§4 自由群とその境界

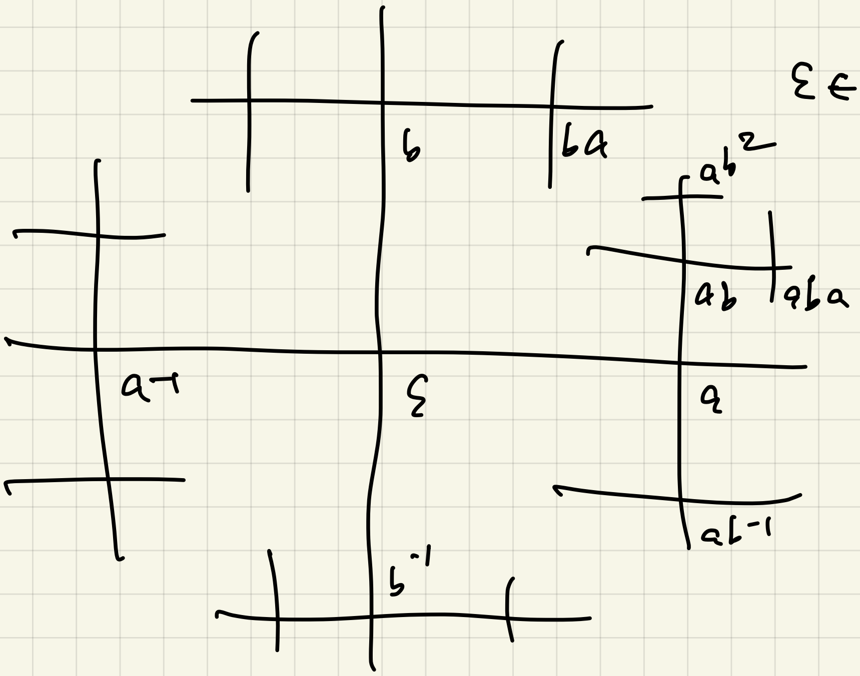
$F_2 = \langle a, b \rangle$ 　 $A := \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ 上の既約語がなす群.

a と a^{-1}
b と b^{-1} が隣り合わない.

∂T 　 T tree

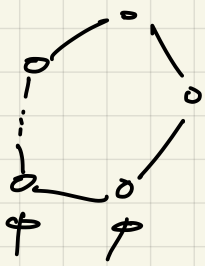
$V(T) := F_2$

$E(T) := \{ \{g, gs\} \mid g \in F_2,\ s \in A \}$



$e \in F_2$ 単位元.

これは tree. (つまり $\nexists$ circuit

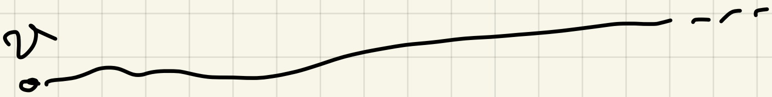


$\neq$ 　 $\neq$
すべて異なる.)

$F_2 \curvearrowright V(T)$ 左かけ算. $\to$ $F_2 \curvearrowright T$ 作用をもつ.

Tの道 = Tのpath $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ で
v_0 と v_n を結ぶ最短のもの
$\left(\Leftrightarrow \ v_i \neq v_j \ \ {}^{\forall} i \neq j \right)$

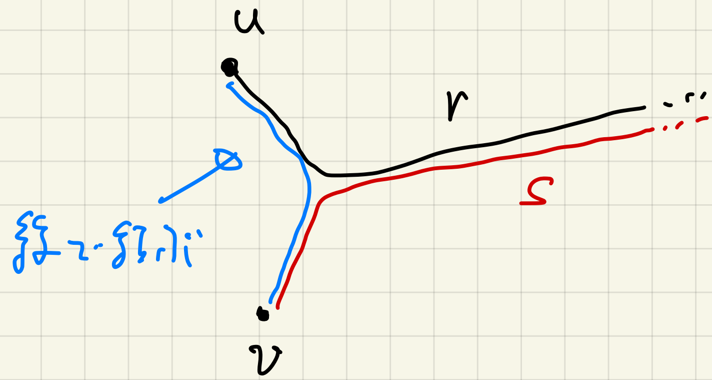
Tの射 = $\{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ path で ${}^{\forall} n$ $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ が道
であるもの



$\mathrm{Ray}_v :=$ v を始点とする射全体.

