Torelli 複体と分離的曲線の複体の自己同型について

木田 良才 (京都大学大学院理学研究科)*

1　背景

群論において, 与えられた群の自己同型を記述することは基本的な問題である. また, 与えられた群が無限離散群ならば, その群の有限指数部分群の間で定義される同型を記述することもまた基本的である. 後者は前者に比べ格段に難しくなる場合が多く, 後者の問題を解くためにはその群をより一層理解する必要がある. 本稿ではこれらの問題を, 曲面の写像類群の部分群で代表的なものである, Torelli 群や Johnson 核に対して考える. 写像類群自身に対するこれらの問題はすでに解決済みである. 本節ではまず, この解決の方針について簡単に述べたい.

以後, 断りのない限り, 曲面は常に連結, 向き付け可能, かつコンパクトであるとする. ただし, 境界は空であるとは限らない. $S = S_{g,p}$ で, 種数が g で境界成分の個数が p である曲面を表す. $\mathrm{Mod}^*(S)$ で, S の (拡張した) **写像類群**, つまり, S の自己同相写像のイソトピー類からなる群を表す. ここで, S のイソトピーは S の境界の点を動かしてもよい. 各 $\gamma \in \mathrm{Mod}^*(S)$ に対し, $\mathrm{Inn}(\gamma)$ で γ による $\mathrm{Mod}^*(S)$ の内部自己同型を表す. $\mathrm{Mod}^*(S)$ に関する前述の問題は次の形で解決されている.

定理 1.1 ([3], [8], [9])**.** $S = S_{g,p}$ を曲面とし, $3g + p - 4 > 0$ かつ $(g, p) \neq (1, 2), (2, 0)$ を仮定する. Γ_1 と Γ_2 を $\mathrm{Mod}^*(S)$ の有限指数部分群とし, $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ を同型とすると, Γ_1 上で $f = \mathrm{Inn}(\gamma)$ となる $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 γ が唯一存在する.

$(g, p) = (1, 2), (2, 0)$ のときにも, 定理にあるような同型を具体的に記述することが可能だが, 内部自己同型で表せない場合もあり複雑になるので省略する.

定理 1.1 の証明では, カーブ複体と呼ばれる単体複体が重要な役割を果たす. その定義を与える前に, いくつかの用語を準備する. 曲面 S 上の単純閉曲線 α が**本質的**であるとは, α が S の一点にホモトピックでなく, S の境界成分にイソトピックでないときをいう. 以後, 断りのない限り, S 上の曲線と言えば本質的なものを意味する. S 上の本質的な単純閉曲線のイソトピー類全体を $V(S)$ とかく. 混乱のない限り, S 上の曲線とそのイソトピー類を同一視する場合が多い. 二つの元 $\alpha, \beta \in V(S)$ に対し, $i(\alpha, \beta)$ で α と β の (幾何学的) 交叉数, つまり, α と β を代表する曲線の交わりの最小濃度を表す. $V(S)$ の空でない部分集合 σ で, σ の任意の二つの元 α, β について $i(\alpha, \beta) = 0$ となるようなもの全体を $\Sigma(S)$ とかく.

カーブ複体. 曲面 S に対し, $V(S)$ を頂点の集合とし, $\Sigma(S)$ を単体の集合とするような (抽象的) 単体複体を $\mathcal{C}(S)$ で表し, S に対する**カーブ複体**と呼ぶ.

明らかに, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の各元は $\mathcal{C}(S)$ の単体複体としての自己同型を誘導する. 次の定理が示すように, 実は逆も正しい.

* *E-mail address*: `kida@math.kyoto-u.ac.jp`

定理 1.2 ([3], [8], [9])**.** 定理 1.1 の曲面 S に対し, $\mathcal{C}(S)$ の任意の自己同型は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導される.

定理 1.1 の証明は次の二段階に分けられる. $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ を定理 1.1 にあるような同型とする.

