§5. 自由群の保測作用の軌道同値関係.

$\mathbb{F}_2 \curvearrowright (X, \mu)$ free pmp

$\mathcal{R} := \mathcal{R}(\mathbb{F}_2 \curvearrowright X)$.

$\rho : \mathcal{R} \to \mathbb{F}_2 \qquad \rho(x, g^{-1}x) = g$

$\to \rho(x, y)\rho(y, z) = \rho(x, z)$ 積を保つ.

$\mathcal{R} \to \mathbb{F}_2 \curvearrowright T \cup \partial T$

<u>Prop</u> $\mathcal{S} < \mathcal{R}$ 至る所無限とする.

(つまり, 各同値類が無限)

次は同値:

(1) $\mathcal{S}$ amenable

(2) $\mathcal{S}$ has a fixed pt in $\mathrm{Prob}(\partial T)$.

これを使って後で次を示す:

<u>Thm</u> $\mathcal{R}(\mathbb{F}_2 \curvearrowright X) \not\simeq \mathcal{R}(\underline{\mathbb{Z} \times} \mathbb{F}_2 \curvearrowright Y)$ free pmp

他にも $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ など.

Banach 空間に値をもつ可測関数 (後に向けた準備)

E : separable Banach sp.

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ 測度空間. μ : σ-有限.

☆ 写像 $f : X \to E$ に対し, 次の同値:

(1) $f : (X, \mathcal{B}) \to (E, \sigma(\|\cdot\|))$ が可測

(2) $f : (X, \mathcal{B}) \to (E, \sigma(\text{weak}))$ が可測

(3) $\forall a \in E^*$, $x \mapsto \langle a, f(x) \rangle \in \mathbb{C}$ が可測.

このとき, f を可測という.

$$L^1(X, \mu, E) := \left\{ f : X \to E \text{ 可測} \;\middle|\; \underbrace{\int_X \|f(x)\| \, d\mu(x)}_{\|f\|} < \infty \right\}$$

Banach sp. になる.

$\varphi : X \to E^*$ 汎弱可測 (E^* が可分とは限らない)

$\overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ $\forall e \in E$ $x \mapsto \langle \varphi(x), e \rangle \in \mathbb{C}$ 可測.

☆ このとき, $x \mapsto \|\varphi(x)\|$ が可測. ($e_n \in E$ dense をとる.)

$$L^\infty(X,\mu,E^*) := \Big\{ \varphi : X \to E^* \text{ 약가측 함수} \;\Big|\; \underbrace{\operatorname*{ess.sup}_{x\in X} \|\varphi(x)\|}_{=\ \|\varphi\|} < \infty \Big\}$$

Banach sp. 이 된다.

Thm $\Lambda : L^\infty(X,\mu,E^*) \xrightarrow{\sim} L^1(X,\mu,E)^*$

$\varphi \in L^\infty(X,\mu,E^*)$, $f \in L^1(X,\mu,E)$

$$\langle \Lambda(\varphi), f \rangle := \int_X \langle \varphi(x), f(x) \rangle \, d\mu(x).$$

※ $A \subset E^*_1$ weak* closed, convex

$$L^\infty(X,A) := \{ \varphi \in L^\infty(X,E^*) \mid \varphi(x) \in A \ \text{a.e. } x \}$$

↳ 이는 weak* closed, convex.

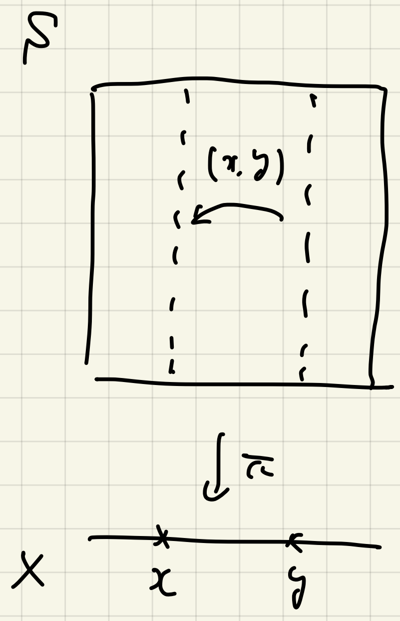
in $L^\infty(X,E^*)_1$.

同値関係の作用

R on X.

$\pi: S \to X$ bundle

$S_x := \pi^{-1}(x)$



$R \curvearrowright S$ とは.

