

§2. 測度論

S : 有限集合 (可数)

$$\mathcal{L}^{\infty}(S) := \left\{ \xi : S \rightarrow \mathbb{C} \mid \underbrace{\sup_{s \in S} |\xi(s)|}_{\|\xi\|_{\infty}} < \infty \right\}$$

Def S 上の平均 (mean) として

$$m : \mathcal{L}^{\infty}(S) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} m(\xi) \geq 0 & \text{if } \xi \geq 0 \\ \text{linear} \\ m(1) = 1 \end{cases}$$

が S 上の平均である。

S 上の measure μ に対して $m(\xi) = \sum_{s \in S} \xi(s) \mu(s)$.

* $\mathbb{K}$ の $m \in \mathcal{L}^{\infty}(S)^*$ として $\|m\| = 1$.

Pr ξ は $\mathbb{R}$ -valued ならば: $\xi \leq |\xi| \leq \|\xi\|_{\infty}$.

$$m(\xi) \leq m(|\xi|) \leq m(\|\xi\|_{\infty}) = \|\xi\|_{\infty}.$$

同様にして $\xi : \mathbb{C}$ -valued ならば

$$|m(\xi)| \leq |m(\operatorname{Re} \xi)| + |m(\operatorname{Im} \xi)| \leq 2\|\xi\|_{\infty}.$$

よって $m \in \mathcal{L}^{\infty}(S)^*$.

$\|m\| = 1$ となるように ξ を選ぶ: $\xi(s) = \begin{cases} 1 & s = s_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$\forall \xi, \eta \quad |m(\xi \bar{\eta})| \leq m(|\xi|^2)^{1/2} m(|\eta|^2)^{1/2}$$

$$\xi \in L^0(S) \text{ 1: 定値}$$

$$|m(\xi)| \leq m(|\xi|^2)^{1/2} \leq m(\|\xi\|_0^2)^{1/2} = \|\xi\|_0.$$

$\eta=1$ □

★ S 上の Σ に関する $(S, \mathcal{P}(S))$ 上の 有限加法測度
確率測度 とは、
 $m(S) = 1$. $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$
 S の部分集合 A, B が互いに素なとき、
 σ -alg.

$$\checkmark \quad m \in L^0(S)^* \quad \Sigma$$

$$\rightarrow M \text{ on } (S, \mathcal{P}(S))$$

$$M(A) = m(1_A).$$

$$\checkmark \quad \Sigma \text{ の有限測度 } M \rightarrow m: L^0(S) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$M \text{ は } \mathbb{R} \text{ の非負値}$$

$$(1, 1, \dots \text{ の } \mathbb{R} \text{ 値関数の非負値})$$

$$m(1_A) := M(A).$$

$$m(\text{非負関数}) \text{ は 定義される}$$

$$\xi \in L^0(S), \xi \geq 0 \text{ 1: 定値} \quad \xi_n: \text{非負関数} \nearrow \xi.$$

$$S \text{ 上 一致}$$

$$m(\xi) := \lim_n m(\xi_n).$$

$$G \curvearrowright S.$$

$$\rightarrow G \curvearrowright \ell^0(S) \quad (g\xi)(s) = \xi(g^{-1}s).$$

$$\rightarrow G \curvearrowright \ell^0(S)^* \quad (gm)(\xi) = m(g^{-1}\xi).$$

$$\text{今後. } m(\xi) = \langle m, \xi \rangle \in \mathbb{C}. \quad \langle gm, \xi \rangle = \langle m, g^{-1}\xi \rangle$$

$$m \in \ell^0(S)^* : G\text{-invariant} \Leftrightarrow_{\text{def}} gm = m.$$

Def $G : \curvearrowright$

G は可測的 (amenable)

$$\Leftrightarrow_{\text{def}} \exists m \in \ell^0(G)^* \quad \underbrace{\text{左不変}}_{\text{i.e.}}$$

$$G\text{-inv. v.r.v. } G \curvearrowright G \text{ 左不変}$$

The first ex. $G : \text{有限}$.

$$m(\xi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi(g) \quad \text{左不変}$$

Obs. $G : \mathbb{R}P^2$. $m \in l^0(G)$ は必ず ≥ 0 .

