Bass-Serre 理論と Stallings の定理について

木田　良才*

京都大学大学院理学研究科

1　はじめに

Bass-Serre 理論とは, 木 (tree) に作用する群の構造と融合積等の群の分解との間の関連性を記述し, 相互間の辞書的役割を果たす理論である. この辞書を用いることにより, 組み合わせ群論で重要な研究対象である融合積等を木という幾何学的対象を通して研究することが可能になる. 2 節では, Bass-Serre 理論の基本的文献である, Serre による著書 [7] に倣ってこの辞書の一部を紹介する. 3 節では, Cayley グラフのエンド数と有限群上の融合積または HNN 拡大への分解との間の関係を記述した Stallings の定理を紹介する.

2　木に作用する群についての一般論

可縮な 1 次元単体複体を**木 (tree)** という. 連結な 1 次元単体複体 X が木であるためには, X が輪 (circuit) のない 1 次元単体複体であることが必要十分である ([7, I.2.3, Corollary 1 to Proposition 13]). ここで, X の輪とは次のように定義される X の部分グラフを意味する. $n \geq 3$ を整数とする. $v_1, \ldots, v_n$ を X の相異なる頂点で, 各 $i = 1, \ldots, n-1$ に対し v_i と v_{i+1} が辺で結ばれ, v_n と v_1 が辺で結ばれるようなものとする. このとき, $v_1, \ldots, v_n$ と上で述べた n 個の辺からなる X の部分グラフを長さ n の X の**輪 (circuit)** と呼ぶ.

本節では, Serre の著書 [7] の序文で説明されている Bass-Serre 理論の動機の一つを紹介した後, 木に作用する群についての一般論を述べる. 2.2 節と 2.3 節で述べられる一般論は, 次のようにまとめられる. 融合積や HNN 拡大の形に分解される群は木に作用する. 逆に, 群が木に作用し, その商グラフが特別な形をしているとき, その群は融合積または HNN 拡大の形に分解される. 2.4 節では, 木に自由に作用する群は自由群であるという事実について述べる.

2.1　Serre の著書 [7] から

Serre の著書 [7] の序文では, この著書の目的が次のように述べられている.

> The starting point of this work has been the theorem of Ihara, according to which every torsion-free discrete subgroup G of $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ is a *free* group. This striking result was at the time (1966) the only one known concerning the structure of discrete subgroups of p-adic groups.
>
> Ihara's proof is combinatorial; it uses, in a somewhat mysterious way, a decomposition of $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ as an amalgam of two copies of $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$. But topology suggests a natural way to prove that a group G is free: it suffices to make G act freely ("without fixed points") on a tree X; the group G may then be identified with the fundamental group $\pi_1(G\backslash X)$ of the quotient graph $G\backslash X$, a group which is obviously free. Interpreted from this point of view, Ihara's proof amounts to taking for X the tree associated with the amalgam mentioned above; this tree, *the*

*kida@math.kyoto-u.ac.jp

tree of $\mathbf{SL}_2$ *over the field* $\mathbb{Q}_p$, then appears as a very special case of a *Bruhat-Tits building*, the p-adic analogue of the symmetric homogeneous spaces of real Lie groups.

文中の Ihara の定理とは, [6] で証明されているものである. そこでは, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ のねじれをもたない離散部分群が自由群であるという上述の事実以外にも, その離散部分群が余コンパクトである場合, その余測度と自由群としての階数の間の関係式やそのような離散部分群の構成法が論じられている. [7] の一つの目的は, この Ihara の仕事をもっと一般的かつ統一的な視点で取り扱うことであったと考えられる. 実際, [7] の Chapter II では, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ だけでなく, 様々な係数に関して定義される $\mathbf{SL}_2$ の分解について論じられている.

2.2 融合積とそれが作用する木

二つの群 A, B に対し, その自由積を $A * B$ とかく. 自由積の定義については, [5, Section 1.2] を参照せよ. A と B は自然に $A * B$ の部分群と見なせることに注意する.