各 $(x,y) \in R$ に対し.

$$(x,y): S_y \to S_x$$

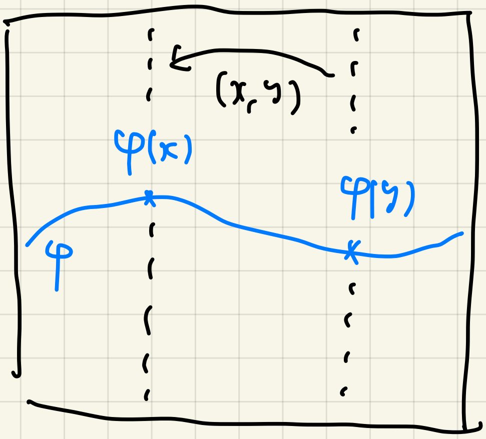
が定まっていて. $(x,x): S_x \to S_x$ は id. で

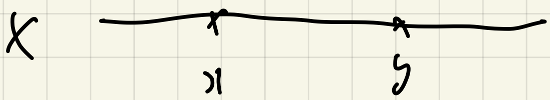
$$(x,y) \circ (y,z): S_z \to S_y \to S_x$$
$$\parallel$$
$$(x,z): S_z \to S_x$$

となるもの.

$$\to \quad (x,y)^{-1} = (y,x): S_x \xrightarrow{\sim} S_y$$

$$\mathrm{Fix}(R \curvearrowright S) := \left\{ \varphi: X \to S \text{ section of } \pi \;\middle|\; (x,y)\varphi(y) = \varphi(x) \;\; \forall (x,y) \in R \right\}$$





$$[R] := \{T \in \mathrm{Aut}(X) \mid (Tx, x) \in R \ \forall x \in X\}$$

the full group of R.

$$\begin{array}{ccc}[R] & \curvearrowright & \{\text{section } X \to S\}\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ T & & \varphi\end{array}$$

$$(T\varphi)(x) = (x, T^{-1}x)\,\varphi(T^{-1}x) \in S_x$$

Section $\varphi : X \to S$ $1 = \{\exists 1$.

$\varphi \in \mathrm{Fix}(R \curvearrowright S) \iff \varphi$ is $[R] \curvearrowright \{\text{sections } X \to S\}$ a fixed pt.

Prop の証明

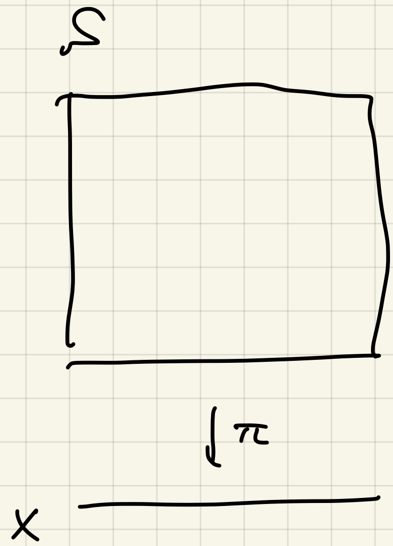
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(F_2 \curvearrowright (X,\mu)), \quad \mathcal{S} < \mathcal{R}.$$

free pmp

$$\rho : \mathcal{R} \to F_2 \qquad (x, g^{-1}x) \mapsto g.$$

$\curvearrowright T.$

$$\mathcal{R} \curvearrowright X \times \mathrm{Prob}(\partial T) =: S$$
$$\downarrow \quad \text{bundle.}$$
$$X$$



$\mathrm{Fix}(\mathcal{S} \curvearrowright S)$

$$= \{\varphi : X \to \mathrm{Prob}(\partial T) \mid \rho(x,y)\varphi(y) = \varphi(x) \ \forall (x,y) \in \mathcal{S}\}$$

$= \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ とおく.

$\mathcal{R} := \mathcal{R}(F_2 \curvearrowright X)$

(I) $\mathcal{S} < \mathcal{R}$ amenable とする.