☆ $u, v \in V(T)$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ray}_u & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Ray}_v \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ r & & s \end{array}$$



このとき $r \sim s$ とかく.
r と s は同値であるという.

$\mathrm{Ray} := \bigsqcup_{v \in V(T)} \mathrm{Ray}_v$, $\partial T := \mathrm{Ray}/\sim$

Tの境界.

∂T の位相

$\vec{E}(T)$:= 向き付きの辺の集合

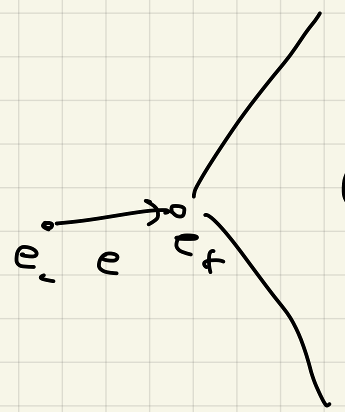
$= \{ (u,v) \mid \{u,v\} \in E(T) \}$

$e \in \vec{E}(T)$ $\quad e_- \xrightarrow{e} e_+ \quad$ $e = (e_-, e_+)$ とおく.

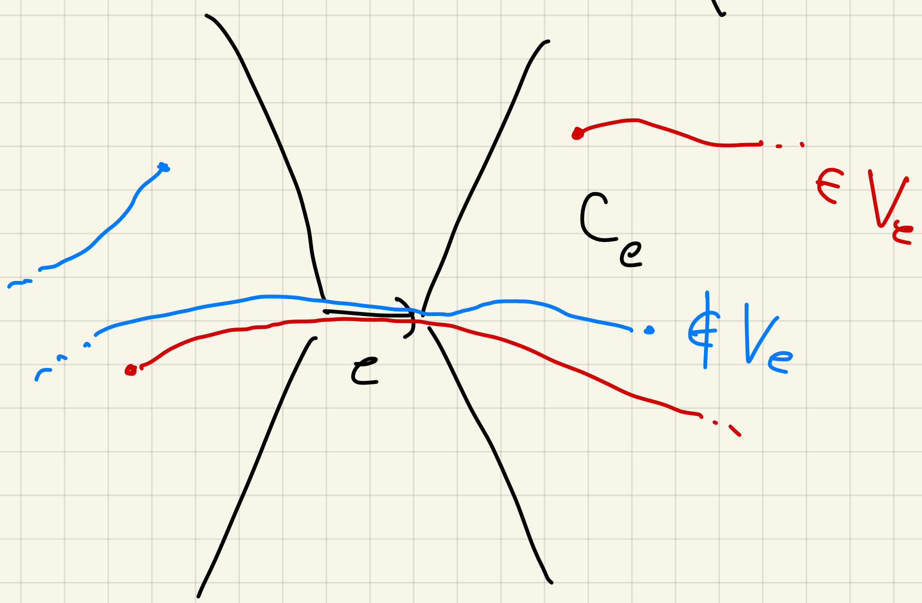
$V_e := \{ T$ の射線で最終的に C_e に属するもの $\} / \sim$

$\cap$

∂T



C_e : e_+ からの path で e_- を通らずにたどり着ける頂点たち.



∂T に V_e $(e \in \vec{E}(T))$ で生成される位相を入れる.

