 境界が作れる. (でも cpt でない)

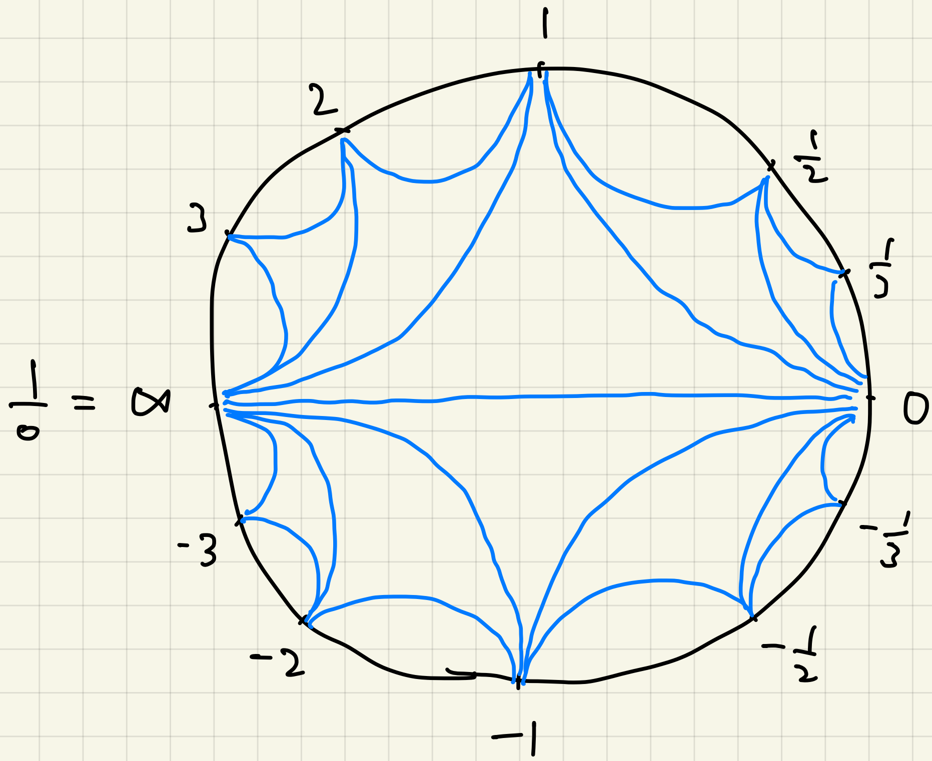
$\quad \| \quad \mathrm{Ray}/\sim.$

☆ $$\begin{array}{ccccc} PMF & = & MIN & \sqcup & MIN^c \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \Phi \\ & & \partial\mathcal{C}(S) & & \Sigma(S) \end{array}$$

ともに $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$-equiv.

トーラスの場合





トーラスのとき.
$\alpha \neq \beta$ ならば
$i(\alpha, \beta) \geq 1$.
minimum.

$\alpha, \beta \in V(T) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対し、 $i(\alpha,\beta) = 1$ のとき

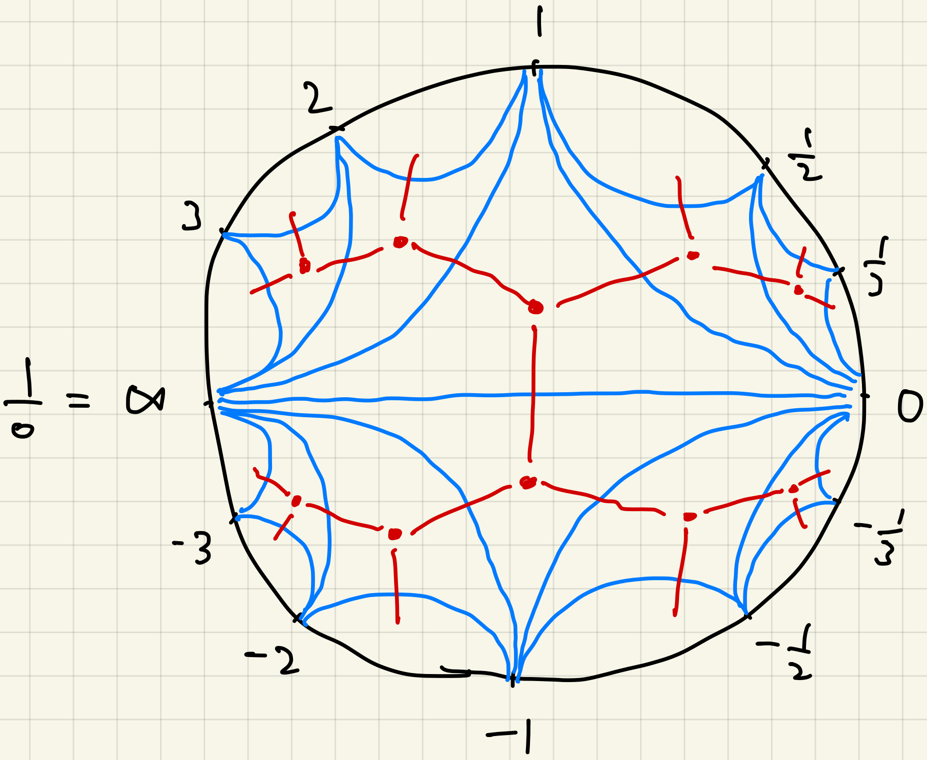
α と β を辺で結ぶ.