(ξ_n) : $\mathcal{S}$ のライター列とする.

$$\left(\xi_n(x,\cdot) \in \mathrm{Prob}(\mathcal{R}^x), \quad \begin{array}{c} \| T\xi_n - \xi_n \|_1 \to 0. \\ \forall T \in [\mathcal{R}] \end{array} \right)$$

$\nu_0 \in \mathrm{Prob}(\partial T)$ とする.

$$\varphi_n(x) := \sum_{y \in [x]_{\mathcal{R}}} \xi_n(x,y)\,\rho(x,y)\,\nu_0 \in \mathrm{Prob}(\partial T).$$

$x \in X$

$S \in [\mathcal{S}]$ に対して.

$$\varphi_n(S^{-1}x) = \sum_{y \in [x]_{\mathcal{R}}} \xi_n(S^{-1}x, y)\,\rho(Sx, y)\,\nu_0$$

$$= \rho(S^{-1}x, x) \sum_{y \in [x]_{\mathcal{R}}} \xi_n(S^{-1}x, y)\,\rho(x,y)\,\nu_0$$

$$\| \rho(x, S^{-1}x)\,\varphi_n(S^{-1}x) - \varphi_n(x) \|$$

$$\le \sum_{y \in [x]_{\mathcal{R}}} \Big| \underbrace{\xi_n(S^{-1}x, y)}_{= (S\xi_n)(x,y)} - \xi_n(x,y) \Big|$$

$x \in X$ で積分して

$$\int_X \| \rho(x, S^{-1}x)\varphi_n(S^{-1}x) - \varphi_n(x) \| \, d\mu(x)$$

$$\leq \| S\xi_n - \xi_n \|_{L^1(R, \mu^1)} \to 0 \quad (*)$$

$$\varphi_n \in L^\infty(X, \mathrm{Prob}(\partial T)) \subset L^\infty(X, C(\partial T)^*)_1$$

weak* closed　　$\|$

convex　　$L^1(X, C(\partial T))^*$

$\exists \varphi \in L^\infty(X, \mathrm{Prob}(\partial T))$ weak* cluster pt of (φ_n)

$$(*) \Rightarrow \rho(x, S^{-1}x)\varphi(S^{-1}x) = \varphi(x) \quad \text{a.e } x \in X$$

$\Uparrow$

少しギロンが要る．

よって $\varphi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$

<u>Prop1</u> (今示した) $\mathcal{S}$: amenable $\Rightarrow \mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \neq \phi$.

(II) $\mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする

Lem $\mathcal{S}$ は至る所無限とし. $\varphi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ とする.

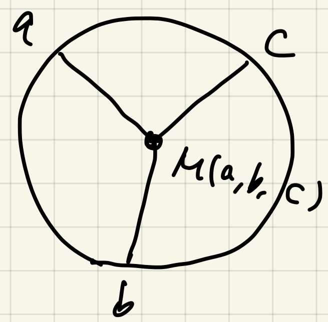
$$\varphi : X \to \mathrm{Prob}(\partial T)$$

このとき. $|\mathrm{supp}\, \varphi(x)| \leq 2$ a.e. $x \in X$.

Pf $\delta T := \{(a,b,c) \in (\partial T)^3 \mid a \neq b \neq c \neq a\}$

$\downarrow \Delta$: 重心写像.

$V(T)$



$\Delta_* : \mathrm{Prob}(\delta T) \to \mathrm{Prob}(V(T))$

φ $\xrightarrow{}$ $\downarrow M$: 最大化されてる点を集める.

F_2-equiv. $V_f(T) := \{F \subset V(T) \mid F \neq \phi \text{ finite}\}$

もし $\exists A \subset X$ pos. meas. $|\mathrm{supp}\, \varphi(x)| \geq 3$ $\forall x \in A$ ならば

✓ $\underbrace{(\varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x))|_{\delta T}}$ $\neq 0$. $\forall x \in A$

$\psi(x) :=$ これの正規化 $\in \mathrm{Prob}(\delta T)$.

$\eta(x) := M \Delta_* \psi(x) \in V_f(T)$.

$(x,y) \in \mathcal{S}|_A$ に対し. $\rho(x,y)\eta(y) = M\Delta_* \rho(x,y)\psi(y)$

$= M\Delta_* \psi(x) = \eta(x)$.

ところで: $F_2 \curvearrowright V_f(T)$ is free.

$\eta : A \to V_f(T)$.

$\exists \sigma \in V_f(T)$ $\quad \eta^{-1}(\sigma)$ pos. meas.

$\forall (x, y) \in \mathcal{S}|_{\eta^{-1}(\sigma)}$ $\quad \rho(x, y)\sigma = \sigma$.

よって $\rho(x, y) = e \to x = y$.

