

「作用素環賞 受賞」
剛性問題に取り組んでいた頃
木田良才

モストウ剛性と呼ばれる定理があります。これは、三次元以上の双曲多様体の位相は幾何を決めるという定理です。基本群 G の言葉でこれを言い換えてみます。普遍被覆により G の各元は双曲空間の等長変換を誘導し、 G は等長変換群の格子部分群として実現されます。等長変換群の自己同型により他の実現が得られますが、モストウ剛性は、 G の格子部分群としての実現はこれら以外にはないということを主張します。私に関わってきた剛性問題は、測度空間への群作用を対象としているのですが、ここではこのモストウ剛性に関連づけられるとだけ言っておきましょう。

最初に得た剛性定理は曲面の写像類群に関するものです。そのアイデアを得たのは、私の学位審査会が開かれる一週間ほど前だったかと思います。証明の細部を埋めずとも、これは確実だろうという直感がありました。内容は学位論文の主結果をはるかに凌ぐものだったので、審査会の準備はさておき、確信を得る作業に時間を費やしていました。結局審査会では、あまり緊張感をもたず、学位論文の結果もいいが、こういうことができそうだといい出す始末でした。危なっかしいことをしていたと思う反面、それだけ没頭できる環境や雰囲気があるところにはあったとも言えます。

その二年後、群の融合積に関する剛性定理を得ることになります。当時、群の自由積にまつわるフォンノイマン環の剛性が脚光を浴びており、それを自分の枠組みでできないものかと考えていました。ところが自由積ではうまくいかず思いあぐねていたところ、ある程度大きい部分群を共有する二つの群を融合させると、その二つの群の剛性が融合積に伝播することを見出しました。例えば、二つの $SL_3(\mathbb{Z})$ をその極大放物型部分群に関して融合させると、得られる融合積は写像類群と同じ剛性を持ちます。写像類群と比べると、ずいぶんおかしな群かもしれません。しかし、写像類群に対する証明が、当時の最先端であり私にはその本質に踏み込めない、カーブ複体の幾何に基づいている一方、融合積に対する証明はシンプルで親しみやすいツリーの幾何に基づいています。剛性が伝播する状況を丹念に調べ上げたのですが、その苦労があったせいか、写像類群のときは違い、自分の手で剛性をたぐり寄せたという感覚があります。その後、程なくして、融合積の剛性定理はフォンノイマン環の剛性問題に応用されました。歴史を紐解くと、この群作用の問題は元々、より扱いが難しいフォンノイマン環の研究をアシストするために定式化されたものです。そのため、図らずもこのようなアシストにつながったことはとてもうれしく思います。

さて、ここでモストウ剛性の話に戻ります。一般に、 $PSL_2(\mathbb{R})$ を除く、ランク 1 の非コンパクト単純リー群の格子部分群はモストウ剛性をもつのですが、群作用の剛性をもつかどうかは未解決です。部分的な結果はあるものの、解決の見通しは立っていないようです。私のこれまでの手法は、対象の群が多くの \mathbb{Z} を部分群として含み、それらが複雑に絡み合っていることを利用したものです。双曲的な群はそのような性質をもっておらず、群作用の剛性を得るには新しいアイデアが必要です。現在、剛性とは全く別の問題に取り組んでいるため、この方向を研究する気持ちの準備すらできていないのですが、いつかまじめに取り組める日が来ることを望んでいます。