Questions around stable equivalence relations

木田 良才 (東京大学)

0　はじめに

測度付き同値関係は, 同値関係の公理を満たす集合として素朴に定義される一方, ある代数的公理を満たすフォンノイマン環と一対一に対応する対象でもある. 測度空間への群作用から得られる軌道同値関係がその典型例である. 測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ が安定 (stable) であるとは, 同型 $\mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \simeq \mathcal{R}$ が成り立つときをいう. ここで, $\mathcal{R}_0$ は超有限 II_1 型エルゴード的同値関係である.

筆者は, Jones-Schmidt (1987) による同値関係の安定性の特徴付けを主たる道具として, 2011 年頃から安定同値関係の例や一般的性質について研究を進めてきました. バウムスラッグ・ソリター群の安定性に関してすら日々逡巡していた研究当初と比較すると, 現在明らかになった事実は確実に増えているように思えます. 一方で, 手の届きそうな具体的な問題を解いていけば, いずれ大きな方向性がつかめるものと期待しつつ研究を続けてきましたが, 未だ一つ一つの現象を捉えるにとどまっているのが現状です. この予稿の目的は, これまでの研究で思い至った問題の紹介を通して, 研究の現状を報告することです. もしここで挙げた問題が, どんな形であれこれからの発展に寄与することになれば, これ以上の喜びはありません.

最後に, 学生時代以来 10 年近く同値関係の研究を続けてきましたが, 筆者の研究に興味をもって接して下さった作用素環論の研究者の皆様に感謝致します.

1　背景

記号や言葉の準備を兼ねて, 安定同値関係に関する背景と基本的な事実を紹介する. 空でない集合 X 上の同値関係とは, $X \times X$ の部分集合 $\mathcal{R}$ で, 3 条件 "$\forall x \in X\ (x, x) \in \mathcal{R}$", "$(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$", "$(x, y), (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$" を満たすものを意味する. この予稿で扱う同値関係は, 各同値類が可算であって, さらに, X に可測構造と有限測度 μ が備わっている状況下で μ を保存するものである. このような同値関係を単に測度付き同値関係と呼ぶ. 例えば, $G \curvearrowright X$ を測度を保つ可算群の作用としたとき, その軌道同値関係 $\mathcal{R}_{G \curvearrowright X} = \{\, (gx, x) \in X \times X \mid g \in G,\ x \in X \,\}$ がよい例である. 測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ からフォンノイマン環の組 $L\mathcal{R} \supset L^\infty(X)$ が

2016 年 8 月 30 日.

構成され (Krieger 1970), 同値関係の同型 $\mathcal{R}_1 \simeq \mathcal{R}_2$ とフォンノイマン環の組の同型 $(L\mathcal{R}_1 \supset L^\infty(X_1)) \simeq (L\mathcal{R}_2 \supset L^\infty(X_2))$ が自然に対応する. 無限和 $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のコンパクト群 $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への足し算による作用の軌道同値関係 $\mathcal{R}_0$ は, 同値関係の研究で重要な役割を果たす. Murray-von Neumann (1943) による超有限因子環の研究を追う形で, Dye (1959, 1963) は超有限同値関係 $\mathcal{R}_0$ の唯一性を示すなどして同値関係の研究の基礎を築いた.

一方, Murray-von Neumann は, フォンノイマン環の中心列 (つまり, その元の列 $(x_n)_n$ で任意の元 y との交換子 $[x_n, y]$ が 0 に収束するようなもの) に注目することにより, 超有限因子環 $L\mathfrak{S}_\infty$ と自由群因子環 LF_2 を区別した. この中心列は単なる技術的な道具にとどまらず, フォンノイマン環を理解する上で本質的であることが McDuff (1970) により明らかになった. 実際, McDuff は中心列を用いて, II_1 型因子環 M に対し, 同型 $M \otimes L\mathfrak{S}_\infty \simeq M$ が成り立つための必要十分条件を得た. これに従い Jones-Schmidt (1987) は, 同値関係 $\mathcal{R}$ に対し同型 $\mathcal{R} \times \mathcal{R}_0 \simeq \mathcal{R}$ が成り立つための必要十分条件を得た. そのような同値関係 $\mathcal{R}$ は安定であるという. X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ に対し, その充足群 $[\mathcal{R}]$ とは, X の自己同型 φ で $\forall x \in X\ (\varphi(x), x) \in \mathcal{R}$ となるものからなる群を意味する. $[\mathcal{R}]$ の元の列 $(V_n)_n$ で 2 条件 "$\forall A \subset X \lim_n \mu(V_n A \bigtriangleup A) = 0$", "$\forall U \in [\mathcal{R}] \lim_n \mu(\{UV_n \neq V_n U\}) = 0$" を満たすものを $\mathcal{R}$ の中心列と呼ぶ. Jones-Schmidt は, 同値関係 $\mathcal{R}$ が安定であるためには, $\mathcal{R}$ の中心列 $(V_n)_n$ で X を十分かき混ぜるようなものが存在することが必要十分であることを示した. 超有限同値関係 $\mathcal{R}_0$ は安定であり, 無限和 $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元 $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ からなる列は $\mathcal{R}_0$ の中心列であり, 空間を十分かき混ぜるものである.