よって $\mathcal{S}|_{\eta^{-1}(\sigma)}$ は自明な同値関係になる。

これは $\mathcal{S}$ が至るところ無限なので起こり得ない。

$\Big($ $B := \eta^{-1}(\sigma)$, $\quad C := [B]_{\mathcal{S}} \left(= \left\{ y \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x \in B \\ (x, y) \in \mathcal{S} \end{array} \right\} \right)$

例えばもし $\mathcal{S} = R(H \curvearrowright X)$ for some infinite $H < F_2$ ならば:

$$C = HB = \bigsqcup_{h \in H} hB \to \mu(C) = \sum_{h \in H} \mu(hB) = \infty \text{ 矛盾.}$$

$\mathcal{S}|_B$ は自明なので。 $\Big)$

(Lem) ▨

cf. ポアンカレ再帰性.

$T \curvearrowright (X, \mu)$ p.m.p. $\quad A \subset X$ pos. meas.

Then for a.e. $x \in A$, $\exists$ infinitely many $n \in \mathbb{N}$ s.t. $T^n x \in A$. ┘

Rem Lem 8.7 $\varphi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ は $\bar{\varphi} : X \to \partial_2 T$
$x \mapsto \mathrm{supp}\,\varphi(x)$
を誘導する.

Prop 2 $\mathcal{S} < \mathcal{R}$ をとってこう 無限

$\mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \neq \phi \Rightarrow \mathcal{S}$: amenable.

F₂ ↷ ∂₂T の従順性といかに似うか.

Pf $\exists \varphi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ $\varphi : X \to \partial_2 T$

✓ $F_2 \curvearrowright X \times F_2$ $\quad g(x, t_1) = (gx, t_1 g^{-1})$

✓ $X \times F_2$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める:

$$(x, t_1) \sim (y, \rho(y, x) t_1), \quad (x, y) \in \mathcal{S}$$

✓ $\pi : X \times F_2 \to \partial_2 T$ $\quad$: F_2-equiv.
$(x, t_1) \mapsto t_1^{-1} \varphi(x)$

✓ π は $\sim$-inv.

$$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \pi(x, t_1) = \pi(y, \rho(y, x) t_1) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{S} \\ \varphi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \text{ による} \end{array} \right)$$

$$\pi \longrightarrow \quad F_2 \curvearrowright X \times F_2 / \sim \; =: Z$$

$$\downarrow \bar{\pi} : F_2\text{-equiv.}$$

$$F_2 \curvearrowright \partial_2 T$$

✓ $F_2 \curvearrowright Z$ amenable.

($F_2 \curvearrowright \partial_2 T$: amenable と 前の§の最後のLemによる)

✓ $\mathcal{R}(F_2 \curvearrowright Z)\big|_{X \times \{e\}} \simeq \mathcal{S}$.

($X \times \{e\} \subset Z$ とみなす。

$g(x, e) = (x, g^{-1}) \sim (gx, e)$

iff $(gx, x) \in \mathcal{S}$)

よって $F_2 \curvearrowright Z$ のライター列を作って

$\mathcal{R}(F_2 \curvearrowright Z)\big|_{X \times \{e\}}$ のライター列を作ればよい。

略. $\blacksquare$

演 $H < G$ 群 のとき. G のライター列から H のライター列を作ってみよ.

(III) もう少し Fix($\mathcal{S}$) について

$\mathcal{R} = \mathcal{R}(F_2 \curvearrowright X) \curvearrowright T \cup \partial T.$

free pmp.

$\mathcal{S} < \mathcal{R}$ 至るところ無限.

Prop 3 $\mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \neq \phi$ ($\Leftrightarrow \mathcal{S}$: amenable) ならば.

$\exists ! \varphi_0 \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$

$: X \to \partial_2 T \ (\subset \mathrm{Prob}(\partial T))$

naturally

s.t. $\forall \varphi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$

$\mathrm{supp}\, \varphi(x) \subset \mathrm{supp}\, \varphi_0(x) \quad$ a.e. $x \in X$

This φ_0 is called maximal.

Obs. $\varphi, \psi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \Rightarrow \dfrac{\varphi + \psi}{2} \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$

さらに $\mathrm{supp}\, \dfrac{\varphi+\psi}{2}(x) = \mathrm{supp}\, \varphi(x) \cup \mathrm{supp}\, \psi(x)$

$\varphi_1 \prec \varphi_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{supp}\, \varphi_1(x) \subset \mathrm{supp}\, \varphi_2(x)$ a.e. x

とすると. $\varphi, \psi \prec \dfrac{\varphi+\psi}{2}$.