$\Updownarrow$ $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d}$

$|ad - bc| = 1$.

$\longrightarrow$ Farey グラフ.

各三角形の各辺に三角形がくっついている.



dual graph = tree. (3-regular)

$\longrightarrow$ Farey graph is hyperbolic.

$\partial(\text{Farey}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. = MZN(L-52).

Ivanov's argument

$G_1, G_2 < \mathrm{Mod}(S)$ finite index

$f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ isom.

How to find $g \in \mathrm{Mod}^*(S)$ s.t. $f = \mathrm{Ad}\, g$

Step 1 $\forall \alpha \in V(S)$ $\exists! \beta \in V(S)$ $\qquad D_\alpha := \langle t_\alpha \rangle$.

$$f(D_\alpha \cap G_1) = D_\beta \cap G_2$$

(This is proved by characterizing D_α algebraically)

Step 2 Define $\varphi : V(S) \to V(S)$ by $\alpha \mapsto \beta$.

Show $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(S))$.

This follows from : for $\alpha, \beta \in V(S)$

$$i(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow \langle t_\alpha, t_\beta \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$$

$$i(\alpha,\beta) \neq 0 \Rightarrow \langle t_\alpha^N, t_\beta^M \rangle \simeq F_2$$

for all sufficiently large N, M

Step 3 Use the following Thm:

Thm (Ivanov et. al.)

The natural hom $\mathrm{Mod}^*(S) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(S))$

is an isom.

$\to$ $\exists ! g \in \mathrm{Mod}^*(S)$ $\varphi(\alpha) = g\alpha$ $\forall \alpha \in V(S)$.

Conclusion : Let $f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ and $h \in G_1$

$\checkmark$ $\underbrace{h t_\alpha^n h^{-1}}_{\in G_1 \text{ for some } n \neq 0} = t^n_{h(\alpha)}$

for some $m \neq 0$

$$f(h t_\alpha^n h^{-1}) = f(t^n_{h(\alpha)}) = t^m_{\varphi(h(\alpha))}$$

$$\|$$

$$t^m_{gh\alpha}$$

$$f(h) f(t_\alpha^n) f(h)^{-1} = f(h)\, t^{m'}_{\varphi(\alpha)} f(h)^{-1}$$

$$= t^{m'}_{f(h) g\alpha}$$

$\Rightarrow$ $gh\alpha = f(h) g\alpha$ $\forall \alpha \in V(S)$

$\Rightarrow$ $gh = f(h) g$ s.t. $f(h) = ghg^{-1}$. $\square$

How to characterize D_α

We now use amenability in our characterization.

(different from Ivanov's one)

$$G(m) := \ker(\mathrm{Mod}(S) \curvearrowright H_1(S; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \quad m \geq 3$$

$< \mathrm{Mod}(S)$

finite index.

$G < G(m)$ finite index とする.

($G(m)$ である理由は後で説明).

① $N \lhd H < G$,

N infinite amenable, H non amenable

$\Longrightarrow$ H : reducible.

② $H < G$ maximal reducible subgroup

$N \lhd H$ infinite amenable

$\Longrightarrow$ $N < D_\alpha$ for some $\alpha \in V(S)$.