☆ $\partial T \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Ray}_{\varepsilon} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{A$上の無限既約語$\}$

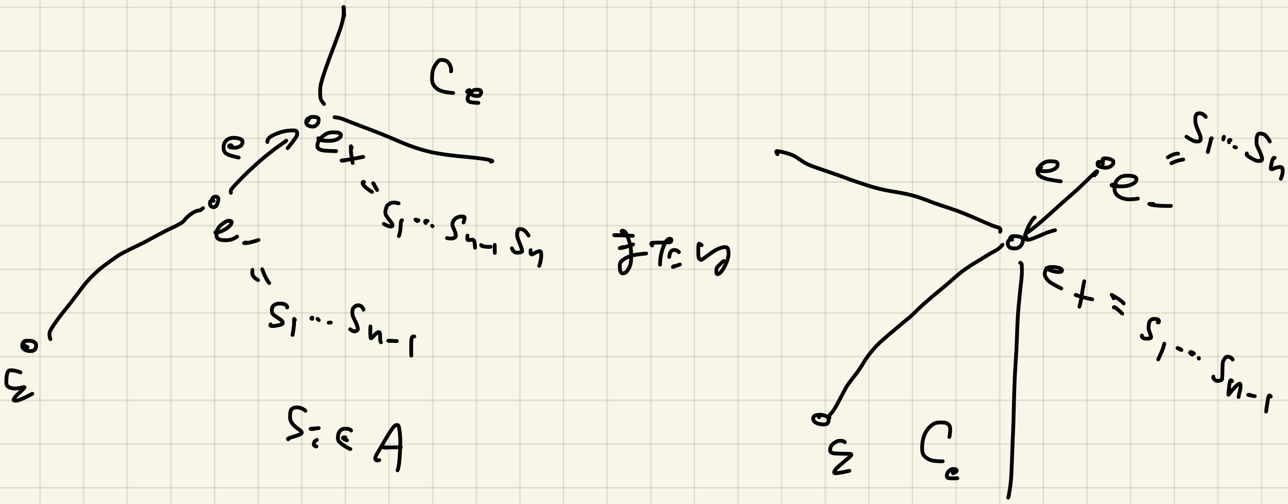
$aabbabba^{-1}a^{-1}b^{-1}\cdots$

$\cap$

閉集合 とみなす.　$A^{\mathbb{N}}$　直積位相 入れる.

☆ この位相は $\{V_e \mid e \in \vec{E}(T)\}$ による位相と等しい.

<u>pf</u>　ε から $e=(e_-, e_+)$ に向かって線で結ぶ.



$$V_e = \{t_1 t_2 \cdots \mid (t_1, \cdots, t_n) = (s_1, \cdots, s_n)\}$$

無限既約語

$$V_e = \{t_1 t_2 \cdots \mid (t_1, \cdots, t_n) \neq (s_1, \cdots, s_n)\}$$

▨

✪ $F_2 \curvearrowright T \to F_2 \curvearrowright \mathrm{Ray}$

$F_2 \curvearrowright \partial T$ by homeo.

<u>Pf</u> $g \in F_2$, $e \in \vec{E}(T)$ に対し. $gV_e = V_{ge}$ ☒

✪ $F_2 \curvearrowright \partial T = \{A$ 上の無限既約語$\}$

$$\begin{array}{ccc} F_2 & & \partial T \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & & t = t_1 t_2 \cdots \\ \parallel & & \\ s_1 \cdots s_n & & \end{array}$$

gt は $s_1 \cdots s_n t_1 t_2 \cdots$ を既約になるまでキャンセルして得られる無限既約語である.

<u>e.g.</u> $g = aba^2$, $t = a^{-2}b^{-1}a^3b^2\cdots \to gt = a^4b^2\cdots$

<u>Pf</u> $g \in A$ のときを考えればよい. (?) ☒

The sink-source dynamics （証明しない）

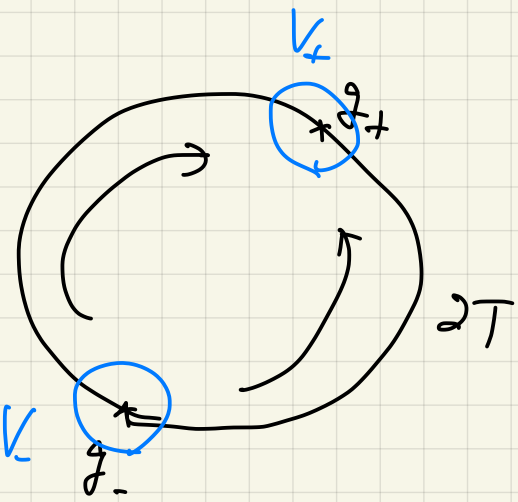
Thm $\forall g \in F_2 \setminus \{\varepsilon\}$ $\exists g_\pm \in \partial T$

s.t. (i) g fixes both g_+ and g_-.