(I) 各 $\alpha \in V(S)$ に対し, α についての Dehn ツイストを $t_\alpha \in \mathrm{Mod}^*(S)$ とかき, t_α で生成される巡回群を T_α とかく. このとき, f は T_α の形の部分群を保存する. 正確に述べると, 各 $\alpha \in V(S)$ に対し, $\beta \in V(S)$ で等式 $f(T_\alpha \cap \Gamma_1) = T_\beta \cap \Gamma_2$ を満たすものが唯一存在する. この事実は Nielsen と Thurston による $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元の分類理論を駆使することで証明される.

(II) (I) の記号を用いて, 写像 $\phi\colon V(S) \to V(S)$ を $\phi(\alpha) = \beta$ とおくことで定義する. このとき, ϕ は $\mathcal{C}(S)$ の自己同型を定めることがわかる. 定理 1.2 より, ϕ は $\mathrm{Mod}^*(S)$ のある元 γ により誘導される $\mathcal{C}(S)$ の自己同型と一致する. この γ に対し, Γ_1 上で等式 $f = \mathrm{Inn}(\gamma)$ が成り立つ.

この証明の方針がそうであるように, 一般に, 与えられた群 Γ の自己同型を記述する際, Γ が作用する幾何学的な対象 X を利用して, その問題を X の自己同型の記述に帰着させる場合が多い. 次節では, Γ が Torelli 群や Johnson 核である場合の結果を述べる.

2 主結果

S を曲面とする. S の向きと S の各境界成分を保存するような S の自己同相写像を代表にもつ $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元全体を $\mathrm{PMod}(S)$ とかく. $\mathrm{PMod}(S)$ は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の有限指数部分群である. S の各境界成分に沿って円板を貼り付けることで得られる閉曲面を $\bar{S}$ とかく. S から $\bar{S}$ への自然な埋め込みを通して, $\mathrm{Mod}^*(S)$ は $H_1(\bar{S}, \mathbb{Z})$ に作用する. S の **Torelli 群** $\mathcal{I}(S)$ を, $H_1(\bar{S}, \mathbb{Z})$ 上自明に作用する $\mathrm{PMod}(S)$ の元全体として定義する. $\mathcal{I}(S)$ の元の例を挙げるために, 用語を準備する.

分離的曲線と非分離的曲線. $V(S)$ の元 α が S で**分離的 (separating)** であるとは, S を α に沿って切ることで得られる曲面が非連結であるときをいい, そうでないとき, α は S で**非分離的**であるという. $V(S)$ の元で S で分離的なもの全体を $V_s(S)$ とかく.

切断対. $V(S)$ の相異なる元の組 $\{\beta, \gamma\}$ が S の**切断対 (bounding pair)** であるとは, 以下の三条件を満たすときをいう:

- $\{\beta, \gamma\}$ は $\Sigma(S)$ の元である.
- β と γ は共に S で非分離的である.
- S を β と γ に沿って切ることで得られる曲面は非連結である.

$\Sigma(S)$ の元で S の切断対になるようなもの全体を $V_{bp}(S)$ とかく.

各 $\alpha \in V_s(S)$ に対し, α についての Dehn ツイスト t_α は $\mathcal{I}(S)$ に属することが容易にわかる. また, S の各切断対 $\{\beta, \gamma\} \in V_{bp}(S)$ に対し, $t_\beta t_\gamma^{-1}$ も $\mathcal{I}(S)$ に属することもわかる. $\mathcal{I}(S)$ は, この二つの形の元全体で生成されることが知られている.

明らかに, $\mathcal{I}(S)$ は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の正規部分群である. よって, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の内部自己同型は $\mathcal{I}(S)$ の自己同型を誘導する. 次の定理は, ほとんどの曲面 S に対し, 逆に $\mathcal{I}(S)$ の自己同型は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元による内部自己同型で与えられることを主張する. 定理 1.1 の証明でカーブ複体を用いたように,

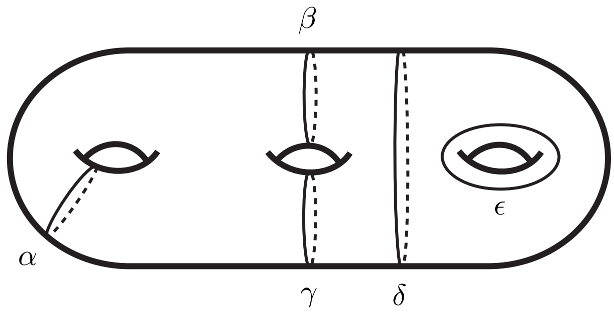


図 1: α と ϵ は非分離的曲線, δ は分離的曲線, $\{\beta, \gamma\}$ は切断対である. $\{\alpha, \beta\}$ は切断対でない.