もし $\exists g \in G$ $m(\delta_g) > 0$ ならば,

$$\forall h \in G \quad m(\delta_h) = m(\delta_g) > 0.$$

$$\delta_h = h \delta^{-1} \delta_g$$

$G \supset \{g_n\}_{n=1}^\infty$
 $\sum m(\delta_{g_n}) < \infty$

$$m(\underbrace{\delta_{g_1} + \dots + \delta_{g_n}}_{\in l^0(G)}) = n \cdot c$$

$\in l^0(G)$

$\|\cdot\|_0 = 1$

$\rightarrow \infty$

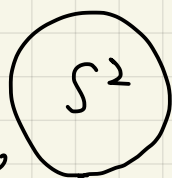
$n \rightarrow \infty$

$\sum \delta_{g_n}$

5.2 $\forall g \in G \quad m(\delta_g) = 0.$

$\forall F \subset G$ finite $m(1_F) = 0.$]

命題 1 (11.2.1 の逆方向の主張)



$$S^2 = \exists A_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_m$$

$SO(3)$

$$\exists g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in SO(3)$$

す.т.

$$g_1 A_1 \cup \dots \cup g_n A_n = S^2$$

$$h_1 B_1 \cup \dots \cup h_m B_m = S^2$$

非位似.
 (高次元では)

von Neuman : 従属性の導入.

作用する群が従属ならば、 $\sim$ となる

パウリ形式分解の存在となる.

(例として: $\underbrace{SO(2) \cap S^1}_{\varphi}$ 従属.)

Tarski : G 群に対して.

G : 非従属 $\Leftrightarrow G \cap G$ はパウリ形式分解
存在.

例 2, 可換群の従属.

2) 分解式の準備

E : Banach sp. E^* : the dual

E^* の weak* topology $\sigma(E^*, E)$ による.

$a \in E^*$, $e_1, \dots, e_n \in E$, $\varepsilon > 0$ に対し.

$$U_{a, e_1, \dots, e_n, \varepsilon} := \left\{ b \in E^* \mid |\langle b, e_i \rangle - \langle a, e_i \rangle| < \varepsilon \right. \\ \left. \forall i=1, \dots, n \right\}$$

$\Sigma \sim \sim \sim$.

$$\{ U_n, e_1, \dots, e_n, \varepsilon \mid e_1, \dots, e_n \in E, \varepsilon > 0 \}$$

$\exists a \in E^*$ の近傍 $\varepsilon > 0$ E^* の近傍 $\varepsilon > 0$ である。

Thm (Banach-Alaoglu)

E : Banach sp. $B \subset E^*$ 閉単位球.

$$\{ a \in E^* \mid \|a\| \leq 1 \}$$

$\Rightarrow a \in E^*$. B は weak* top. に $\|a\| \leq 1$ である。

Pf (rough)

$$\Phi: B \rightarrow \prod_{e \in E} [-\|e\|, \|e\|]$$

$$a \mapsto (\langle a, e \rangle)_{e \in E}$$

$\checkmark$ $\Phi: B \rightarrow \Phi(B)$ は単射. 連続かつ閉.

よって同型写像.

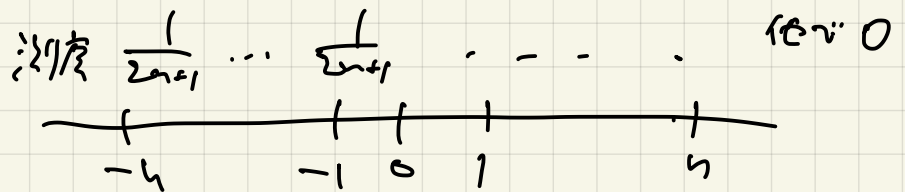
$\checkmark$ $\Phi(B)$ は閉. よって $\Phi(B)$ はコンパクト. $\square$

Prop $\mathbb{Z}$ の位相.

$$\text{Pf } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_n \in \text{Prob}(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z})) \text{ である}$$

$$\sum_n (\{E\}) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{if } |E| \leq n \\ 0 & \text{if } |E| > n. \end{cases}$$

$z = \frac{1}{2}$ and



$$\text{Prob}(z, P(z)) \subset \ell^1(z), \quad \subset \ell^0(z)^*$$

ψ $\uparrow$
 $\sum_n$ $\uparrow$ $\text{for } z \in \mathbb{R}, z \neq 0$

$$\ell^1(z)^* = \ell^0(z)$$

$$\ell^1(z) \subset \ell^1(z)^{**} = \ell^0(z)^*$$

$(\sum_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a weak* cluster pt $m \in \ell^0(z)^*, z \neq 0$.
 (weak* g.c. s.t. $z \neq 0$.)