(ii) $\forall V_\pm$: $g_\pm$ の nbh. $\exists N \in \mathbb{N}$ 十分大

$$\forall n \geq N \quad g^n(\partial T \setminus V_-) \subset V_+$$

$$g^{-n}(\partial T \setminus V_+) \subset V_-$$



$g = s_1 \cdots s_n$ A上の既約語.

$k \in \mathbb{N}$ で

$\forall i \leq k \quad s_i = s_{n-i+1}^{-1}$

となるもので最大のものをとる.

$$g = s_1 \cdots s_k \underbrace{(s_{k+1} \cdots s_{n-k})}_{\shortparallel\ h} s_k^{-1} \cdots s_1^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} g_+ &:= s_1 \cdots s_k\, h h h \cdots \\ g_- &:= s_1 \cdots s_k\, h^{-1} h^{-1} h^{-1} \cdots \end{aligned}\right\} \in \partial T.$$

$\square$

Prop $H < F_2$, $H \neq \{e\}$. 次は同値:

(1) H amenable.

(2) H has a fixed pt in $\mathrm{Prob}(\partial T)$.

$\uparrow$

∂T 上の確率測度全体.

$\subset C(\partial T)^*_1$.

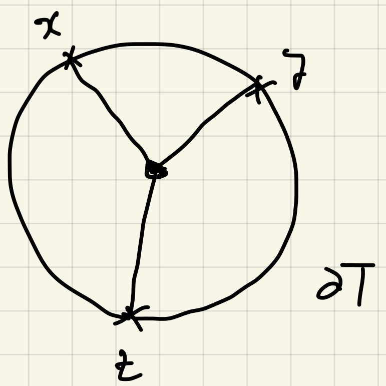
後で、これの同値関係 ver. を示したい.

Rem Prop の条件がおいてって?

$\nu \in \mathrm{Prob}(\partial T)$ H-fixed.

$\Rightarrow$ $|\mathrm{supp}\,\nu| \leq 2$.

Pf



$\partial T^{(3)} := \{(x,y,z) \in (\partial T)^3 \mid x \neq y \neq z \neq x\}$

$\downarrow \mu$: F_2-equiv.

$V(T)$ 重心.

$|\mathrm{supp}\,\nu| \geq 3$ ならば. $\nu(\partial T^{(3)}) \neq 0$.

$\mu_* \nu$ on $V(T)$: H-inv.

$|H| = \infty$ なので. ありえない. ∎

(1) ⇒ (2) 従順性の一般論により.

Prop G : amenable. & E : Banach sp.

isometric linear auto

$A \subset E^*_1$ weak* closed, convex, G-inv.

Then $\exists a \in A$ G-fixed pt.

Pf $\exists (\xi_n)$ フィルナー列 of G.

(i.e. $\xi_n \in \mathrm{Prob}(G)$ $\forall g \in G$ $\|g\xi_n - \xi_n\|_1 \to 0$)

$a_0 \in A$ をとる. $a_n := \sum_{g \in G} \xi_n(g)\, g a_0 \in A$

A : convex より

(ξ_n : finite supported としてよい)

$a \in A$: weak* cluster pt of (a_n).

G-fixed. because

$$\|h a_n - a_n\| = \Big\|\sum_{g \in G} \xi_n(g)(hg a_0 - g a_0)\Big\|$$

$h \in G$

$$= \Big\|\sum_{g \in G} \big(\xi_n(h^{-1}g) - \xi_n(g)\big) g a_0\Big\|$$

$$\leq \sum_{g \in G} \|\xi_n(h^{-1}g) - \xi_n(g)\|$$

$$= \|\tau_h \xi_n - \xi_n\|_1 \longrightarrow 0. \qquad \blacksquare$$

今. $H < F_2 \curvearrowright C(\partial T)$

$\curvearrowright C(\partial T)^* \supset \mathrm{Prob}(\partial T)$

weak* closed, convex

F_2-inv.