この事実の証明では, Torelli 複体と呼ばれる単体複体を用いる. この複体の定義を与える前に記号を準備する. 二つの元 $\sigma, \tau \in \Sigma(S)$ に対し, $i(\sigma, \tau)$ を和 $\sum_{\alpha \in \sigma, \beta \in \tau} i(\alpha, \beta)$ として定義する. さらに, $\alpha \in V(S)$ と $\sigma \in \Sigma(S)$ に対し, $i(\alpha, \sigma)$ を和 $\sum_{\beta \in \sigma} i(\alpha, \beta)$ として定義する.

Torelli 複体. 曲面 S に対し, $V_t(S)$ で非交叉和 $V_s(S) \sqcup V_{bp}(S)$ を表す. $V_t(S)$ の空でない部分集合 σ で, σ の任意の二つの元 a, b に対し $i(a, b) = 0$ となるようなもの全体を $\Sigma_t(S)$ で表す. $V_t(S)$ を頂点の集合とし, $\Sigma_t(S)$ を単体の集合とするような単体複体を $\mathcal{T}(S)$ で表し, S に対する **Torelli 複体**と呼ぶ.

$\mathrm{Mod}^*(S)$ の各元は $\mathcal{T}(S)$ の自己同型を誘導する. 定理 1.1 と定理 1.2 に対応して次が得られる.

定理 2.1 ([1], [4], [7]). $S = S_{g,p}$ を曲面とし, $(g, p) = (1, \geq 3)$, $(2, \geq 1)$ または $(\geq 3, \geq 0)$ を仮定する. このとき次が成り立つ.

(i) $\mathcal{T}(S)$ の任意の自己同型は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導される.

(ii) Γ_1 と Γ_2 を $\mathcal{I}(S)$ の有限指数部分群とし, $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ を同型とすると, Γ_1 上で $f = \mathrm{Inn}(\gamma)$ となる $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 γ が唯一存在する.

この定理は, S が閉のときに [1] で示された後, $(g, p) = (2, 1)$ 以外のときに [4] で示された. そして最後に, $(g, p) = (2, 1)$ の場合が [7] で示された.

S の分離的曲線についての Dehn ツイスト全体で生成される $\mathrm{Mod}^*(S)$ の部分群を $\mathcal{K}(S)$ と記し, S に対する **Johnson 核**と呼ぶ. S が定理 2.1 の曲面であるとき, どのような $\{\alpha, \beta\} \in V_{bp}(S)$ と $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ についても, $\mathcal{K}(S)$ は $(t_\alpha t_\beta^{-1})^n$ を含まないということが知られている. 特に, $\mathcal{K}(S)$ は $\mathcal{I}(S)$ の無限指数部分群である. 定理 2.1 と同様の主張が Johnson 核についても成立する. その際, 次で定義される単体複体が Torelli 複体の役割を果たす.

分離的曲線の複体. 曲面 S に対し, $V_s(S)$ で張られる $\mathcal{C}(S)$ の充満な部分複体を $\mathcal{C}_s(S)$ で表し, S に対する**分離的曲線の複体**と呼ぶ.

定理 2.2 ([1], [4]). $S = S_{g,p}$ を曲面とし, $(g, p) = (1, \geq 3)$, $(2, \geq 2)$ または $(\geq 3, \geq 0)$ を仮定する. このとき次が成り立つ.

(i) $\mathcal{C}_s(S)$ の任意の自己同型は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導される.

(ii) Λ_1 と Λ_2 を $\mathcal{K}(S)$ の有限指数部分群とし, $h\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$ を同型とすると, Λ_1 上で $h = \mathrm{Inn}(\lambda)$ となる $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 λ が唯一存在する.