あとは Zorn を使って maximal element を見つける.

Pf of Prop 3 $\quad \Phi \subset \mathrm{Fix}(\delta)$ totally ordered set

$$M := \sup_{\varphi \in \Phi} \mu\big(\underbrace{\{x \in X \mid |\mathrm{supp}\,\varphi(x)| = 2\}}_{=: D_\varphi}\big)$$

$\exists\, (\varphi_n) \subset \Phi$ increasing $\quad \mu(D_{\varphi_n}) \nearrow M.$

$\varphi_n < \varphi_{n+1} \implies D_{\varphi_n} \subset D_{\varphi_{n+1}}$

Define $\varphi : X \to \partial_2 T$ by

$$\varphi(x) = \overline{\varphi_n}(x) \quad \text{if } x \in \bigcup_n D_{\varphi_n}$$

$$= \overline{\varphi_1}(x) \quad \text{if } x \in X \setminus \bigcup_n D_{\varphi_n}$$

$$(= \overline{\varphi_n}(x) \ \ \forall n)$$

Then $\varphi \in \mathrm{Fix}(\delta) \quad \varphi_n < \varphi \quad \forall n.$

Zorn is then applied. $\quad \blacksquare$

(IV) 応用

Thm $F_2 \curvearrowright (X,\mu)$, $G \curvearrowright (Y,\nu)$ free pmp.

$N \lhd H < G$

N : infinite amenable, H : nonamenable

Then $R(F_2 \curvearrowright X) \not\cong R(G \curvearrowright Y)$.

Gの例 $\mathbb{Z}\times F_2$, $F_2 \times F_2$, $SL_2\mathbb{Z}\ltimes\mathbb{Z}^2$ etc.

$$\left\{ \begin{pmatrix} \overset{SL_2\mathbb{Z}}{\boxed{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}} & \overset{\mathbb{Z}^2}{\boxed{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \in SL_3\mathbb{Z} \right\}$$

Pf of Thm $F_2 \curvearrowright X$, $G \curvearrowright X$,

$R(F_2 \curvearrowright X) = R(G \curvearrowright X)$ として矛盾を出す.

$$\begin{aligned} &\cup \\ &R(H \curvearrowright X) =: \mathcal{H} \\ &\cup \\ &R(N \curvearrowright X) =: \mathcal{S} \end{aligned}$$

: 至るところ無限 amenable.

$\exists!\ \varphi_0 \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$

$: X \to \partial_2 T$ maximal.

☆ $\varphi_0 \in \mathrm{Fix}(\mathcal{H})$.

$$\rho : \mathcal{R}(F_2 \curvearrowright X) \to F_2$$
$$(x, g^{-1}x) \mapsto g$$

<u>pf</u> $h \in H$ とする.

$\psi : X \to \partial_2 T$ を次で定める:

$$\psi(x) := h^{-1}\varphi_0(hx) \left(= \rho(x, hx)\varphi_0(hx)\right)$$

$\psi(x) = \varphi_0(x)$ を示せばよい.

✓ $\psi \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})$ を示す.

$$hnh^{-1} =: m \in N$$

$n \in N$ に対し.

$$\psi(nx) = h^{-1}\varphi_0(hnx) = h^{-1}\varphi_0(mhx)$$

$$\underset{\varphi_0 \in \mathrm{Fix}(\mathcal{S})}{=} h^{-1}\underbrace{\rho(hx, mhx)}_{= m^{-1}}\varphi_0(hx)$$

$$= n h^{-1}\varphi_0(hx) = n\psi(x) \quad \text{ok.}$$

φ_0 の maximality より

$$\underset{= h^{-1}\varphi_0(hx)}{\psi(x)} \subset \varphi_0(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

h を h^{-1} にすると $h\varphi_0(h^{-1}x) \subset \varphi_0(x)$.

x を hx にすると $h\varphi_0(x) \subset \varphi_0(hx)$ a.e. $x \in X$

$$\varphi_0(x) \subset \gamma_1^{-1}\varphi_0(\gamma_1 x) = \psi(x).$$

よって $\psi(x) = \varphi_0(x)$ a.e. $x \in X$. $\blacksquare$

Prop 2 より $\mathcal{H} = \mathcal{R}(H \curvearrowright X)$ amenable.

これは H : nonamenable に矛盾. $\blacksquare$

Ref: S. Adams, Indecomposability of equivalence relations generated by word hyperbolic groups, Topology, 1994.