§3. 保測同値関係とその定明性.

X 集合 $\neq \phi$

X 上の同値関係とは. $R \subset X \times X$

s.t. ・$\forall x \in X \quad (x, x) \in R$

・$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

・$(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

のこと.

$x \in X$ に対し. $[x]_R :=$ x の同値類

$= \{ y \in X \mid (x, y) \in R \}$

例 $G \curvearrowright X$ 作用.

$\to R(G \curvearrowright X) := \{ (x, gx) \mid x \in X, g \in G \}$

軌道同値関係.

R on X, S on Y に対し.

$R \simeq S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f : X \xrightarrow{\sim} Y$

同型

s.t. $f([x]_R) = [f(x)]_S$

$\forall x \in X$.

Recall $G \curvearrowright X \underset{OE}{\sim} H \curvearrowright Y$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f : X \xrightarrow{\sim} Y \quad f(Gx) = Hf(x) \quad \forall x \in X.$

☆ $G \curvearrowright X \underset{OE}{\sim} H \curvearrowright Y \Longleftrightarrow \mathcal{R}(G \curvearrowright X) \simeq \mathcal{R}(H \curvearrowright Y).$

同値関係の従順性をどう定義する?

$\mathcal{R}$ on X.

積 $(x,y)(y,z) = (x,z)$.

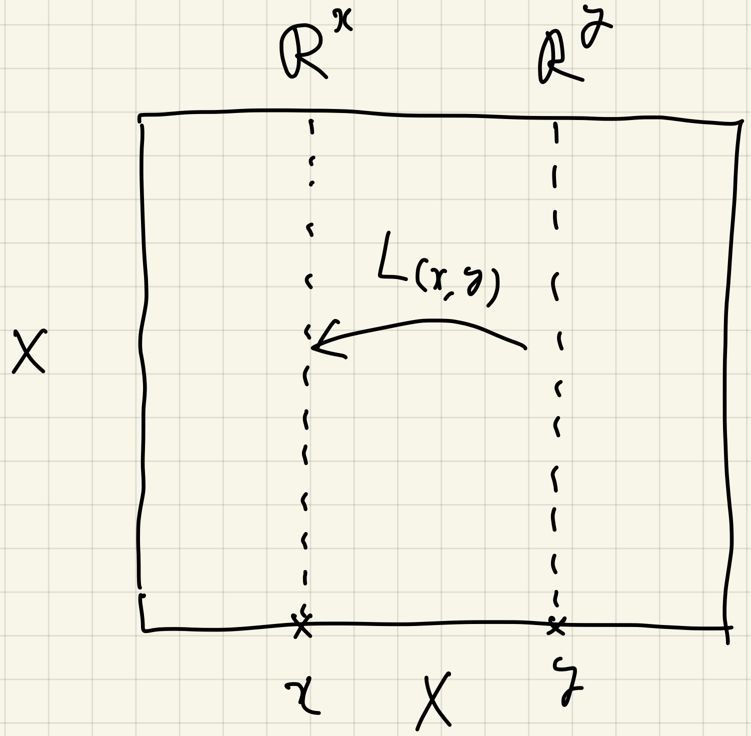
$\left(\text{Recall} \quad G : \text{従順} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \text{左不変ミーン on } G \right)$

$$\underset{x \in X}{\mathcal{R}^x} := \{ (x,y) \mid y \in [x]_{\mathcal{R}} \} \subset \mathcal{R}$$

$(x,y) \in \mathcal{R}$ に対し,

$L_{(x,y)} : \mathcal{R}^y \to \mathcal{R}^x$: (x,y) による"左かけ算"

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^y & \to & \mathcal{R}^x \\ \cup & & \cup \\ (y,z) & \mapsto & (x,z) = (x,y)(y,z) \end{array}$$



<u>Def</u> $\mathcal{R}$ 上の左不変なミーンの族 $(m_x)_{x\in X}$ とは.

・ m_x : ミーン on $\mathcal{R}^x$

$\quad$: $\ell^\infty(\mathcal{R}^x) \to \mathbb{C}$

・ $\forall (x,y)\in\mathcal{R}$ $\quad \underbrace{[L_{(x,y)}]_* m_y}_{\varphi} = m_x$.

$A\subset \mathcal{R}^x$ に対し.

$$\left([L_{(x,y)}]_* m_y\right)(A) := m_y\left(L_{(x,y)}^{-1}(A)\right).$$

をみたすものをいう.

X : 可測空間. $\mathcal{R}$ もしかるべき可測性をもつとする.