この定理は, S が閉のときに [1] で示された後, 一般のときに [4] で示された. 以下で, 定理 2.1 と定理 2.2 で扱われていない曲面についての注意を記す.

注意 2.3. $S = S_{g,p}$ を曲面とする. $g = 0$ のとき, S 上の任意の曲線は S で分離的である. よって, 等式 $\mathcal{T}(S) = \mathcal{C}_s(S) = \mathcal{C}(S)$ が成り立つ. $(g,p) = (1, \leq 2)$ または $(2,0)$ のときは, $\mathcal{T}(S)$ と $\mathcal{C}_s(S)$ は零次元または空となる. この場合の $\mathcal{I}(S)$ と $\mathcal{K}(S)$ については, [4, Remark 1.3] を参照せよ.

注意 2.4. $S = S_{2,1}$ とおく. S から $\bar{S}$ への自然な埋め込みを考えることにより, 単体写像 $\pi\colon \mathcal{C}_s(S) \to \mathcal{C}_s(\bar{S})$ が得られる. このとき, 各 $\alpha \in V_s(\bar{S})$ に対し, $\pi^{-1}(\{\alpha\})$ は, 各頂点から可算無限個の辺が出て行くような樹木になることが知られている. $\mathcal{C}_s(\bar{S})$ は可算無限個の頂点から成る零次元単体複体なので, $\mathcal{C}_s(S)$ は可算無限個のそのような樹木から成ることがわかる. ゆえに, $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型は非可算個存在し, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導されるとは限らない.

定理 2.1 と定理 2.2 の (ii) の証明の粗筋を述べよう. それぞれの (i) の主張を用いて証明する. 基本的には, 1 節で述べた (I), (II) の議論と同じようにして示される.

S を曲面とし, $(\Gamma, X) = (\mathcal{I}(S), \mathcal{T}(S))$ または $(\mathcal{K}(S), \mathcal{C}_s(S))$ とおく. Γ_1 と Γ_2 を Γ の有限指数部分群とし, $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ を同型とする. 定理 1.1 の証明と同様に, まず, f が X の自己同型を誘導することを示す. 正確に述べよう. $\alpha \in V_s(S)$ に対し, Dehn ツイスト t_α で生成される巡回群を T_α とかき, $\{\beta, \gamma\} \in V_{bp}(S)$ に対し, $t_\beta t_\gamma^{-1}$ で生成される巡回群を $T_{\{\beta,\gamma\}}$ とかく. このとき, X の任意の頂点 v に対し, 等式 $f(T_v \cap \Gamma_1) = T_u \cap \Gamma_2$ を満たすような X の頂点 u が唯一存在することがわかる. $\phi(v) = u$ と置くことにより, X の頂点集合からそれ自身への写像 ϕ を定義すると, この写像 ϕ が X の自己同型を誘導することがわかる. あとは, X の自己同型に関する主張 (i) を用いて, 1 節の (II) と同様に, (ii) の結論を得ることができる.

3 節と 4 節では, それぞれ定理 2.2 と定理 2.1 の (i) の証明について述べる. 証明の構成の都合上, $\mathcal{T}(S)$ の自己同型について述べる前に $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型について述べる方がよい.

3　分離的曲線の複体 $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型

$S = S_{g,p}$ を定理 2.2 の曲面とする. $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型 ϕ が $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導されることを示すには, $\mathcal{C}(S)$ の自己同型 Φ で ϕ の拡張となっているものを構成すればよい. 本節では, この Φ の構成について $g = 1$ の場合と $g \geq 2$ の場合に分けて論じる.

3.1　$g = 1$ のとき

$g = 1$ のときの Φ の構成は p に関する帰納法による. 詳細については [4] を参照せよ.

3.1.1　$p = 3$ のとき

$S = S_{1,3}$ とおく. S の任意の分離的曲線は, S からハンドル (つまり, $S_{1,1}$ と同相な曲面) を切り取るもの, または, S からパンツ (つまり, $S_{0,3}$ と同相な曲面) を切り取るもののどちらかである. 前者の場合, その曲線は **h-曲線**であるといい, 後者の場合, **p-曲線**であるということにする. すぐにわかる $\mathcal{C}_s(S)$ の性質を挙げる.