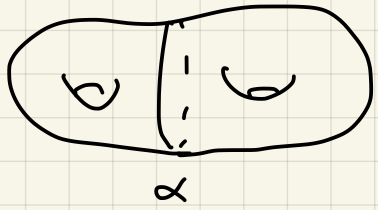
これで 代数的な条件が D_α を抽出できた!

逆に、 $D_\alpha \cap G \lhd \underbrace{\mathrm{Stab}_G(\alpha)}$ (実際には central)

↑

non-amenable.

maximal reducible.



recall: $g t_\alpha g^{-1} = t_{g\alpha}$ $\forall g \in \mathrm{Mod}(S)$.

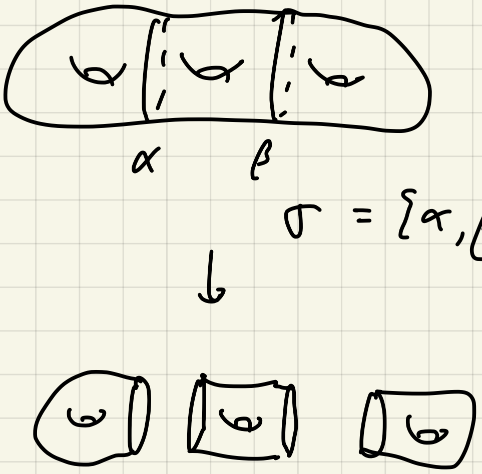
$G(m)$ について (技術的にかなり重要)

<u>Thm</u> (Ivanov) $G(m)$ の各元 g は pure, つまり

$\exists!\, \sigma \in \Sigma(S)$ s.t. (i) $g\alpha = \alpha$ $\forall \alpha \in V(S)$

(ii) g は S_σ の component の入れかえをしない

(iii) g は S_σ の各 comp Q 上で id. もしくは pseudo-Anosov ($\mathrm{Mod}(Q)$ の元として)



S_σ 切ったもの.

さらに: $g\tau = \tau$, $\tau \in \Sigma(S)$ ならば (i), (ii) が τ と S_τ について成り立つ.

∎

The canonical reduction system (CRS)

$H < G(m)$ reducible とする.

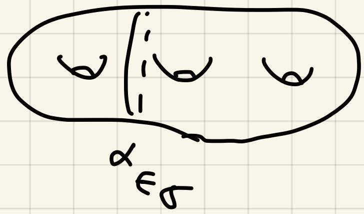
H の CRS とは 特別な H-fixed pt in $\Sigma(S)$ のこと.

Thm (Ivanov)

$\exists !\, \sigma \in \Sigma(S)$ s.t.　　これを $\sigma(H)$ と書く.

・ $h\alpha = \alpha \quad \forall h \in H \ \forall \alpha \in \sigma$

・ S_σ の各 comp Q に対し,



$\rho_Q : H \to \mathrm{Mod}(Q)$

natural homo. に関して.

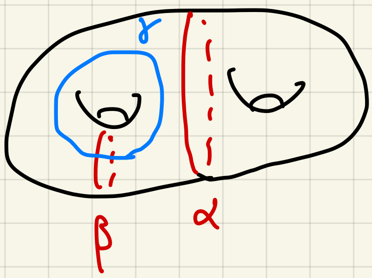
$\rho_Q(H)$ は trivial もしくは p.A. element を含む.

$\Downarrow$

irreducible

・ σ は上の2条件をみたす $\Sigma(S)$ の元で 極小のもの.

例1



$\sigma(\langle t_\alpha \rangle \cap G(m)) = \{\alpha\}$

$\sigma(\langle t_\beta, t_\gamma \rangle \cap G(m)) = \{\alpha\}$

☆ $N \triangleleft H < G(m)$, $\quad N$: reducible

$\Rightarrow$ H fixes $\sigma(N)$.

($\sigma(N)$ は N の 特別な fixed pt なので)

よって H : reducible

<u>Pf of ①</u> $\quad N \triangleleft H < G(m)$

N : infinite amenable , $\quad H$: nonamenable

N : amenable $\Rightarrow \exists\, \nu \in \mathrm{Prob}(\mathcal{PMF})$ N-fixed.