Jones-Schmidt は, 自由な群作用 $G \curvearrowright X$ からできる同値関係 $\mathcal{R}_{G \curvearrowright X}$ が安定であるためには, G が内部従順であることが必要であることを示した. ここで, 可算群 G が内部従順 (inner amenable) であるとは, G 上の有限加法的確率測度 m で, G の共役に関して不変で $\forall g \in G\ m(\{g\}) = 0$ となるものが存在するときをいう. 実際, $\mathcal{R}_{G \curvearrowright X}$ が安定ならば, その中心列 $(V_n)_n$ をとり, G 上の ℓ^1 関数 $g \mapsto \mu(\{V_n = g\})$ からなる列の $\ell^\infty(G)^*_1$ での集積点 m をとると, m は G の共役に関して不変になる.

2 バウムスラッグ・ソリター群

自由な群作用 $G \curvearrowright X$ が安定であるとは, 軌道同値関係 $\mathcal{R}_{G \curvearrowright X}$ が安定であるときをいい, 可算群 G が安定であるとは, その自由な作用 $G \curvearrowright X$ で安定なものが存在するときをいう. 前節の最後で述べたように, 安定な群は内部従順である. Jones-Schmidt は, どんな内部従順群が安定になるかという問題を提示した. (内部従順だが安定でない群は存在する. 無限の中心をもつ (T) 群はそのような例である.) 筆者がこの問題を考える上で最初に取り組んだのが標題のバウムスラッグ・ソリター群 (BS 群) である. この群は, 表示 $G = G_{2,3} = \langle a, t \mid ta^2t^{-1} = a^3 \rangle$ で定義される (指数 2, 3 は色々変えてよい). BS 群は, 組み合わせ群論, 幾何学的群論で有名な例であり, 有限表示可能だが線型でない群の例として挙げられる. G は内部従順である. 実際,

列 $f_n = (n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Dirac}(a^{2^k3^{n-k}}) \in \ell^1(G)$ は G の共役で大体不変になる．一方, G は直積の形にかけないので安定であるかどうかは直ちにはわからない．結局は [5] で G の安定作用を具体的に構成することができた．そこで鍵になるのは次の作用である: 半直積 $\Gamma = \mathbb{Z}[1/6] \rtimes \mathbb{Z}$ を, $1 \in \mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}[1/6]$ に 3/2 倍で作用するように定義する．対応 $a \mapsto (1,0)$, $t \mapsto (0,1)$ により, 全射 $G \to \Gamma$ を得る．作用

$$\Gamma \curvearrowright X := \prod_{\mathbb{Z}_-}\{0,1,2\} \times \prod_{\mathbb{N}}\{0,1,2,3,4,5\} \times \prod_{\mathbb{Z}_+}\{0,1\}$$

を定義したい．そこで, X の各元 $((x_{-k})_{-k}, (z_m)_m, (x_l)_l)$ を形式和 $\sum_{k=1}^{\infty} x_{-k}(3/2)^{-k} + \sum_{m=0}^{\infty} 6^m z_m + \sum_{l=1}^{\infty} x_l(3/2)^l$ と同一視する．a, t の X への作用をそれぞれ, 形式和の表示に関して “プラス 1”, “3/2 倍”で定義する．すると, この作用は X の通常の積測度を保存する．さらに, 和 $v_n = (n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n} a^{2^{n+k}3^{2n-k}}$ はフォンノイマン環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ の中心列になる．(理由: v_n は a と交換し, 関係式 $ta^2t^{-1} = a^3$ により t とも大体交換する．a は X の一つ目と三つ目の積の座標を動かさず, 二つ目の積に加算機として作用することに注意する．v_n の各項の指数が 6^n を含むことから, v_n は二つ目の積の最初の n 個の座標を動かさない．これにより v_n が $L^\infty(X)$ の各元と大体交換することが従う.) この事実は, 安定作用の構成において直接は使われないが, 鍵となることを期待させるには十分だと思う．個人的にはこの例はお気に入りで, もう少し一般的な枠組みで捉えることができないものかと思っている．この例に拘るのは, これが具体的な安定作用の数少ない例の一つだからである.

全ての頂点群と辺群が $\mathbb{Z}$ と同型になるような群グラフの基本群を GBS 群 (generalized BS groups) という．表示 $\langle\, a, s, t \mid sa^2s^{-1} = a^3,\ ta^5t^{-1} = a^7 \,\rangle$ で定義される群はその例である.

問題 1. GBS 群に対し, 上記の作用 $\Gamma \curvearrowright X$ に対応するものは? そして, それを使って, GBS 群の安定作用を具体的に構成せよ.

ちなみに, GBS 群が安定作用をもつことはすでにわかっている ([10])．これは, G を GBS 群としたとき, 頂点群 $\langle a \rangle$ が大体 G の中心みたいな振る舞いをすることと, G がホーエップの性質をもつので無限の相対 (T) 部分群をもたないことによる.