✓ $m \neq 0$ is not zero. $\exists P \neq 0$. $\sum_n \rightarrow m$ weak* s.t.

$$\eta \in \ell^0(z), \eta \geq 0 \text{ is not 1.}$$

✗ 本当は $\sum_n$ の収束を
 1/2 C. ネットの収束.

$$\langle \sum_n, \eta \rangle \rightarrow \langle m, \eta \rangle = m(\eta)$$

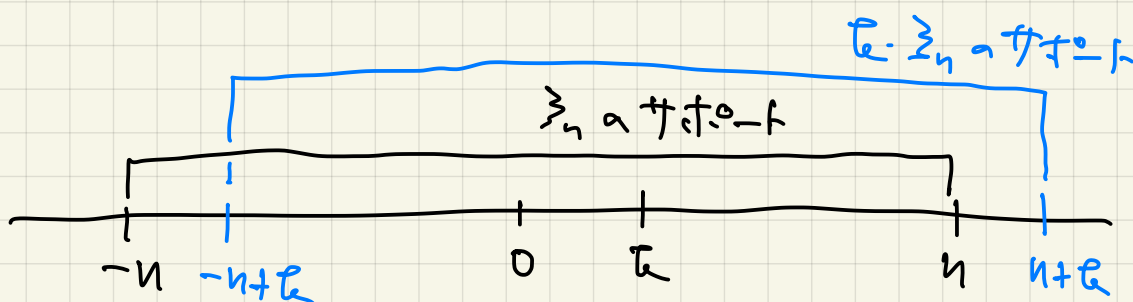
$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0$

$$\langle \sum_n, \eta \rangle \rightarrow \langle m, \eta \rangle = m(\eta)$$

$\parallel \eta \parallel_1 \Rightarrow \parallel \eta \parallel_1$

$\checkmark$ m is $\mathbb{Z}$ -inv. r.f.d. $\checkmark$ p2. $q \in \mathbb{Z}$ is f.i.

$$\|q \cdot \xi_n - \xi_n\|_1 = \frac{q}{2n+1} \cdot 2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



$\eta \in \ell^p(\mathbb{Z})$ is f.i.

$$|\langle q \cdot \xi_n - \xi_n, \eta \rangle| \leq \|q \cdot \xi_n - \xi_n\|_1 \|\eta\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{--- ①}$$

$\xi_n \rightarrow m$ weak* s.t.

$$\begin{aligned} \langle q \cdot \xi_n - \xi_n, \eta \rangle &= \underbrace{\langle q \cdot \xi_n, \eta \rangle}_{\downarrow \langle \xi_n, q \cdot \eta \rangle} - \underbrace{\langle \xi_n, \eta \rangle}_{\downarrow \langle m, \eta \rangle} \\ &\downarrow \quad \downarrow \\ \langle m, q \cdot \eta \rangle &= \langle q \cdot m, \xi \rangle \end{aligned}$$

f.i2 $\langle q \cdot \xi_n - \xi_n, \eta \rangle \rightarrow \langle q \cdot m, \eta \rangle - \langle m, \eta \rangle$.

① $\checkmark$ f.i2. $\langle q \cdot m, \eta \rangle = \langle m, \eta \rangle$.

f.i2 $q \cdot m = m \quad \forall q \in \mathbb{Z}$. $\square$

例 F_2 は 有限群でない。

$$abba^{-1}b.$$

Pr $F_2 = \langle a, b \rangle = a, a^{-1}, b, b^{-1}$ による自由群。
 $a \neq a^{-1}, b \neq b^{-1}$ である。
証明する。

$$F_2 = \{e\} \sqcup \underbrace{W_a \sqcup W_{a^{-1}}}_{\substack{\uparrow \\ a \text{ を含む } F_2 \text{ の部分群}}} \sqcup W_b \sqcup W_{b^{-1}}$$

$$= W_a \sqcup a W_{a^{-1}}$$

$$= W_b \sqcup b W_{b^{-1}}$$

もし F_2 が有限群ならば: $\exists m: a^m = e$
 $m \in F_2$.

$$1 = m(F_2) = m(\{e\}) + m(W_a) + m(W_{a^{-1}}) \\ + m(W_b) + m(W_{b^{-1}}) \quad (*)$$

$$= m(W_a) + \underbrace{m(a W_{a^{-1}})}_{= m(W_{a^{-1}})} = m(W_{a^{-1}})$$

$$= m(W_b) + \underbrace{m(b W_{b^{-1}})}_{= m(W_{b^{-1}})} = m(W_{b^{-1}}).$$

$$(*) \text{ の右辺 } = m(\{e\}) + 1 + 1 \geq 2.$$

矛盾



Prop $H < G$, $G: \text{finite} \Rightarrow H: \text{finite}$.