☆ $\mathcal{PMF} = \mathrm{MIN} \sqcup \mathrm{MIN}^c$

前に触れた．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MIN} & & \mathrm{MIN}^c \\ \downarrow \pi & & \downarrow \Phi \quad \mathrm{Mod}(S)\text{-equiv.} \\ \partial\mathcal{C} & & \Sigma(S). \end{array}$$

$\nu(\mathrm{MIN}^c) > 0$ ならば． $\quad \Phi_* \nu \in \mathrm{Prob}(\Sigma(S))$

N-fixed

$\Rightarrow$ $\exists$ N-fixed pt in $\Sigma(S)$.

i.e. N : reducible.

$\Rightarrow$ H : reducible.

☆

$\nu(\mathrm{MIN}) = 1$ なので. $\pi_*\nu \in \mathrm{Prob}(\partial\mathcal{C})$.
N-fixed.

$F_2 \curvearrowright \partial T$ に対するギロン (§5) にならって.

✓ $|\operatorname{supp} \pi_*\nu| \leq 2$

✓ $\mathrm{Mod}(S) \curvearrowright \partial\mathcal{C}$ amenable.

$\curvearrowright \partial_2\mathcal{C}$ ——— .

$\cup$

$b := \operatorname{supp} \pi_*\nu$. N-fixed pt.

✓ $\exists!$ "maximal" N-fixed pt in $\partial_2\mathcal{C}$.

↳ This is also H-fixed.

$\longrightarrow$ H : amenable. 矛盾. ▨

Pf of ② $H < G < G(m)$ finite index

H: maximal reducible,

$N \lhd H$ infinite amenable.

$\alpha \in \sigma(H)$ とする. $H < \mathrm{Stab}_G(\alpha)$

$\uparrow$

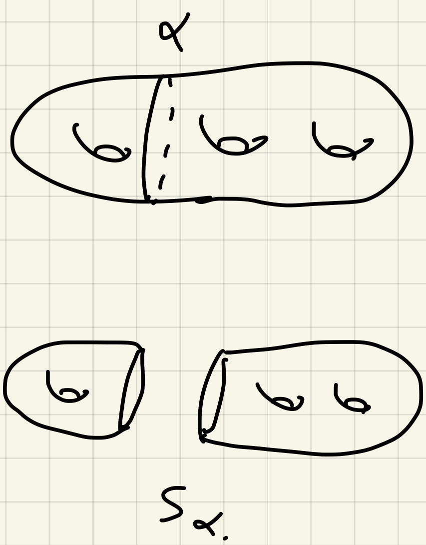
$G < G(m)$ より.

H : maximal より $H = \mathrm{Stab}_G(\alpha)$.

よって $\sigma(H) = \{\alpha\}$.

$\rho : H \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_\alpha)$

homo.



Fact $\ker \rho = D_\alpha \cap H$.

S_α の各 comp. Q に対し.

$\rho_Q : H \longrightarrow \mathrm{Mod}(Q)$ homo.

$\rho_Q(N) \lhd \rho_Q(H)$.

Ivanov の Thm より $\rho_Q(N)$ は trivial または
infinite amenable.

$H = \mathrm{Stab}_G(\alpha)$ より $\rho_Q(H)$ は nonamenable.

さらに $\kappa(Q) > 0$ ならば $\rho_Q(H)$ は p.A. element
を含む.

✓ $\rho_Q(N)$ は trivial である.

(そうでないとすれば $\underset{\infty\ \text{amenable}}{\rho_Q(N)} \triangleleft \underset{\text{nonamenable}}{\rho_Q(H)}$ と $\oplus$ より

$\rho_Q(H)$ reducible となり 矛盾)

よって $N < \bigcap_Q \ker \rho_Q = \ker \rho = D_\alpha \cap H.$ ∎

最後に Ivanov's argument の Step 1 について.

$G_1, G_2 < G(m)$ finite index

$f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ とする.

$\alpha \in V(S)$ に対して. $N_\alpha := D_\alpha \cap G_1$

$H_\alpha := \mathrm{Stab}_{G_1}(\alpha)$.

max. reducible.

Then $N_\alpha \lhd H_\alpha$

$$f(N_\alpha) \lhd f(H_\alpha)$$

∞ amenable nonamenable.

$\xrightarrow{①}$ $f(H_\alpha)$ reducible.

f^{-1} を使って. $f(H_\alpha)$ max. reducible もわかる.

② より $\exists \beta \in V(S)$ $f(N_\alpha) < D_\beta \cap G_2$.

また f^{-1} を考えれば $f(N_\alpha) = D_\beta \cap G_2$ が従う.

$\square$