- $\mathcal{C}_s(S)$ は一次元, つまり, グラフである. 連結であることも示せる.

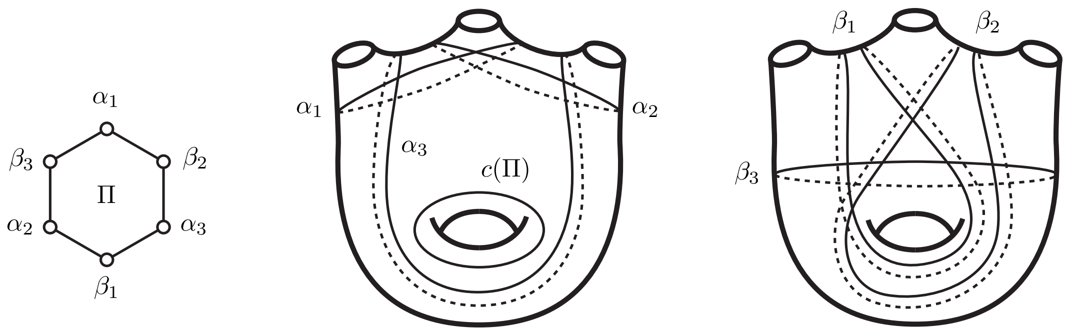


図 2: $\mathcal{C}_s(S_{1,3})$ の六角形

- $\mathcal{C}_s(S)$ の任意の辺は, h-曲線と p-曲線の組である.

一般にグラフを調べるとき, その最小の長さのサイクルを調べることが有効である. そこで, $\mathcal{C}_s(S)$ の六個の頂点 $v_1, \ldots, v_6$ からなる $\mathcal{C}_s(S)$ の部分グラフで, 各 $j \bmod 6$ に対して

$$i(v_j, v_{j+1}) = 0, \quad i(v_j, v_{j+2}) \neq 0, \quad i(v_j, v_{j+3}) \neq 0$$

となるようなものを $\mathcal{C}_s(S)$ の**六角形**と呼ぶことにする (図 2 を参照). 同様に $\mathcal{C}_s(S)$ の多角形を定義することができる. しかし, $\mathcal{C}_s(S)$ には三, 四, 五角形のいずれもが存在しないことがすぐにわかる. 五角形が存在しないことは, 上で挙げた二番目の事実による. $\mathcal{C}_s(S)$ の六角形に関する重要な事実を挙げよう.

- $\mathcal{C}_s(S)$ の六角形は本質的には図 2 にあるものに限る. 正確に述べると, $\mathcal{C}_s(S)$ の任意の二つの六角形は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元で写り合う.
- $\mathcal{C}_s(S)$ の任意の六角形 Π に対し, S の非分離的曲線で Π の頂点に対応するどの曲線とも交わらないようなものが唯一存在する. この非分離的曲線を $c(\Pi)$ とかくことにする.

以上の事実を用いて, $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型 ϕ に対し, 写像 $\Phi\colon V(S) \to V(S)$ を次のように定義する. $\alpha \in V(S)$ をとる. α が分離的ならば, $\Phi(\alpha) = \phi(\alpha)$ とおく. α が非分離的ならば, $c(\Pi) = \alpha$ となる $\mathcal{C}_s(S)$ の六角形 Π をとり, $\Phi(\alpha) = c(\phi(\Pi))$ とおく. ϕ は $\mathcal{C}_s(S)$ の六角形を保存することに注意する. この定義に関して, Φ が well-defined であることや $\mathcal{C}(S)$ の自己同型を定めることが示される.

3.1.2 $p \geq 4$ のとき

$p \geq 4$ として $S = S_{1,p}$ とおく. ϕ を $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型とする. ϕ が S の p-曲線 (つまり, S からパンツを切り取るような分離的曲線) を保存することが直接示される. p に関する帰納法で $\mathcal{C}(S)$ の自己同型 Φ の構成を述べる.