3 中心拡大

無限の中心をもつ群は内部従順である．そこで筆者は, 無限の中心をもつ群の安定性について考察した ([6, 7, 8])．その過程で浮上した問題が, “G を可算群, C を G の中心に含まれる部分群としたとき, G/C が安定ならば G は安定か?”である．この問題の難しさは, 確率測度空間への “自由な”群作用の構成はそもそも容易ではないということに由来する．しかしながら, 安定作用 $\Gamma := G/C \curvearrowright X$ が与えられ, G を X に商写像 $G \to \Gamma$ を通して作用させたとき, 実は, 変換亜群 $G \ltimes X$ の安定性から G の安定性が従う．ここで, $G \ltimes X$ が安定であるとは, 同型 $(G \ltimes X) \times \mathcal{R}_0 \simeq G \ltimes X$ が成り立つことを意味する．G の作用を具体的に構成する必要がなくなるという意

味で, 一見するとこれはかなりの負担減である. さて, $G \ltimes X$ の安定性が目標であるが, 実はこれでもまだ難しくて, たぶん一般には正しくないと思う. 実際に証明できるのは次の主張である: $(*)$ 安定作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の適当な拡張 (extension) $\Gamma \curvearrowright Z$ をとると, 変換亜群 $G \ltimes Z$ は安定になる. ゆえに, G は安定である ([8]).

作用の拡張をとる必要がある理由は次の通り: 今, $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ が安定で, 亜群の中心拡大 $1 \to C \times X \to G \ltimes X \to \mathcal{R} \to 1$ が与えられている. 簡単のため, 亜群ではなく群の設定で説明する. 中心拡大 $1 \to C \to G \to \Gamma \to 1$ と分解 $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ があるとし, さらに, 切断 $s\colon \Gamma \to G$ で $\Gamma_0 \times \{e\}$ への制限が準同型になっているものがとれたとする. (分解 $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ は分解 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_1$ に対応する. 群 $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元からなる $\mathcal{R}_0$ の中心列の適当なリフトを考えることにより, $\mathcal{R}_0$ の任意の中心拡大はスプリットすることがわかる.) G の中心列を探してみる. $G_0 = s(\Gamma_0 \times \{e\})$ とおく. G_0 の中心列で G の中心列になるものを見つけられないだろうか? G_0 は C と可換なので, G_0 の中心列で $s(\{e\} \times \Gamma_1)$ と可換なものがとれればよい. そして, G_0 と切断 $s(\{e\} \times \Gamma_1)$ との可換性は, 各 $g \in G_0$ に対し定義される準同型 $\sigma_g\colon \Gamma_1 \to C$, $\sigma_g(\gamma) = [s(\gamma), g]$ により記述される. まとめると, G_0 の中心列 $(g_n)_n$ で σ_{g_n} が $n \to \infty$ でだんだん自明になっていくようなものがとれれば, それは G での中心列になる. これが亜群の設定で実現すれば, それは $G \ltimes X$ が中心列をもつことを意味する. Jones-Schmidt により $G \ltimes X$ の安定性が従う.

それでは, 準同型 σ_g をだんだん自明に近づけていくにはどうすればよいだろうか? ここで, 作用の拡張を考える必要が出てくる. 一般に, 群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ と 1-コサイクル (つまり, 亜群の準同型) $\alpha\colon \Gamma \times X \to C$ に対し, 歪積作用 $\Gamma \curvearrowright Z := X \times C$ が $\gamma(x, c) = (\gamma x, \alpha(\gamma, x)c)$ で定義される. この作用は, 射影 $p\colon Z \to X$ に関して作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の拡張になる. $\varphi\colon Z \to C$ をもう一つの射影とすると, 等式 $\alpha(\gamma, p(z)) = \varphi(\gamma z)\varphi(z)^{-1}$ が成り立つ. これは, α が拡張 $\Gamma \curvearrowright Z$ においてコバウンダリーであることを意味する. つまり, どんな 1-コサイクルも適当な拡張をとれば自明にすることができる. 主張 $(*)$ で作用の拡張をとる必要があるのは, このことを σ_g に対応するものに対し適用するためである.

主張 $(*)$ の一般化を述べるために, ここで 2-コサイクルについて簡単に触れておく. よく知られているように, 群 Γ と加群 C に対し, コホモロジー群 $H^2(\Gamma, C)$ の元と中心拡大 $1 \to C \to G \to \Gamma \to 1$ の間には一対一対応がある. 2-コサイクル $\sigma \in Z^2(\Gamma, C)$ とは, 写像 $\sigma\colon \Gamma \times \Gamma \to C$ で等式 $\sigma(gh, k)\sigma(g, h) = \sigma(g, hk)\sigma(h, k)$ を満たすものをいう. 中心拡大に付随する 2-コサイクル σ は, 切断 $s\colon \Gamma \to G$ を一つとって, 等式 $\sigma(g, h)s(gh) = s(g)s(h)$ により定義される. この一対一対応は, 亜群の設定に一般化される (Series 1981). 一般に, 同値関係 $\mathcal{R}$ は部分的に定義される積の構造をもつ: $(x, y)(y, z) = (x, z)$. 2-コサイクル $\sigma \in Z^2(\mathcal{R}, C)$ とは, $\mathcal{R}$ の元の組 (g, h) で積 gh が定まるものに対し C の元を対応させる可測写像で, 同様の等式を満たすものである. 同値関係 $\mathcal{R}$ が自由な群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ の軌道同値関係 $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ である場合, 射影 $(gx, x) \mapsto g$ を通して, 埋め込み $Z^2(\Gamma, C) \to Z^2(\mathcal{R}, C)$ が得られる.