H: amenable ならば. $\exists \nu \in \mathrm{Prob}(\partial T)$ H-fixed.

(1) $\Rightarrow$ (2) ok. $\lrcorner$

(2) $\Rightarrow$ (1) は後でコメントする.

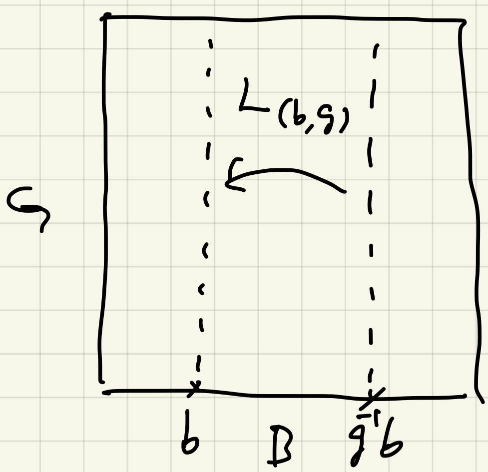
従順作用

目標 $F_2 \curvearrowright \partial T$ が従順である.

一般に $G \curvearrowright B$ に対し, $B \times G$ に積が定まる:

$$(b, g)(g^{-1}b, h) = (b, gh)$$

$$\begin{tikzcd} b & g^{-1}b \arrow[l, "g"'] & h^{-1}g^{-1}b \arrow[l, "h"'] \arrow[ll, bend right, "gh"'] \end{tikzcd}$$



Def $G \curvearrowright \underbrace{B}_{\text{可測空間}}$ が従順.

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ $\exists\, \eta^n : B \to \mathrm{Prob}(G)$

s.t. $\forall g \in G$ $\quad \| g\eta^n_{g^{-1}b} - \eta^n_b \|_1 \to 0$

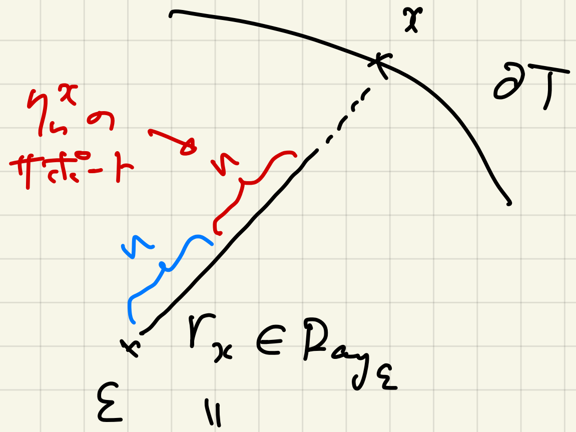
uniformly for $b \in B$.

例1 $G \curvearrowright \{一点\}$ 従順 $\Longleftrightarrow$ G : 従順.

(フェルナー列による)

Thm $F_2 \curvearrowright \partial T$ は従順.

証 Fix $x \in \partial T$.