α を S の p-曲線とする. このとき, S を α に沿って切ってできる曲面の連結成分で, パンツでないものは $S_{1,p-1}$ と同相である. 帰納法の仮定により, 同型写像 $\Phi_\alpha\colon \mathrm{Lk}(\alpha) \to \mathrm{Lk}(\phi(\alpha))$ が存在する. ここで, 各 $\beta \in V(S)$ に対し, $\mathrm{Lk}(\beta)$ は β の $\mathcal{C}(S)$ におけるリンクを表す. S の任意の非分離的曲線は, S のある p-曲線と交わらないことに注意すると, $\mathcal{C}(S)$ の自己同型 Φ を, 各 p-曲線 α に対し Φ の $\mathrm{Lk}(\alpha)$ への制限が Φ_α に一致するようなものとして定義することができる. そして, この定義が well-defined であることを示すことができる.

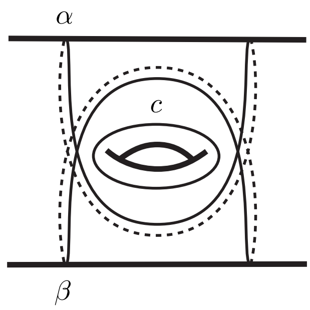


図 3: c に関する共有対 $\{\alpha, \beta\}$

3.2 $g \geq 2$ のとき

この場合の Φ の構成は本質的には [1] による．[1] では閉曲面のみ扱われているが, 同様の方法が一般の場合でも適用可能である．詳細は [4] で論じられている．

$S = S_{g,p}$ を定理 2.2 の曲面で $g \geq 2$ なるものとする．次で定義される共有対が Φ の構成で重要な役割を果たす．S の分離的曲線が h-曲線であるとは, それが S からハンドルを切り取るときをいう．

共有対． S の二つの h-曲線 $\alpha, \beta \in V_s(S)$ が S の非分離的曲線 $c \in V(S)$ を**共有する**とは, α, β, c それぞれの代表 A, B, C で, $|A \cap B| = i(\alpha, \beta)$ かつ, 次の二条件を満たすものが存在するときをいう: H_A, H_B をそれぞれ A, B により S から切り取られるハンドルとし, S の部分曲面と見なす．

- $H_A \cap H_B$ は C を含む円筒である (図 3 を参照).
- $S \setminus (H_A \cup H_B)$ は連結である．

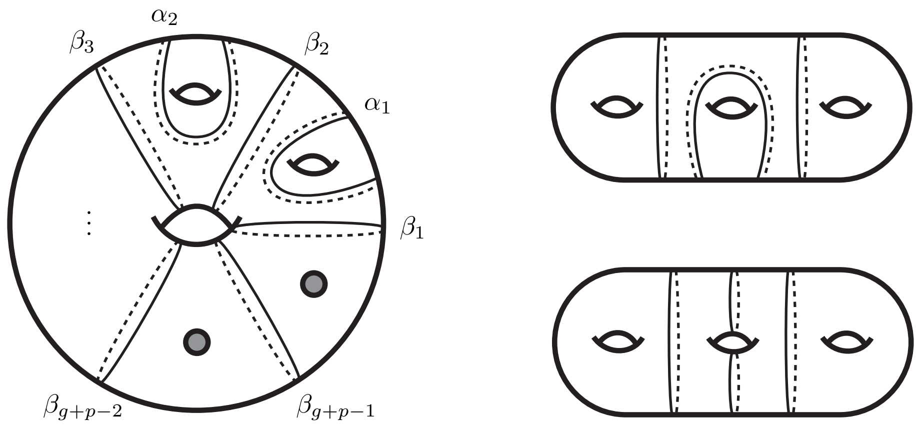
このとき, 組 $\{\alpha, \beta\}$ は c に関する**共有対 (sharing pair)** であるという．

S における任意の二つの共有対は, 互いに $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元で写り合うことが示される．また, 種数 1 の曲面における二つの h-曲線の組で, 共有対の定義にある一番目の条件を満たすものは存在しうるが, 二つの条件を同時に満たすものは存在しないことに注意せよ．