一般に, X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ による空間 Z への作用とは, Z から X への射影が備

わっている状況下で, $\mathcal{R}$ の元 (y,x) はファイバー間の同型 $Z_x \to Z_y$ を与え, かつ, 作用としての然るべき公理を満たすものを意味する. 同値関係の作用 $\mathcal{R} \curvearrowright Z$ から得られる軌道同値関係のことを $\mathcal{R}$ の拡張と呼ぶことにする. これらの言葉を用いて, 群作用の言葉を排除し同値関係の言葉だけで主張 $(*)$ を述べると, 次のようになる:

問題 2. C を可算可換群, $\mathcal{R}$ を安定同値関係とし, $\sigma \in Z^2(\mathcal{R}, C)$ をとる. $\mathcal{R}$ の拡張 $\tilde{\mathcal{R}}$ で, $\tilde{\mathcal{R}}$ の $\sigma \in Z^2(\tilde{\mathcal{R}}, C)$ による中心拡大が安定になるものを構成できるか?

実際, 主張 $(*)$ において, $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ とおくと, 拡張 $\Gamma \curvearrowright Z$ は $\mathcal{R}$ の Z への作用を誘導し, その同値関係はちょうど $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright Z}$ である. $\tilde{\mathcal{R}} := \mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright Z}$ とおいて, $\sigma \in Z^2(\Gamma, C)$ を中心拡大 $1 \to C \to G \to \Gamma \to 1$ に付随する 2-コサイクルとすると, $G \ltimes Z$ は同値関係 $\tilde{\mathcal{R}}$ の $\sigma \in Z^2(\Gamma, C) \subset Z^2(\tilde{\mathcal{R}}, C)$ による中心拡大である.

主張 $(*)$ の証明では, σ が群のコサイクルからくるということを本質的に用いている. 二つの自由な群作用 $\Gamma \curvearrowright X$, $\Lambda \curvearrowright Y$ が同型 $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X} \simeq \mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright Y}$ を満たす場合, $Z^2(\Lambda, C)$ の元は $\mathcal{R}_{\Gamma \curvearrowright X}$ 側から見ると群のコサイクルからこないものだが, このようなコサイクルに対しては問題 2 の結論は $\mathcal{R}_{\Lambda \curvearrowright Y}$ 側から見た主張 $(*)$ から従う.

4 同値関係の高次コサイクル

Γ を可算群, C をポーランド加群とする. 非負整数 n に対し, $C^n(\Gamma, C)$ で全ての写像 $\sigma\colon \Gamma^n \to C$ からなる加群を表す. コバウンダリー写像 $\partial^n\colon C^n(\Gamma, C) \to C^{n+1}(\Gamma, C)$ が定義され, $Z^n(\Gamma, C) := \ker \partial^n$ の元は n-コサイクルと呼ばれる. そして, コホモロジー群 $H^n(\Gamma, C) := \ker \partial^n / \operatorname{im} \partial^{n-1}$ が定義される. 同様に, 同値関係 $\mathcal{R}$ に対しても, $\mathcal{R}$ の元からなる組 $(g_0, \ldots, g_n)$ で積 $g_i g_{i+1}$ が定義されるものに対し C の元を対応させるような可測写像 σ を考え, そのような写像 σ からなる加群を $C^n(\mathcal{R}, C)$ で表す. 群の場合と全く同じ式でコバウンダリー写像が定義され, n-コサイクルからなる加群 $Z^n(\mathcal{R}, C)$ とコホモロジー群 $H^n(\mathcal{R}, C)$ が定義される.

問題 2 の結論は, $\tilde{\mathcal{R}}$ の $\sigma \in Z^2(\mathcal{R}, C) \subset Z^2(\tilde{\mathcal{R}}, C)$ による中心拡大 $1 \to C \times X \to \mathcal{G}_\sigma \to \tilde{\mathcal{R}} \to 1$ を考えると, 分解 $\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{R}_0 \times \mathcal{G}_1$ が得られることを主張する. この分解は分解 $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_0 \times \tilde{\mathcal{R}}_1$ を誘導し, $\mathcal{G}_1$ の単位元の空間を X_1 で表すと, 中心拡大 $1 \to C \times X_1 \to \mathcal{G}_1 \to \tilde{\mathcal{R}}_1 \to 1$ を得る. この中心拡大に付随する 2-コサイクルを $\tau \in Z^2(\tilde{\mathcal{R}}_1, C)$ で表すと, 射影 $\tilde{\mathcal{R}} \to \tilde{\mathcal{R}}_1$ が誘導する射 $H^2(\tilde{\mathcal{R}}_1, C) \to H^2(\tilde{\mathcal{R}}, C)$ による $[\tau]$ の像が $[\sigma]$ である. このように問題 2 の結論を言い換えると, n-コサイクルへの一般化が定式化できる:

問題 3. C を可算可換群 (または, 一般にポーランド可換群) とし, $\mathcal{R}$ を安定同値関係とする. $n \geq 2$ とし, $\sigma \in Z^n(\mathcal{R}, C)$ をとる. $\mathcal{R}$ の拡張 $\tilde{\mathcal{R}}$ とその分解 $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_0 \times \tilde{\mathcal{R}}_1$ で, 射影 $\tilde{\mathcal{R}} \to \tilde{\mathcal{R}}_1$ が誘導する射 $H^n(\tilde{\mathcal{R}}_1, C) \to H^n(\tilde{\mathcal{R}}, C)$ の像に $[\sigma]$ が含まれるようなものを構成できるか?