$\left(\underline{\text{e.g.}} \quad \underset{\text{可測}}{G \curvearrowright X} \to \mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X) \right)$

Def $\mathcal{R}$ 上のミーンの族 $(m_x)_{x \in X}$ が可測

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \xi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ bdd, meas.

$x \mapsto m_x(\xi|_{\mathcal{R}^x})$ が可測.

! でも. 実はこれはよくない定義.

(至る所で可測なミーンの族は. 従順な $\mathcal{R}$ に対してしか存在しない. Kechris-Miller 2008)

! X の上に測度 μ があれば. よい定義ができる.

扱う測度空間 : 標準確率空間
(X, μ) (cf. 最後のページ)

Basic fact

どんな標準確率空間も可算か
もしくは $\simeq ([0,1], \mathrm{Leb})$

pmp action の例

$$G \curvearrowright (X, \mu) := \prod_G ([0,1], \mathrm{Leb})$$

$$g (x_e)_{e \in G} := (x_{g^{-1}e})_{e \in G}$$

ベルヌーイシフト.

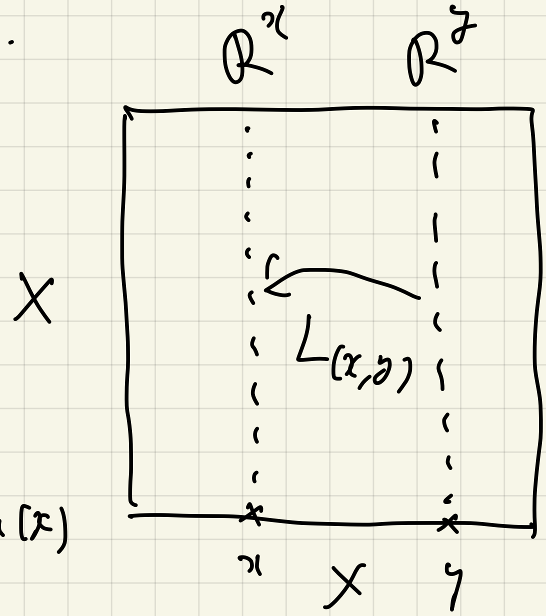
演 G : 無限ならば. この $G \curvearrowright (X, \mu)$ は
essentially free i.e. a.e. $x \in X$ に対し.

$$\mathrm{Stab}_G(x) \left(:= \{ g \in G \mid gx = x \} \right) = \{ e \} .$$

$\mathcal{R}$ on (X,μ) の従順性を定義しよう

(e.g. $\underset{\text{可算}}{G} \curvearrowright (X,\mu)$ pmp + $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$.)

仮に、$(m_x)_{x\in X}$ 左不変で可測なミーンの族が存在したとしよう。



$\xi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$
bdd, meas.

$$\sigma(\xi) := \int_X m_x\left(\xi|_{\mathcal{R}^x}\right) d\mu(x)$$

m_x : ミーン on $\mathcal{R}^x$

$\sigma : \{\text{bdd. meas. fct on } \mathcal{R}\} \to \mathbb{C}$.

σ は"左不変性"をもつ。

Def $\mathcal{R}$ on (X,μ) が従順であるとは、

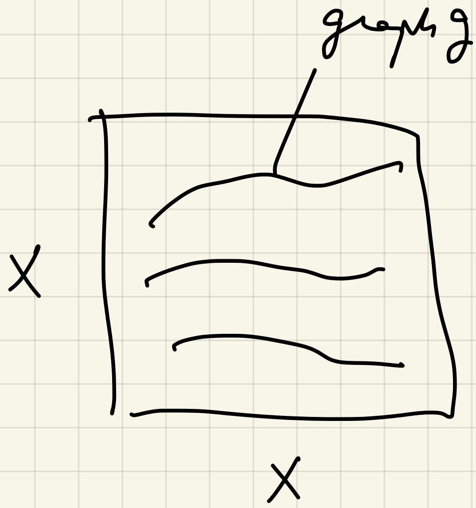
$\exists\, \varphi : L^\infty(\mathcal{R}) \to \mathbb{C}$ 左不変ミーン
①　③　②

のとれることをいう.