Pf $\mu: G\text{-inv. meas on } G$.

$$G = \bigsqcup_{s \in S} Hs \quad \exists S \subset G$$

$$\pi \downarrow$$

$$H$$

$$\pi(hs) = h, \quad h \in H, s \in S.$$

$\pi \wr H\text{-equiv. i.e. } \pi(hg) = h\pi(g),$
 $\forall h \in H \quad \forall g \in G.$

$\pi_* \mu$: mean on H .

$$(\pi_* \mu)(A) := \mu(\pi^{-1}(A)), \quad A \subset H.$$

$\pi_* \mu \wr H\text{-inv.}$

$$\text{Claim. } [h(\pi_* \mu)](A) = \pi_* \mu(h^{-1}A)$$

$$= \mu(\underbrace{h^{-1}(\pi^{-1}(A))}_{\substack{\parallel \pi \wr H\text{-equiv.} \\ h^{-1}\pi^{-1}(A)}}) = (h \cdot \mu)(\pi^{-1}(A))$$

$$= \mu(\pi^{-1}(A)) = \pi_* \mu(A).$$

$\mu \wr G\text{-inv.}$

$\delta, \wr H\text{-inv.}$

$$\forall h \in H: h(\pi_* \mu) = \pi_* \mu. \quad \square$$

Cor $F_2 < G \Rightarrow G$: 非徒阻.

$\Leftarrow$: the von Neumann-Day problem.

This was a long-standing question

1980s $\exists G \nmid F_2$
非正规.

Adyan

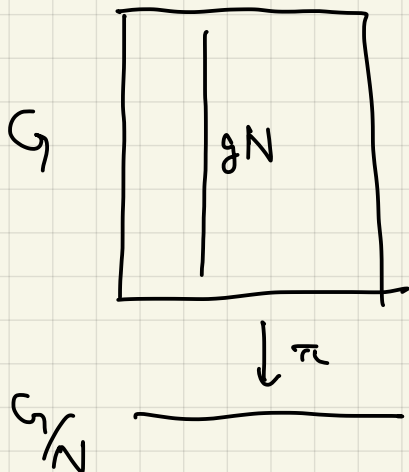
Olshanskii

Prop (1) $N \triangleleft G$, G : 正规 $\Rightarrow G/N$: 正规.

$$(2) \quad 1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow \frac{G}{N} \rightarrow 1$$
$$G: \text{有限} \Leftrightarrow N, G/N: \text{有限}.$$

PP (1) $m \in G \rightarrow \pi_* m \in G/N$
 $\pi: G \rightarrow G/N$

(2)


$$m_N, m_{G/N}$$
$$\rightarrow m_g$$

又



Con 可解群 の 定義.

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$$

G_i/G_{i+1} : abelian.

例1 $\left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}) \right\}$ の 可解群 である.

$$\nabla$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

同型写像

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

hom.
 $\cap$
 $(\mathbb{C}^\times)^n$

$$\nabla$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

同型写像

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto (b_1, \dots, b_{n-1})$$

$\cap$
 $\mathbb{C}^{n-1}$

$\supset$

$\vdots$

∇

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

可解群.