融合積とは, 自由積の一般化である. A, B, L を群とし, $\phi\colon L \to A$ と $\psi\colon L \to B$ を単射準同型とする. 自由積 $A * B$ を考える. $A * B$ の部分集合 $\{\, \phi(g)\psi(g)^{-1} \mid g \in L \,\}$ で生成される $A * B$ の正規部分群を N とかき, 商群 $(A * B)/N$ を (ϕ, ψ に関する) A と B の L 上の**融合積**という. 混乱がなければ, ϕ, ψ を省略して, この群を $A *_L B$ とかく. $A *_L B$ は, 表示

$$\langle\, A,\ B \mid \text{任意の } g \in L \text{ に対し } \phi(g) = \psi(g) \,\rangle$$

で定義されるという言い方もする. ϕ, ψ が単射でない場合も同様にして融合積が定義されるが, 単射性を仮定すると, A, B, L を $A *_L B$ の部分群と見なすことができる. 以下では, ϕ, ψ が単射であるような融合積しか扱わない.

融合積は, 次に述べる van Kampen の定理で現れる.

定理 2.1 (Van Kampen の定理)**.** X, Y, Z を弧状連結な位相空間とし, $i\colon Z \to X$ と $j\colon Z \to Y$ を連続かつ開となる単射な写像とする. 非交叉和 $X \sqcup Y$ において, 各 $z \in Z$ に対し, $i(z) \in X$ と $j(z) \in Y$ を同一視することで得られる位相空間を W とかく. $i_*\colon \pi_1(Z) \to \pi_1(X)$ と $j_*\colon \pi_1(Z) \to \pi_1(Y)$ を誘導される準同型とする. このとき, X, Y それぞれからの W への埋め込みにより誘導される準同型 $f\colon \pi_1(X) * \pi_1(Y) \to \pi_1(W)$ は全射であり, その核は $\{\, i_*(a)j_*(a)^{-1} \mid a \in \pi_1(Z) \,\}$ で生成される $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ の正規部分群に一致する.

証明は [5, Theorem 1.20] を参照せよ. この定理により, n 個の S^1 のブーケの基本群は, n 個の $\mathbb{Z}$ の自由積と同型であることがわかる. 後者の群を F_n とかき, 階数 n の自由群と呼ぶ. 可算無限個の $\mathbb{Z}$ の自由積を F_∞ とかき, 階数 ∞ の自由群と呼ぶ.

さて, 融合積 $G = A *_L B$ が作用する木 T を構成しよう. T の頂点の集合 $V(T)$ と辺の集合 $E(T)$ を次のように定義する:

$$V(T) = G/A \sqcup G/B, \quad E(T) = G/L.$$

各 $g \in G$ に対し, 辺 $gL \in E(T)$ は二つの頂点 $gA, gB \in V(T)$ を結ぶと定める. A/L と B/L の元の代表からなる集合

$$\mathcal{A} = \{e, a_1, a_2, \ldots\} \subset A, \quad \mathcal{B} = \{e, b_1, b_2, \ldots\} \subset B$$

をそれぞれとる. 頂点 $A \in V(T)$ と辺で結ばれる頂点の集合は $\{\, aB \mid a \in \mathcal{A} \,\}$ に等しい (図 1). G が A と B で生成されることから, グラフ T の連結性が従う. $\mathcal{A} \setminus \{e\}$ の元と $\mathcal{B} \setminus \{e\}$ の元を交互に並べて得られる G の元は単位元でないという事実を用いると, T は輪を持たない, つまり, 木であることが示される.

G は $V(T)$ と $E(T)$ のそれぞれに左かけ算で作用し, これは T への作用を誘導する. この作用の特徴をいくつか挙げよう.

- 作用 $G \curvearrowright T$ は**反転をもたない**. すなわち, 各 $g \in G$ と T の辺 $e \in E(T)$ に対し, $ge = e$ ならば, g は e の二つの端点をそれぞれ固定する.