① $\mathcal{R}$ 上の測度 μ^1 :

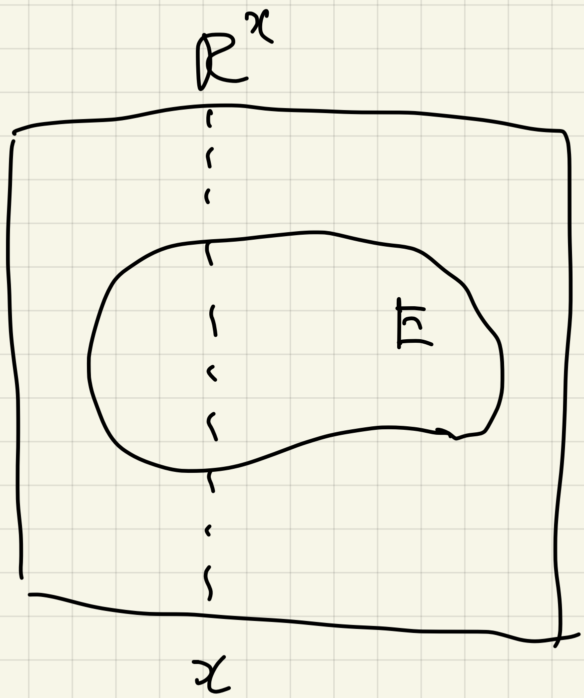
$E \subset \mathcal{R}$ に対し,

$$\mu^1(E) := \int_X |E \cap \mathcal{R}^x| \, d\mu(x)$$



$\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$

$= \bigcup_{g \in G} \operatorname{graph} g$



① の $L^\infty(\mathcal{R})$ は $L^\infty(\mathcal{R}, \mu^1)$ のこと.

② $(\mathcal{R}, \mu)$ 上のミーンとは,

$\sigma : L^\infty(\mathcal{R}) \to \mathbb{C}$ linear で 次の

(i)–(iii) をみたすもののこと:

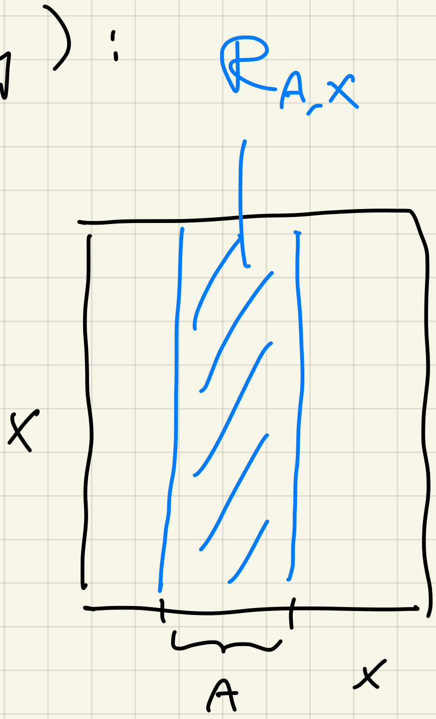
(i) $\sigma(\xi) \geq 0$ if $\xi \geq 0$

(ii) $\sigma(1) = 1$

(iii) (the balanced property):

$\forall A \subset X$ に対し

$$\sigma(1_{\mathcal{R}_{A,X}}) = \mu(A)$$



$$\mathcal{R}_{A,X} := \{(x,y) \in \mathcal{R} \mid x \in A\}$$

注意 (i) & (ii) $\Rightarrow$ $\sigma \in L^\infty(\mathcal{R})^*$

$\|\sigma\| = 1$.

③ $(\mathcal{R}, \mu)$ 上の ミーン $\sigma : L^\infty(\mathcal{R}) \to \mathbb{C}$ が

左不変 であるとき.

$$[\mathcal{R}] := \left\{ T \in \mathrm{Aut}(X, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l}(Tx, x) \in \mathcal{R} \\ \forall x \in X\end{array} \right\}$$

the full group of $\mathcal{R}$

(e.g. if $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$, $G < [\mathcal{R}]$)

$[\mathcal{R}] \curvearrowright \mathcal{R}$ $\quad T \cdot (x, y) = (Tx, y)$

左かけ算 $\quad \left(= (Tx, x)(x, y) \right)$

$\to$ $[\mathcal{R}] \curvearrowright L^\infty(\mathcal{R})$

$\curvearrowright L^\infty(\mathcal{R})^*$

$\cup$

σ が $[\mathcal{R}]$-inv. であること.

☆ G : amenable $\curvearrowright_{\text{pmp}} (X, \mu) \to \mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$

このとき $(\mathcal{R}, \mu)$ is amenable.

Pf $m : \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ 左不変ミーン

$\sigma : L^\infty(\mathcal{R}) \to \mathbb{C}$ を作りたい.

$$L^\infty(\mathcal{R}) \to \ell^\infty(G) \qquad \bar{\xi}(g) := \int_X \xi(x, g^{-1}x)\, d\mu(x)$$
$$\xi \mapsto \bar{\xi} \qquad g \in G$$

$\sigma(\xi) := m(\bar{\xi})$.