この結論は, 安定同値関係 $\mathcal{R}$ の任意の n-コサイクルは, 適当な拡張を経れば, ある超有限直積因子上で無効化されることを主張する. ちなみに, $n = 1$ で C が可算

無限群の場合は正しくない. 例えば, 自由作用 $C \curvearrowright X$ をとり, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{C \curvearrowright X}$ とおく. 1-コサイクル $\alpha\colon \mathcal{R} \to C$ を $\alpha(cx, x) = c$ で定義する. $\ker \alpha$ は自明であり, たとえ $\mathcal{R}$ の拡張 $\tilde{\mathcal{R}}$ をとったとしても, その上でも $\ker \alpha$ は大きくなり得ない. よって, $\tilde{\mathcal{R}}$ のどんな超有限直積因子をとってきても, その上で α が消えることはあり得ない. 一方, C が有限のときは, 前節で述べたように, 任意の 1-コサイクル $\alpha\colon \mathcal{R} \to C$ に対し, $\mathcal{R}$ の適当な拡張をとれば α はコバウンダリーになり $[\alpha] = 0$ となるので問題 3 の結論は正しい.

問題 3 の結論を支持する根拠は正直何もない. 同値関係 $\mathcal{R}$ が分解 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_1$ をもつとし, キュネスの公式 $H^n(\mathcal{R}) \simeq \bigoplus_{k=0}^n (H^k(\mathcal{R}_0) \otimes H^{n-k}(\mathcal{R}_1))$ が成り立つとしよう. $\mathcal{R}_0$ は $\mathbb{Z}$ の自由作用の軌道同値関係になるので, $\mathcal{R}_0$ のコホモロジーは $\mathbb{Z}$ のコホモロジーとして表せる. よって, $k \geq 2$ ならば $H^k(\mathcal{R}_0) = 0$ となり, $n \geq 1$ ならば $H^n(\mathcal{R}) \simeq (H^0(\mathcal{R}_0) \otimes H^n(\mathcal{R}_1)) \oplus (H^1(\mathcal{R}_0) \otimes H^{n-1}(\mathcal{R}_1))$ となる. もし 2 項目が消えれば, それは $\mathcal{R}$ の n-コサイクルが $\mathcal{R}_1$ の n-コサイクルからくることを意味する. $n = 2$ のとき, 主張 $(*)$ の証明の方針は, $\mathcal{R}$ の適当な拡張をとり 2 項目を消すということに大体対応する. $n \geq 3$ のときも, 拡張をとれば 2 項目を消せるのだろうか?

さらに付け加えると, 同値関係に対してキュネスの公式は成り立たない (分解 $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0$ と $n = 2$ に対して不成立). 同値関係の直積のコホモロジーはキュネスの公式ほど単純ではないので, それをどう捉えるべきかも大きな問題である.

C を可算可換群, または, $\mathbb{R}$ など適当な距離をもつ加群としよう. n-コサイクル $\sigma \in Z^n(\Gamma, C)$ が有界であるとは, 写像 $\sigma\colon \Gamma^n \to C$ の像が有界であるときをいう. 2-コサイクル $\sigma \in Z^2(\Gamma, C)$ の有界性は, 対応する中心拡大 G_σ が直積 $C \times \Gamma$ に近いことを示唆する. このことは等式 $\sigma(g, h)s(gh) = s(g)s(h)$ から窺える. 実際, C と Γ が有限生成で σ が有界ならば, G_σ と $C \times \Gamma$ は擬等長, つまり, ケーリーグラフが大体等長になることが示される ([2, §9.19]). 一方, 同値関係の設定で 2-コサイクルの有界性がもたらすご利益について, 筆者は何もアイデアをもっていない. 実際, 無限の中心をもつ (T) 群で, その中心に対する 2-コサイクルが有界になるものが存在する. 性質 (T) と同値関係の中心拡大のスプリッティングはお互い遠い位置にあるので, そのような群に対し, 2-コサイクルの有界性からスプリッティングに近いという状況を導くのは難しいだろう.

次に述べる定理は興味深い: $n \geq 2$ のとき, 任意の語双曲群 Γ に対し, $H^n(\Gamma, C)$ の任意の元は有界なコサイクルで代表される (Mineyev [9]). $C = \mathbb{R}$ のときの定理は, Gromov が "Hyperbolic groups" (1987) で述べていた. $n = 2$ のときの証明は比較的短く, 線型の等周不等式を用いて得られる (Neumann-Reeves 1997, [2, §9.19]). この定理は, 語双曲群のノビコフ予想の証明 (Connes-Moscovici 1990) で応用された.