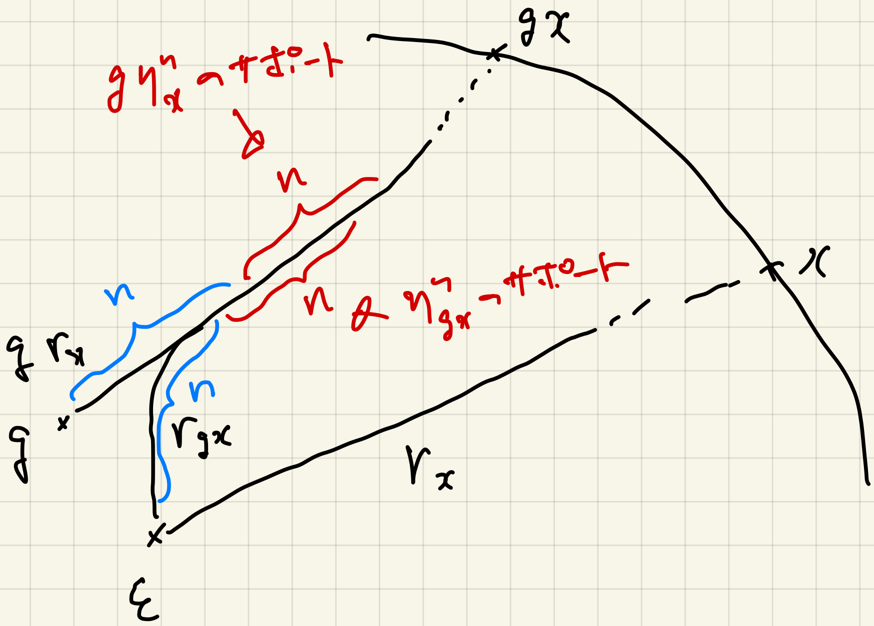
$r_x \in \mathrm{Ray}_\varepsilon$
$\quad\ \ \|$
$(r_x(n))_{n=0}^{\infty}$

$n \in \mathbb{N}$ に対し、

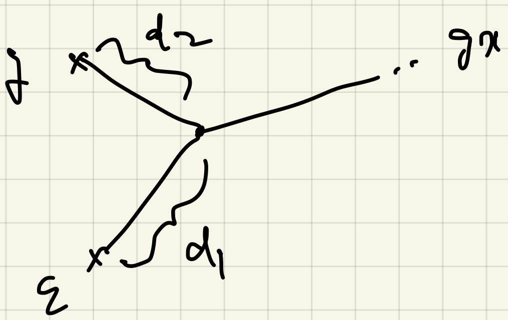
$$\eta_x^n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{r_x(n+k)}$$

$\in$ $\mathrm{Prob}(F_2)$

$g \in F_2$ に対し $\|g\eta_x^n - \eta_{gx}^n\|_1 \to 0$ を示す.



$$\|g\eta_x^n - \eta_{gx}^n\|_1 = \frac{2|d_1 - d_2|}{n}$$



$$\leq \frac{d(\varepsilon, g)}{n} \to 0$$

x に関して一様

∎

Cor $\partial_2 T := (\partial T \times \partial T)/\sim$

$F_2 \curvearrowright$ $\qquad\qquad (x,y) \sim (y,x).$

$g(x,y) = (gx, gy)$

この作用も従順.

Pf η^n for $F_2 \curvearrowright \partial T$.

$\xi^n : \partial_2 T \to \mathrm{Prob}(F_2)$

$$\xi^n_{[x,y]} := \frac{1}{2}\left(\eta^n_x + \eta^n_y\right).$$

前のPropの(2) ⇒ (1) について

$H < F_2$, $H \neq \{e\}$.

(2) H has a fixed pt $\underset{\nu}{}$ in $\mathrm{Prob}(\partial T)$.

Then $|\mathrm{supp}\,\nu| \leq 2$. (by Rem)

$b := \mathrm{supp}\,\nu \in \partial_2 T$ H-fixed.

$$\forall g \in H \quad \| g\xi^n_b - \xi^n_{\underset{=b}{\underbrace{gb}}} \|_1 \longrightarrow 0$$

よって $(\xi^n_b)_n$ は H のライター列となり, H も従順. ∎

<u>Lem</u> (後で使う)

一般に $G \curvearrowright E$, $\pi : E \to B$ G-equiv.
$\quad \curvearrowright B$ とする.

$G \curvearrowright B$: amenable $\Rightarrow$ $G \curvearrowright E$ amenable.

<u>Pf</u> $\eta^n : B \to \mathrm{Prob}(G)$ for $G \curvearrowright B$ に対し.

$\xi^n : E \to \mathrm{Prob}(G)$ を $\xi^n_x := \eta^n_{\pi(x)}$ で ok. $\boxtimes$