$A \subset X$ に対し. $\overline{1_{\mathcal{R}_{A,X}}}(g) = \mu(A)$ const.

$\to \sigma(1_{\mathcal{R}_{A,X}}) = m(\mu(A)) = \mu(A)$

balanced ok.

$g \in G\ (\subset [\mathcal{R}])$ に関して σ が左不変であることを示す.

$$\sigma : L^\infty(\mathcal{R}) \longrightarrow \ell^\infty(G) \xrightarrow{m} \mathbb{C}$$
$$\xi \mapsto \bar{\xi}$$

ここが G-equiv. であることを示せばよい.

$$(\overline{g\xi})(t) = \int_X (g\xi)(x, t^{-1}x)\, d\mu(x)$$

$t \in G$

$$= \int_X \xi(g^{-1}x, t^{-1}x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_X \xi(x, t^{-1}gx)\, d\mu(x)$$

$x \to gx$

g は μ を保つ

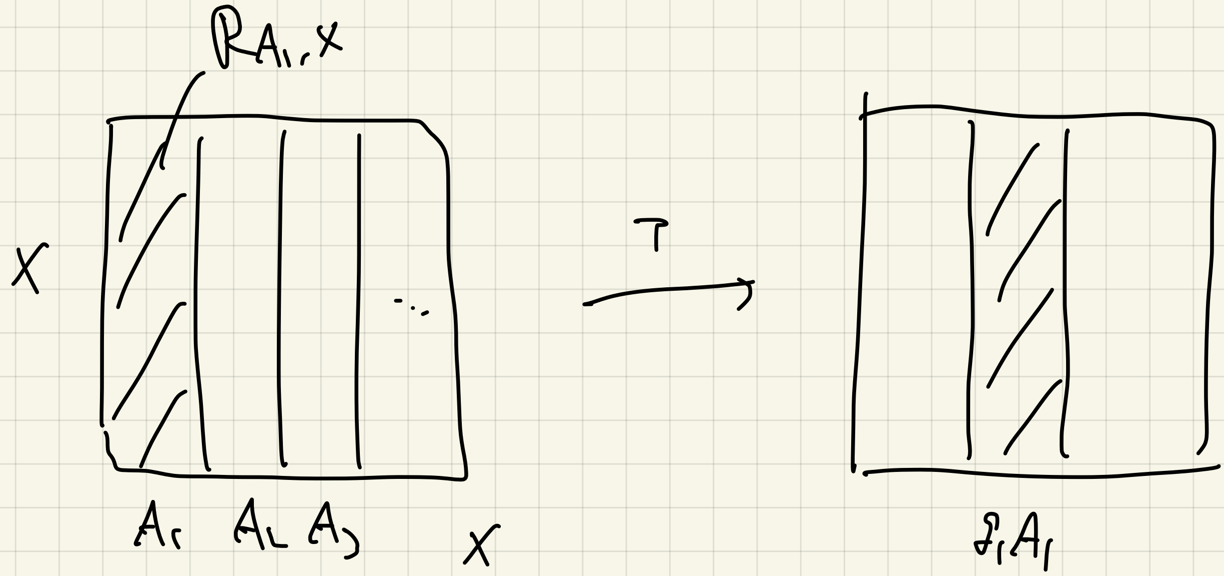
$$= \bar{\xi}(g^{-1}t) = (g\bar{\xi})(t).$$

ok.

$T \in [R]$ に関する不変性について.

$\exists X = \bigsqcup_n A_n, \ \exists g_n \in G \quad T|_{A_n} = g_n.$

と balanced property を示す. 読



※ $G \curvearrowright (X, \mu)$ pmp, free

$\longrightarrow R = R(G \curvearrowright X)$.

(R, μ) : amenable $\Rightarrow$ G : amenable

Pf $\sigma : L^\infty(R) \to \mathbb{C}$ を不変ミーン.

