「２０１８年度日本数学会賞春季賞　受賞」
エルゴード群論
木田良才

今年度に入ってから, 自分の専門分野をエルゴード群論とよぶことにしました. 困ったことに, 実はこのあたりの分野を表す名称はいくつかあって, 最初は measurable group theory でしたが, 次第に measured group theory とよばれるようになり, 今では ergodic group theory という新たな名称が生まれ, 各々の研究者が好みでどれかを選んでいるのが現状です. 内容についてですが, 可算離散群による測度空間への作用に対し, その軌道同値関係の構造と群の関係を探るというのが一つの目的です. 群作用の軌道同値関係は, 1950 年代にフォンノイマン環論との関連から研究され始め, 近年では, 幾何学的群論をはじめとする離散群論の発展に伴い, 様々な群の作用に対して, その軌道同値関係の興味深い性質が見出されるようになりました. 中でも, コンパクト群 $X = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の同値関係

$$\mathcal{R}_0 = \{\, ((x_n)_n, (y_n)_n) \in X \times X \mid \text{有限個の } n \text{ に対してのみ } x_n \neq y_n \,\}$$

は, 1950 年代の初期の研究で中心的な役割を果たしました. 実際, $\mathbb{Z}$ による標準確率空間への保測作用に対し, それが自由かつエルゴード的でありさえすれば, その軌道同値関係は $\mathcal{R}_0$ と同型になります. (以下では, 群の作用といえば, 標準確率空間への保測作用であって, 自由なものを意味することにします.)

学生時分に取り組んだのが, 曲面の写像類群でした. 最初に示したのは, 写像類群の作用の軌道同値関係は, 同値関係の非自明な直積に分解しないという定理でした. きっかけとなったのは, 双曲群の作用が同様の非分解性をもつという Adams の定理 (1994) です. 写像類群がもつ双曲的な側面に基づいて, Adams の定理の類似を示してみようというのが当時の動機でした. 極めて素朴な動機から出発して得られた定理でしたが, そこで手にした技術が, 今回の受賞理由である剛性定理に辿り着く上で決定的なものとなりました.

軌道同値関係の直積への分解可能性は, その後も研究テーマとして生き続け, 非自明に分解する例を探るのが次の目標となりました. 初めて得た例は, バウムスラッグ・ソリター群を用いたものです. この群は, 表示 $G = \langle\, a, t \mid ta^2t^{-1} = a^3 \,\rangle$ で定義されます. この表示によれば, a で生成される部分群は, G で中心的であるということに近い性格をもちます. これが鍵となって, G の作用で, その軌道同値関係が $\mathcal{R}_0$ との直積になるようなものが作れます. G は群の直積に非自明に分解しない一方, その作用の軌道同値関係は非自明に分解し得る, というのが面白い点です. 最初の構成は手作りでしたが, 現在では, G のユニタリ表現の性質に基づく, より一般的な構成法が得られています. 群のどのような性質が, このような直積への分解を引き起こすのか, これを解明するのが最近の研究テーマの一つです.

通常, 何かを積に分解するのは, 問題をより単純化するためですが, 軌道同値関係の場合, 直積に分解しても問題が単純化することはなく, 直積の同値関係自体, よく理解されているとはいえません. 最近の研究では, $\mathcal{R}_0$ との直積になっている同値関係に対し, その 2-コサイクルを考察したのですが, 同値関係の直積に関してキュネスの公式がないために苦労しました. 何とかして, 理解の範囲を広げていきたいと思っているところです.