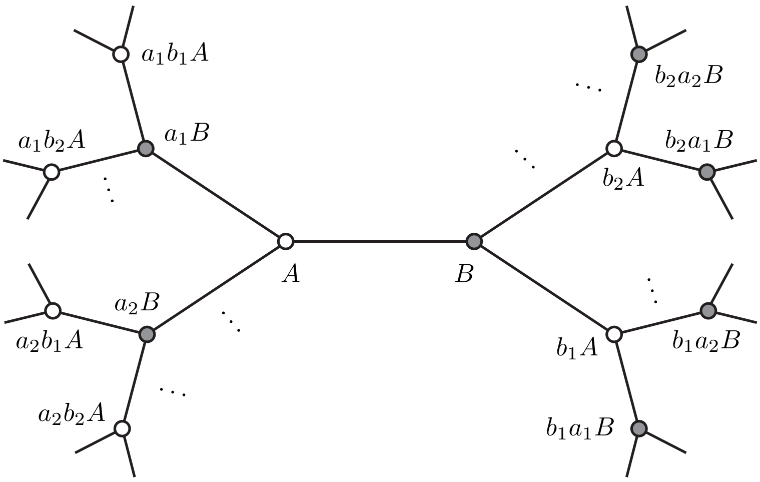

図 1: 融合積 $A *_L B$ に付随する木

- $s \in V(T) \sqcup E(T)$ に対し, s を固定する G の元全体からなる部分群

$$\mathrm{Stab}_G(s) = \{\, g \in G \mid gs = s \,\}$$

  を s の G における安定部分群と呼ぶ. このとき, 各 $g \in G$ に対し, 等式

$$\mathrm{Stab}_G(gA) = gAg^{-1}, \quad \mathrm{Stab}_G(gB) = gBg^{-1}, \quad \mathrm{Stab}_G(gL) = gLg^{-1}$$

  が成り立つ.

- 作用 $G \curvearrowright T$ の商グラフ $G\backslash T$ は図 2 (a) のグラフ Path_1 と同型である.

これまで, 融合積 $G = A *_L B$ から出発して, G が作用する木 T を構成した. 逆に, 次が示される.

定理 2.2 ([7], I.4.1, Theorem 6)**.** 群 G' が木 T' に反転なしで作用しているとし, さらに, 商グラフ $G'\backslash T'$ は Path_1 と同型であるとする. T' の辺 e をとり, u, v を e の端点とし,

$$A' = \mathrm{Stab}_{G'}(u), \quad B' = \mathrm{Stab}_{G'}(v), \quad L' = \mathrm{Stab}_{G'}(e)$$

と定める. このとき, $A' *_{L'} B'$ から G への誘導される準同型は同型である.

2.3 HNN 拡大とそれが作用する木

定理 2.2 は, 商グラフが Path_1 になるような木への作用をもつ群は融合積にかけるということを主張している. 次に紹介する HNN 拡大という群の構成法は, 商グラフが図 2 (b) のグラフ Circ_1 になるような木への作用をもつ群の表示を与えるものである.

A を群, L を A の部分群, $\varphi\colon L \to A$ を (包含写像とは限らない) 単射準同型とする. このとき, 表示

$$\langle\, A,\ t \mid \text{任意の } g \in L \text{ に対し } \varphi(g) = tgt^{-1} \,\rangle$$

で定義される群を φ に関する A の **HNN 拡大**といい, $\mathrm{HNN}(A, L, \varphi)$ とかく.

$G = \mathrm{HNN}(A, L, \varphi)$ を HNN 拡大とし, G が作用する木 T を構成しよう. T の頂点の集合 $V(T)$ と辺の集合 $E(T)$ を次のように定義する:

$$V(T) = G/A, \quad E(T) = G/L.$$

(a) (b)

図 2: (a) Path_1. (b) Circ_1.

各 $g \in G$ に対し, 辺 $gL \in E(T)$ は二つの頂点 $gA, gt^{-1}A \in V(T)$ を結ぶと定める. このとき, T は木になり, G は T へ左掛け算により作用する. さらに, この作用は反転をもたず, その商グラフは Circ_1 と同型になる. 逆に, 次が示される.

定理 2.3 ([7], I.5.4, Corollary 2 to Theorem 13)**.** 群 G' が木 T' に反転なしで作用しているとし, さらに, 商グラフ $G'\backslash T'$ は Circ_1 と同型であるとする. T' の辺 e をとり, u, v を e の端点とし,

$$A' = \mathrm{Stab}_{G'}(u), \quad L' = \mathrm{Stab}_{G'}(e)$$

と定める. G' の元 s で, $sv = u$ となるものをとる. 準同型 $\varphi' \colon L' \to A'$ を, 各 $g \in L'$ に対し $\varphi'(g) = sgs^{-1}$ とおくことにより定義する. このとき, t を s に移すことにより定義される, $\mathrm{HNN}(A', L', \varphi')$ から G' への準同型は同型である.