一方, 語双曲群の作用の軌道同値関係を主な例とする, 双曲的同値関係の研究は Adams (1994), Kaimanovich (2004) によってなされ, そのような同値関係は直積の形にかけないなどの結果が得られていた. 彼らのアプローチは, 基本的には, 双曲群がもつ性質を同値関係で定式化し, 代数的・幾何的な手法が使えない代わりに, 境界への作用を用いてそれを実現するというものである. 最近, Bowen [1] はこの境界へ

の作用を用いたアプローチをより精密なものにし, 双曲的同値関係の部分同値関係を扱う道具立てを整備した. その結果, 双曲的同値関係がティッツ択一性を満たすことを示した. つまり, その部分同値関係は本質的には, 超有限であるか, もしくは自由群の作用からできる軌道同値関係を含むかのどちらかであることを示した. 後者の性質を示す技術はまだ多くないので, この意味でも Bowen の結果は興味深い. さて, ここまで双曲的同値関係について整備されてきたのだから, Mineyev の結果の同値関係版も期待できるのではないだろうか?

問題 4. C を可算可換群, または, $\mathbb{R}$ など適当な距離をもつ加群とする. $\mathcal{R}$ を Bowen [1] の意味で双曲的な同値関係とする. $n \geq 2$ のとき, $H^n(\mathcal{R}, C)$ の任意の元は有界なコサイクルで代表されるか?

さらに, 同値関係の双曲性は, 語双曲群の有界コホモロジーによる特徴付け (Gersten, Mineyev 2001) とも関連するだろうか?

最後に, 同値関係の 2 次コホモロジー群に関する最近の結果について触れておく. Jiang [3] は次を示した: $G \curvearrowright \mathbb{T}^G$ を無限 (T) 群のベルヌーイ作用とし, $X = \mathbb{T}^G$ とおく. このとき, 自然な射 $\Phi\colon H^2(G, \mathbb{T}) \to H^2(G \ltimes X, \mathbb{T})$ は単射である. さらに, $\widehat{X}$ を G-加群と見なす. 射 $\Psi\colon H^2(G, \widehat{X}) \to H^2(G \ltimes X, \mathbb{T})$ が $\Psi(\sigma) = [((g, hx), (h, x)) \mapsto \sigma(g, h)(x)]$ により定義されるが, これもまた単射であり, Φ と Ψ の像の交わりは 0 である. 証明では, 積作用 $G \curvearrowright X^2, X^4$ が $\mathbb{T}$-コサイクル超剛的であることを用いる. $\widehat{X} \simeq \mathbb{Z}G$ なので, もし $H^2(G, \mathbb{Z}G) \neq 0$ ならば $H^2(G, \mathbb{T}) \subsetneq H^2(G \ltimes X, \mathbb{T})$ であることが従う (2-コサイクル超剛性は成り立たない!). このような (T) 群 G の存在も [3] で示されている. しかしながら, $n \geq 2$ のとき, コホモロジー群 $H^n(\mathcal{R}, C)$ で 0 でないものを完全に記述する結果は未だ得られていないようである. この節では, 同値関係の高次コサイクルについていくつかの問題を述べてきたが, 高次コホモロジー群の意義について筆者は答えをもっておらず, これも大きな問題だと思う.

5 中心拡大の一般化と広大従順性

群の中心拡大の話に戻る. G を可算群とし, C を G の中心に含まれる部分群とする. [6] では次の二つの結果を得た: (i) 組 (G, C) が性質 (T) をもたなければ, G は安定である. (ii) 組 (G, C) が性質 (T) をもち, G が安定ならば, G/C も安定である. 3 節で述べた結果 “G/C が安定ならば G も安定である” と合わせると, 次の主張が従う: $(\star)$ G が安定であるためには, 組 (G, C) が性質 (T) をもたない, または, G/C が安定であることが必要十分である.

(i) の証明のあらすじは次の通り: 組 (G, C) が (T) をもたないので, G の既約ユニタリ表現の列 $(\pi_i)_i$ で, $\pi_i \to 1_G$ であって, $\pi_i(C)$ は 0 でない不変ベクトルをもたないものがとれる. シューアの補題より $\pi_i(C) \subset \mathbb{T}$ である. $\mathbb{T}$ のコンパクト性を用いると, 部分列をとった後, C の元の列 $(c_i)_i$ で, $j < i$ ならば $\pi_j(c_i)$ は 1 に近いが, $\pi_i(c_i)$ は 1 からある程度離れているものがとれる. π_i のガウシアン作用を $G \curvearrowright X_i$ で表す. こ

の作用は, 包含 $\pi_i \subset (G \curvearrowright L_0^2(X_i))$ を満たし π_i の性質をよく反映する. $X = \prod_i X_i$ とおき, 積作用 $G \curvearrowright (X, \mu)$ を考える. 列 $(c_i)_i$ は変換亜群 $G \ltimes X$ の中心列になる. なぜなら, $(c_i)_i$ の一つ目の性質から $\forall A \subset X\ \lim_i \mu(c_i A \triangle A) = 0$ が従い, c_i は G の中心に属するので, 今示したことと併せて $\forall U \in [G \ltimes X]\ \lim_i \mu(\{Uc_i \neq c_i U\}) = 0$ が従う. そして, $(c_i)_i$ の二つ目の性質から $(c_i)_i$ は X を十分かき混ぜることが従う. ゆえに Jones-Schmidt が適用できて, $G \ltimes X$ は安定である.