$m : \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ を作りたい.

$$\ell^\infty(G) \to L^\infty(R) \qquad \tilde{\xi}(x, g^{-1}x) := \xi(g).$$
$$\xi \mapsto \tilde{\xi}$$

ϕ

$G \curvearrowright X$ free を使う.

$$m(\xi) := \sigma(\tilde{\xi})$$

$$\ell^\infty(G) \xrightarrow[\phi]{} L^\infty(R) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$\xi \in$

ϕ G-equiv. ことを示せばよい.

$$\widetilde{(g\xi)}(x, h^{-1}x) = (g\xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$$

$g, h \in G$
$x \in X$

$$(g\tilde{\xi})(x, h^{-1}x) = \tilde{\xi}(g^{-1}x, \overbrace{h^{-1}x}^{h^{-1}g(g^{-1}x)}) = \xi(g^{-1}h) \quad \blacksquare$$

Cor $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$, $H \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y, \nu)$ p.m.p. free

$\alpha \underset{OE}{\sim} \beta$, G : amenable

$\Rightarrow$ H: amenable.

よって $\mathcal{R}(\mathbb{Z} \curvearrowright X) \underset{OE}{\not\sim} \mathcal{R}(F_2 \curvearrowright Y)$

定 $(\mathcal{R}, \mu)$ amenable

$\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ subequivalence relation

(i.e. $\mathcal{R}$ の可測集合で同値関係になるもの)

$\Rightarrow$ $(\mathcal{S}, \mu)$ amenable.

(群の場合にならって示してみよ.

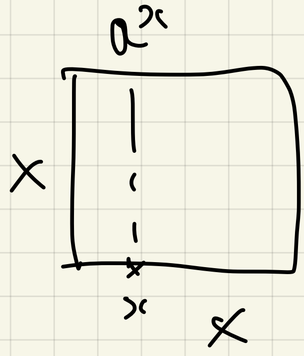
$\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ の場合でよい)

Reiter 条件

(R, μ) のライター列とは、$(\xi_n) \subset L^1(R)$ で

- $\xi_n \geq 0$
- a.e. $x \in X$ に対し

$$\sum_{y \in [x]_R} \xi_n(x, y) = 1$$



- $\forall T \in [R]$

$$\| T\xi_n - \xi_n \|_{L^1(R)} \longrightarrow 0.$$

となるもののこと。

Thm (R, μ) : amenable

$\iff$ (R, μ) はライター列をもつ。

Pf $\Leftarrow$: $(\xi_n) \subset L^1(R)_1 \subset L^\infty(R)^*_1 \ni \sigma$

σ : weak* cluster pt

左不変ミーン

$\Rightarrow$: 群の場合にならう。

やってないので略 $\Box$

注 $G \curvearrowright (X, \mu)$ pmp.

G のライター列から、$R(G \curvearrowright X)$ のライター列を作ってみよ。 ($G \curvearrowright X$ が free でなくても作れる。)

Thm (Connes-Feldman-Weiss 1980 + Dye)

$(\mathcal{R}_i, \mu_i)$ ergodic, pmp, amenable, μ_i non atomic $\quad i=1,2$.

$\Rightarrow \quad (\mathcal{R}_1, \mu_1) \simeq (\mathcal{R}_2, \mu_2)$.

Cor G_i infinite amenable.

$G_i \overset{\alpha_i}{\curvearrowright} (X_i, \mu_i)$ ergodic free pmp.

Then $\alpha_1 \underset{OE}{\sim} \alpha_2$.

In contrast:

Thm (Zimmer, 1980)

G_i : simple higher rank Lie group

(e.g. $PSL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$)

$\overset{\alpha_i}{\curvearrowright} (X_i, \mu_i)$ ergodic free pmp.

If $\alpha_1 \underset{OE}{\sim} \alpha_2$,

then $\alpha_1 \underset{\text{conj.}}{\sim} \alpha_2$ $\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \exists \pi : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2 \\ \alpha_1 \underset{\text{isom. w.r.t. } \pi}{\simeq} \alpha_2 \end{array} \right)$

この講義の目標：

曲面の写像類群に対する同型の剛性

vN·D problem

$\mathcal{R}$ on (X,μ) pmp, non-amenable

$\Rightarrow$ $\exists F_2 \curvearrowright X$ free

? $\mathcal{R}(F_2 \curvearrowright X) \subset \mathcal{R}$ open.

Thm (Gaboriau–Lyons 2009)

This is true if G is nonamenable

and $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G \curvearrowright [0,1]^G)$.

ベルヌーイ

Thm (Bowen 2019) can replace this into any Bernoulli

e.g. $G \curvearrowright (\{0,1\}, p\delta_0 + (1-p)\delta_1)^G$

標準確率空間の定義

✓ Polish space := 可分な位相空間で
完備な距離で距離付けされる
もの.

✓ standard Borel space
:= (Polish sp. σ-alg (open sets)) と
同型な可測空間のこと.

✓ standard probability space
:= prob. sp $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で $(X, \mathcal{B})$ が
standard Borel sp. になるもの.