以上をまとめると, 群の融合積への分解と木への作用で商グラフが Path_1 になるものが対応し, 群の HNN 拡大への分解と木への作用で商グラフが Circ_1 になるものが対応する. 木への作用で商グラフが一般のグラフになる場合にも同様な対応を記述することが可能である. その場合も, 作用する群の表示は木の頂点や辺の安定部分群とその間の準同型を用いて記述される. 詳細については [7, I.5.4] を参照せよ.

2.4 木に自由に作用する群

群 G の木 T への作用が**自由**であるとは, G の元 g が T のある頂点 v を固定するならば, g は単位元となるときをいう. 次の定理は, 2.1 節でも述べたように, 群が自由群であることを示すためによく使われる.

定理 2.4 ([7], I.3.3, Theorem 4)**.** 群 G が木 T へ反転なし, かつ自由に作用しているものとする. このとき G は自由群である.

証明. G の T への作用に関する仮定から, T から商グラフ $G\backslash T$ への商写像は被覆写像であり, G はその被覆変換群となる. T が可縮であることから, G は $\pi_1(G\backslash T)$ と同型である. 後者は, 1 次元 CW 複体の基本群であるから, 自由群に同型である. この事実は [7, I.2.3, Corollary 1 to Proposition 13] で示されている. □

この定理の応用を述べる.

系 2.5 ([7], I.3.4, Theorem 5)**.** 自由群の任意の部分群は自由群である.

証明. F_n を $a_1, \ldots, a_n$ を生成元とする自由群とする. このとき Cayley グラフ $\Gamma = \Gamma(F_n, \{a_1, \ldots, a_n\})$ は木であり, F_n は Γ に反転なし, かつ自由に作用する (Cayley グラフの定義については 3.1 節を参照せよ). G を F_n の部分群とすると, G も Γ に反転なし, かつ自由に作用する. 定理 2.4 より G は自由群である. □

3 Stallings の定理

この定理は, 有限生成群 G に対し, G のエンド数が 2 以上であることと G が有限群上の融合積または HNN 拡大への非自明な分解をもつことが同値であることを主張する. このことは, G による木への反転なし

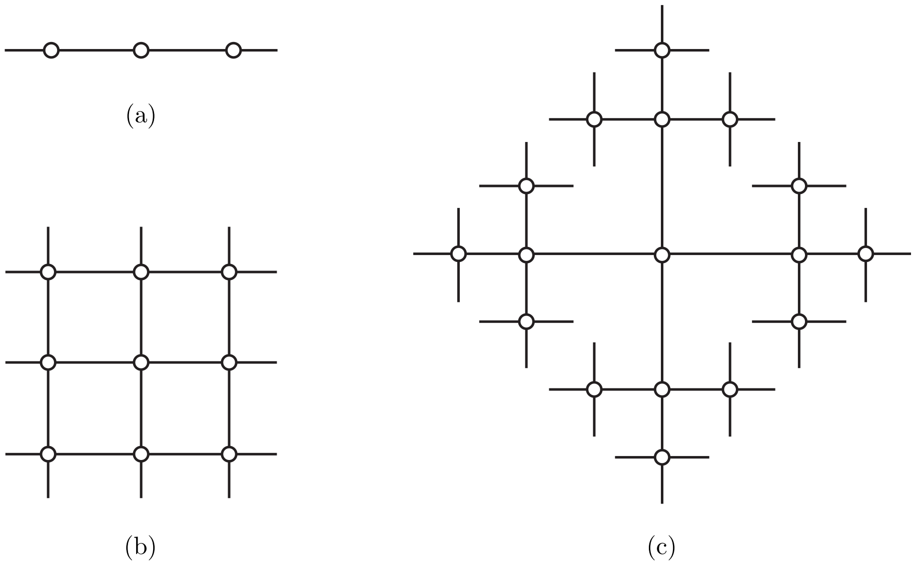

図 3: (a) $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$. (b) $\Gamma(\mathbb{Z}^2, \{(1,0),(0,1)\})$. (c) $\Gamma(F_2, \{a,b\})$. F_2 は a, b を生成元とする自由群を表す.