(ii) の証明のあらすじは次の通り: 自由な安定作用 $G \curvearrowright X$ をとる. $\mathcal{R}_{G \curvearrowright X}$ の中心列 $(V_n)_n$ をとる. V_n は $L^2(G \ltimes X)$ の単位ベクトルと見なせて, 中心列であることから, $(V_n)_n$ は共役による表現 $G \curvearrowright L^2(G \ltimes X)$ に関して大体不変になる. 組 (G, C) が (T) をもつので, C-不変ベクトル $U_n \in L^2(G \ltimes X)$ で V_n に近いものがとれる. V_n は元々 $\mathcal{R}_{G \curvearrowright X}$ の充足群の元なので, U_n も大体そうだとしてよい. 作用 $C \curvearrowright X$ のエルゴード成分の空間を Z で表すと, 作用 $G/C \curvearrowright Z$ を得る. U_n は C-不変なので, $\mathcal{R}_{G/C \curvearrowright Z}$ の充足群の元 $\bar{U}_n$ を誘導し, 列 $(\bar{U}_n)_n$ は $\mathcal{R}_{G/C \curvearrowright Z}$ の中心列になる. ゆえに Jones-Schmidt が適用できて, 作用 $G/C \curvearrowright Z$ は安定である.

さて, 主張 $(\star)$ をより広い枠組みで一般化したい. G を可算群とし, N を G の正規部分群とする. 次の条件 (†) を考える: 作用 $G \ltimes N \curvearrowright N$ は不変ミーン m をもつ. ここで, G は N に共役で作用し, N は N に左かけ算で作用する. ミーンとは有限加法的確率測度のことである. この条件は Ozawa-Popa (2010), Tucker-Drob [10] らにより考察されている. N が G の中心に含まれるならば, 条件 (†) は満たされる. そして, 条件 (†) の下で N は従順であり, N が無限ならば G は内部従順である. 注目すべきことに, 条件 (†) の下で G/N 上の任意の共役不変ミーンは G 上の共役不変ミーンに持ち上がる ([10]). 実際, $m_{G/N}$ を G/N 上の共役不変ミーンとすると, G 上の共役不変ミーン $m_G(A) = \int_{G/N} m(g^{-1}A \cap N)\, dm_{G/N}([g])$, $A \subset G$ が得られ, これの G/N への射影は $m_{G/N}$ である. m_G がウェルデファインドであることを示すのに条件 (†) を用いる. この事実は, 3 節で述べた結果 “G/C が安定ならば G も安定である”がこの設定でも成り立つことを期待させる.

問題 5. 主張 $(\star)$ を, 作用 $G \ltimes N \curvearrowright N$ が不変ミーンをもつような組 $N \lhd G$ に対する主張に一般化せよ.

ただ, 中心拡大の設定と比較するとかなり一般化された設定であり, 亜群の中心拡大も使えないし, シューアの補題も使えないなど問題山積である.

実は最近, このような組 $N \lhd G$ のある例が注目されている. Σ を可算集合とする. 群作用 $G \curvearrowright \Sigma$ が従順であるとは, Σ 上の G-不変ミーンが存在するときをいう. $\mathscr{P}_f(\Sigma)$ で Σ の有限部分集合全体を表す. これは, 群 $\bigoplus_\Sigma \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と自然に同一視される. 作用 $G \curvearrowright \Sigma$ が広大従順 (extensively amenable) であるとは, 作用 $G \curvearrowright \mathscr{P}_f(\Sigma)$ の不変ミーン m で $\forall x \in \Sigma\ m(\{\, A \in \mathscr{P}_f(\Sigma) \mid x \in A \,\}) = 1$ となるものが存在するときをいう. 実は, この条件は作用 $G \ltimes \mathscr{P}_f(\Sigma) \curvearrowright \mathscr{P}_f(\Sigma)$ の従順性と同値である. 基本的な事実として, 任意の従順群の作用は広大従順であり, また, 広大従順な作用は従順である. 後者は, 写像 $\ell^\infty(\Sigma) \to \ell^\infty(\mathscr{P}_f(\Sigma) \setminus \{\emptyset\})$, $f \mapsto [A \mapsto |A|^{-1} \sum_{x \in A} f(x)]$ を使って示される ([4, 2.1]). 広大従順性は, Juschenko-Monod (2013) によるカン

トール極小系からくる充足群の従順性の証明で導入された．一般に, 広大従順な作用 $G \curvearrowright \Sigma$ と部分群 $H < G \ltimes \mathscr{P}_f(\Sigma)$ に対し, $H \cap (G \times \{0\})$ が従順ならば H は従順になる ([4, 1.4])．Juschenko-Monod はこの事実を適当な文脈で応用し, 件の群の従順性を得た．その後, 広大従順性は他の群の従順性を示すのにも応用され, その一般論が整備されつつある (Juschenko-Nekrashevych-de la Salle 2013, [4])．

Γ を可算群, Σ を無限可算集合とし, 作用 $\Gamma \curvearrowright \Sigma$ は広大従順であるとする．$G := \Gamma \ltimes \mathscr{P}_f(\Sigma)$ とおくと, 組 $\mathscr{P}_f(\Sigma) \lhd G$ は条件 (†) を満たし, G は内部従順である．ユニタリ表現 $G \curvearrowright \ell^2(\Sigma)$ を考えると, 組 $(G, \mathscr{P}_f(\Sigma))$ は (T) をもたないことがわかる．

問題 6. 上記の仮定の下で, 群 $G = \Gamma \ltimes \mathscr{P}_f(\Sigma)$ はいつ安定になるか?