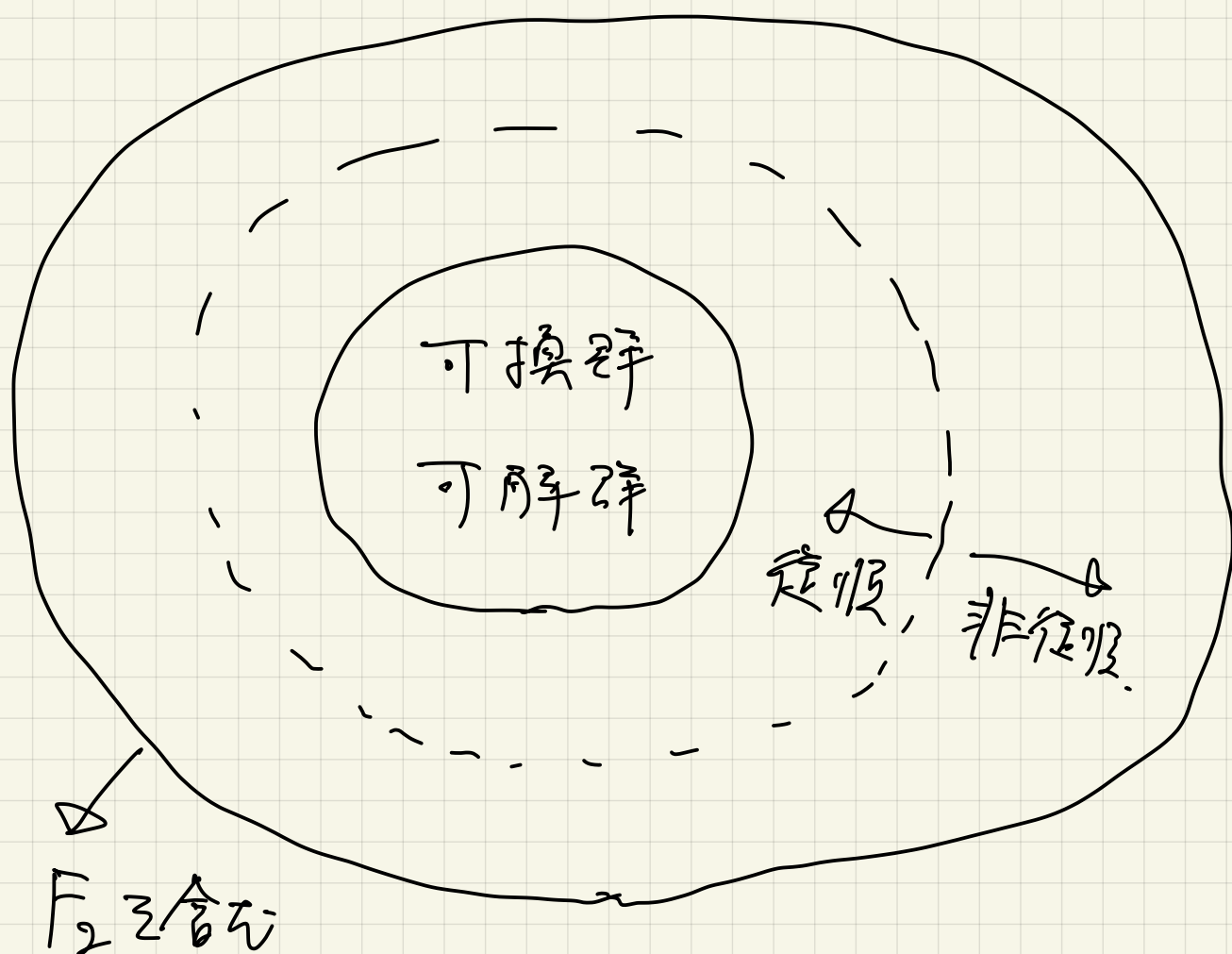
Fact (The Tits alternative)

$G < GL_n(\mathbb{C})$ 有限生成群に對し.

• G : 巡回群 $\Rightarrow \exists H < G$ finite index
 H : 可解群.

• G : 非巡回群 $\Rightarrow F_2 < G$.

$GL_n(\mathbb{C})$ の部分群の中には FN の 1 -元群の
反例も結構ある!



Reiter 条件

G : 可算群.

$(\xi_n)_n \subset \text{Prob}(G)$ 2"

$$\forall g \in G \quad \|g \xi_n - \xi_n\|_1 \rightarrow 0$$

2nd もの G の $\bar{1}$ 列 ξ_n へ.

$$\left(\begin{array}{l} G = \mathbb{Z} \text{ or } \mathbb{Z}^2 \\ \bar{1} \text{ or } -\bar{1} \\ \mathbb{Z} \text{ or } \mathbb{T} \dots \end{array} \right)$$

★ G が $\bar{1}$ 列 ξ_n 2" 2". G の 列 ξ_n .

Pr (ξ_n) の weak* cluster pt $\mu \in \ell^\infty(G)^*$

is G -inv. mean. $\square$

Thm G が 列 ξ_n 2" 2". G の $\bar{1}$ 列 ξ_n 2".

$$\mu \in \ell^\infty(G)^* \quad G\text{-inv. mean.}$$

weak* $\uparrow$ $\bigcup$ weak* dense $\left(\begin{array}{l} \text{Hahn-Banach} \\ \text{分離定理} \end{array} \right)$
 $\xi_n \in \ell^1(G)_+$

$$\begin{array}{ccc} g \xi_n \rightarrow g \mu & \text{weak*} & \Rightarrow g \xi_n - \xi_n \rightarrow 0 \\ \parallel & & \text{weak*} \\ \mu & & \end{array}$$

LC $\bar{1}$ 列 ξ_n の μ は $\bar{1}$ 列 ξ_n 2" 2"!