の作用で, 各辺の安定部分群が有限群となるようなものが存在することと同値である. G のエンド数とは, G からできる Cayley グラフと呼ばれるグラフの幾何学的な性質を用いて定義される量である. Stallings の定理は, Cayley グラフの幾何学的性質と群の代数的性質を結びつけるものであり, Cayley グラフを通して群を研究する分野での雛型の定理である. 3.1 節で Cayley グラフとエンド数の定義を述べた後, 3.2 節で Stallings の定理とその系を述べる.

3.1 有限生成群の Cayley グラフとエンド数

G を有限生成群とし, S を $G \setminus \{e\}$ の有限部分集合で G を生成するものとする. S に関する G の Cayley グラフを $\Gamma(G,S)$ で表す. これは, G の各元を頂点とし, G の元 g, h に対し, $g^{-1}h \in S$ または $h^{-1}g \in S$ となるとき, g と h に対応する頂点を辺で結ぶことで得られるグラフである. $\Gamma(G,S)$ の幾何学的実現を $|\Gamma(G,S)|$ で表し, 頂点集合 G を $|\Gamma(G,S)|$ の部分集合と見なす.

さて, G の部分集合 K に対し, $n(K)$ で, $|\Gamma(G,S)| \setminus K$ の連結成分で無限個の頂点を含むものの個数を表す.

$$e(G,S) = \sup\{\, n(K) \mid K \text{ は } G \text{ の有限部分集合} \,\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

と定義する. 実は, $e(G,S)$ は S の取り方によらない値であることが次に述べる命題 3.1 から従う. そこで, $e(G,S)$ を $e(G)$ とかくことにし, G の**エンド数**と呼ぶ. 例えば, 任意の有限群のエンド数は 0 であり, $e(\mathbb{Z}) = 2$ である. また, $n \geq 2$ のとき, $e(\mathbb{Z}^n) = 1$, $e(F_n) = \infty$ である (図 3).

$\mathcal{P}G$ で G の部分集合全体を表し, $\mathcal{F}G$ で G の有限部分集合全体を表す. 対称差をとる操作により, $\mathcal{P}G$ 上に可換群の構造を導入する. つまり, $\mathcal{P}G$ の二つの元 A, B に対し, $A + B \in \mathcal{P}G$ を $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ で定義する. このとき, $\mathcal{F}G$ は $\mathcal{P}G$ の部分群であり, $\mathcal{P}G$ は二元からなる体 $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間となる. G は $\mathcal{P}G$ と $\mathcal{F}G$ それぞれに右掛け算で作用する. よって, G は商群 $\mathcal{P}G/\mathcal{F}G$ に作用する.

$$\mathcal{Q}G = \{\, A \in \mathcal{P}G \mid \text{任意の } g \in G \text{ に対し } A + Ag \text{ は有限である.} \}$$

と定義すると, 作用 $G \curvearrowright \mathcal{P}G/\mathcal{F}G$ の固定点全体は $\mathcal{Q}G/\mathcal{F}G$ に一致する.

命題 3.1 ([2], I.6.2.6)**.** 上の記号で, 等式 $e(G,S) = \dim_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{Q}G/\mathcal{F}G)$ が成り立つ.

$\dim_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{Q}G/\mathcal{F}G)$ は明らかに S によらない値なので, $e(G, S)$ は S によらない値である. エンド数に関する基本的な事実をいくつか述べる. 証明については [2, I.6.2] や [9, 3.1] を参照せよ.

- 任意の有限生成群 G に対し $e(G) \in \{0, 1, 2, \infty\}$ となる.
- $e(G) = 0$ であることと G が有限であることは同値である.
- $e(G) = 2$ であることと G の有限指数部分群で $\mathbb{Z}$ と同型なものが存在することは同値である.
- G の有限指数部分群 H に対し, 等式 $e(H) = e(G)$ が成り立つ.
- G の有限正規部分群 N に対し, 等式 $e(G/N) = e(G)$ が成り立つ.

3.2 Stallings の定理とその系

Stallings の定理は次のように述べられる. Stallings の論文 [8] では, G が有限表示群である場合が扱われており, 後に, Bergman の論文 [1] で以下の形に一般化された.

定理 3.2 (Stallings の定理, [8], [1])**.** G を有限生成群とする. このとき, $e(G) = 2$ または ∞ であることと, G の有限部分群 L が存在して, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことは同値である.