この問題は問題 5 を考える上で避けては通れない．この内部従順群 $G = \Gamma \ltimes \mathscr{P}_f(\Sigma)$ は, これまで安定であることが示された内部従順群とは違う種類のものである．これまでに得られた安定群は, 大体何らかの意味で中心列をもっている．そして, そのような群の安定性は, 上記 (i) の主張またはそれをちょっと一般化したものを経由して得られる．安定作用を得る上でポイントになるのは, そのような中心列の元は既約ユニタリ表現でスカラーになるという性質である．(例えば, バウムスラッグ・ソリター群 $G = \langle a, t \mid ta^2t^{-1} = a^3 \rangle$ の場合, 準同型 $G \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto 0$, $t \mapsto 1$ の核を N とかくと, 任意の $g \in N$ に対し, 大きい $n \in \mathbb{N}$ をとると a^{6^n} は g と交換する．よって, $(a^{6^n})_n$ は N の中心列である．そして, G/N は従順であり G と N の差はそんなに大きくない.) 一方, 群 $G = \Gamma \ltimes \mathscr{P}_f(\Sigma)$ は一般には中心列をもたない．実際, G の共役不変ミーンは, $\mathscr{P}_f(\Sigma)$ 上の "複数個" のディラック関数の和からなる列をとり, その極限として得られる．つまり, 群ではなく, 群環 $\mathbb{R}G$ を考えないと中心列は得られない．G の安定性を示すには新しいアイデアが必要だろう．また, 組 $(G, \mathscr{P}_f(\Sigma))$ は (T) をもたないので, G が安定でないことを示すには, (T) によらない, 安定性に対する新たな障害を見出す必要がある．そういうわけで, この群はこれからの安定群の研究においてよい題材になると思う．

6 諸問題

見た目はシンプルだが, なかなか突破口を見出せていない問題を二つ挙げる．

問題 7. G を可算群, N を G の正規部分群とし, G/N は従順であるとする．N が安定ならば, G は安定だろうか?

"安定" を "内部従順" に代えた主張は容易に示すことができる．次の主張は, 問題 7 の結論が正しいことを強く支持するものである: 上記の G と N に対し, 自由作用 $G \curvearrowright X$ で制限 $N \curvearrowright X$ が安定であるようなものが存在すれば, G は安定である ([10])．具体的な群に対しては, この主張を適用して G の安定性を得ることが多い．実際, GBS 群の安定性の証明ではこれを使う．N の自己同型 α により, G が半直積 $N \rtimes \langle \alpha \rangle$ の形にかける場合ですら未解決である．

問題 8. 安定作用 $G \curvearrowright X$ に対し, 積作用 $G \curvearrowright X \times X$ は安定だろうか?

もしこれが肯定的に解ければ, 問題 7 の解決への糸口となる. 例えば $G = N \rtimes \langle \alpha \rangle$ とかけて, 安定作用 $N \curvearrowright X$ があるとすると, α でねじった積作用 $N \curvearrowright \prod_{G/N} X$ の安定性が期待でき, この作用は G の作用に拡張できるので, G の安定性を得る.

最後に, Jones-Schmidt (1987) の論文で挙げられた問題のいくつかが未解決であることを指摘しておきたい. 強エルゴード分解の存在, 充足群が閉であることの力学系的特徴付け及びその内部従順群との関連など興味深いものが残されている.

参考文献*

[1] L. Bowen, Equivalence relations that act on bundles of hyperbolic spaces, preprint, arXiv:1506.02727.

[2] C. Druţu and M. Kapovich, *Geometric group theory*, preprint, to appear, available at `https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/papers.html`

[3] Y. Jiang, A remark on $\mathbb{T}$-valued cohomology groups of algebraic group actions, *J. Funct. Anal.* **271** (2016), 577–592.

[4] K. Juschenko, N. Matte Bon, N. Monod, and M. de la Salle, Extensive amenability and an application to interval exchanges, available online in *Ergodic Theory Dynam. Systems*, arXiv:1503.04977.

[5] Y. Kida, Stability in orbit equivalence for Baumslag-Solitar groups and Vaes groups, *Groups Geom. Dyn.* **9** (2015), 203–235.

[6] Y. Kida, Stable actions of central extensions and relative property (T), *Israel J. Math.* **207** (2015), 925–959.

[7] Y. Kida, Splitting in orbit equivalence, treeable groups, and the Haagerup property, preprint, to appear in the Proceedings of the MSJ-SI conference in 2014, arXiv:1403.0688.

[8] Y. Kida, Stable actions and central extensions, preprint, arXiv:1604.04756.

[9] I. Mineyev, Straightening and bounded cohomology of hyperbolic groups, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2011), 807–839.

[10] R. Tucker-Drob, Invariant means and the structure of inner amenable groups, preprint, arXiv:1407.7474.

* 文献の参照は最近のものを中心にし, 最小限にとどめました.