(i) $L \subsetneq A$, $L \subsetneq B$ となる G の部分群 A, B が存在して $G = A *_L B$ とかける.

(ii) $L \subset C$ となる G の部分群 C と単射準同型 $\varphi\colon L \to C$ が存在して $G = \mathrm{HNN}(C, L, \varphi)$ とかける.

条件 (i) または (ii) が成り立つとき, エンド数が 2 または ∞ になることの証明は容易である. 前節の最後でも述べたように, エンド数が 2 となる群については別の記述があり, これを用いることにより, エンド数が 2 である群は (i) または (ii) の形にかけるということが示される. 定理 3.2 の証明で本質的に難しい部分は, エンド数が ∞ である群が (i) または (ii) の形にかけるという部分である.

Stallings による証明は, 三次元位相多様体に対する球面定理の証明を元にしたものであり, その概略が [9, 3.2] で述べられている. 後に得られた Dunwoody [4] による証明では, G のエンド数が 2 以上であることから, G が作用する木で, 各辺の安定部分群が有限になるようなものを構成し, 結論を得ている.

定理 3.2 の応用として, 自由群に関する当時の予想がいくつか解決された. その一つを紹介しよう.

定理 3.3 ([8])**.** 自由群を有限指数部分群として含む, ねじれのない有限生成群は自由群である.

定理 3.2 を用いずに, 定理 3.3 を代数的に直接証明する方法は知られていないようである. この定理の証明では, 次に述べる, 自由積の生成元の個数に関する Grushko-Neumann の定理を用いる. 有限生成群 H に対し, $r(H)$ で H の生成元集合の最小濃度を表す.

定理 3.4 (Grushko-Neumann の定理)**.** 有限生成群 H が二つの部分群 H_1, H_2 を用いて $H = H_1 * H_2$ と表されているとする. このとき, H_1, H_2 は共に有限生成群であり, 等式 $r(H) = r(H_1) + r(H_2)$ が成り立つ.

証明については, [3, Theorem I.10.6] を参照せよ.

定理 *3.3* の証明. G をねじれのない有限生成群とし, F を G の有限指数部分群で自由群となるものとする. 3.1 節で述べた, エンド数に関する事実より, $e(G) = e(F)$ は 2 または ∞ である. 定理 3.2 より, G の有限部分群 L が存在して (i) または (ii) のような G の分解が得られる. G はねじれをもたないので, L は自明群となる. よって, 非自明な群 A, B を用いて $G = A * B$ とかけるか, 群 C を用いて $G = C * \mathbb{Z}$ とかける. 前者の場合, $F \cap A$ は A の有限指数部分群であり, 系 2.5 により自由群である. 再び定理 3.2 を A に適用し, A の分解を得る. この操作を B にも施し, 得られた分解に現れる部分群に対しても繰り返し適用していく. 定理 3.4 により, この操作は有限回で終了し, 結果として G は $\mathbb{Z}$ の自由積でかけることが従う. ゆえに, G は自由群である. 後者の場合の証明も同様である. □

他にも, 定理 3.2 の応用として, コホモロジー次元が 1 である有限生成群は自由群であるという当時の予想が肯定的に解決された. Stallings の定理は, 当時の組み合わせ群論に大きな影響を及ぼし, 後に発展する群の分解理論の出発点となった. 群の分解理論については [9] とそこで挙げられている文献を参照してほしい.

参考文献

[1] G. M. Bergman, *On groups acting on locally finite graphs*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 335–340.

[2] D. J. Collins, R. I. Grigorchuk, P. F. Kurchanov and H. Zieschang, *Combinatorial group theory and applications to geometry*, Translated from the 1990 Russian original by P. M. Cohn. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] W. Dicks and M. J. Dunwoody, *Groups acting on graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., 17. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] M. J. Dunwoody, *Accessibility and groups of cohomological dimension one*, Proc. London Math. Soc. (3) **38** (1979), 193–215.

[5] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[6] Y. Ihara, *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over* $\mathfrak{p}$*-adic fields*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219–235.

[7] J.-P. Serre, *Trees*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[8] J. R. Stallings, *On torsion-free groups with infinitely many ends*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 312–334.

[9] C. T. C. Wall, *The geometry of abstract groups and their splittings*, Rev. Mat. Complut. **16** (2003), 5–101.