実は, $\mathcal{C}_s(S)$ の任意の自己同型 ϕ に対し, ϕ が S の共有対を保存するということを示すことができる．このことを用いて, 写像 $\Phi\colon V(S) \to V(S)$ を次のように定義する．$\alpha \in V(S)$ をとる．α が分離的ならば, $\Phi(\alpha) = \phi(\alpha)$ とおく．α が非分離的ならば, α に関する共有対 $\{\beta, \gamma\}$ をとることにより, $\Phi(\alpha)$ を, $\phi(\beta)$ と $\phi(\gamma)$ が共有する非分離的曲線として定義する．この定義に関して Φ が well-defined であることが示される．

注意 3.1. 3.1.2 節のようにして, $g \geq 2$ の場合に Φ を帰納的に構成することは困難と思われる．主な原因として次の二つの事実が挙げられる:

- 注意 2.4 でも述べたように, $S = S_{2,1}$ のとき, $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導されるとは限らない．
- S を種数が 2 である曲面とすると, S の h-曲線に対応する頂点全体で張られる $\mathcal{C}(S)$ の充満な部分複体は連結でない．この事実を示すには, S の各 h-曲線 α に対し, S から $\bar{S}$ への自然な埋め込みを通して α を $\bar{S}$ へ埋め込むことで得られる $\bar{S}$ の曲線に注目すればよい．



(a) (b)

図 4: (a) $\mathcal{T}(S)$ の最大次元の単体; (b) $\mathcal{T}(S_{3,0})$ の最大次元の単体

4　Torelli 複体 $\mathcal{T}(S)$ の自己同型

$S = S_{g,p}$ を定理 2.1 の曲面とする. $\mathcal{T}(S)$ の自己同型 ψ が $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導されることを示すには, $\mathcal{C}(S)$ の自己同型 Ψ で, 任意の $\alpha \in V_s(S)$ について等式 $\Psi(\alpha) = \psi(\alpha)$ を満たし, かつ任意の $\{\beta, \gamma\} \in V_{bp}(S)$ について等式 $\{\Psi(\beta), \Psi(\gamma)\} = \psi(\{\beta, \gamma\})$ を満たすものを構成すればよい. 本節では, この Ψ の構成について $(g,p) \neq (2,1)$ の場合と $(g,p) = (2,1)$ の場合に分けて論じる.

4.1　$(g,p) \neq (2,1)$ のとき

本節については [4] を参照せよ. $S = S_{g,p}$ を定理 2.1 の曲面で $(g,p) \neq (2,1)$ なるものとする. Ψ の構成には次の事実が必要となる.

命題 4.1. $\mathcal{T}(S)$ の次元は

$$(g-1) + \binom{g+p-1}{2} - 1$$

に等しい. さらに, $(g,p) \neq (3,0)$ ならば, $\mathcal{T}(S)$ における任意の最大次元の単体 σ に対し, $g-1$ 個の S の h-曲線 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}$ と $g+p-1$ 個の S の非分離的曲線 $\beta_1, \ldots, \beta_{g+p-1}$ で次の三条件を満たすものが存在する:

- 集合 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{g+p-1}\}$ は $\Sigma(S)$ に属する.
- 任意の相異なる $j, k = 1, \ldots, g+p-1$ に対し, $\{\beta_j, \beta_k\}$ は S の切断対である.
- 等式 $\sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}\} \cup \{\, \{\beta_j, \beta_k\} \mid j, k = 1, \ldots, g+p-1,\ j \neq k \,\}$ が成り立つ.

ψ を $\mathcal{T}(S)$ の自己同型とする. 命題 4.1 を用いると, $(g,p) \neq (3,0)$ のとき, ψ が $V_{bp}(S)$ と $V_s(S)$ をそれぞれ保存することや h-曲線を保存することなどを示すことができる. $(g,p) = (3,0)$ のとき, $\mathcal{T}(S)$ の最大次元の単体は図 4 (b) にある二種類に限られる. このことを用いると, $(g,p) = (3,0)$ のときも ψ が $V_{bp}(S)$ と $V_s(S)$ をそれぞれ保存することを示すことができる.

ψ が $V_s(S)$ を保存するので, ψ は $\mathcal{C}_s(S)$ の自己同型を誘導する. 3 節の結果より, $\mathcal{C}(S)$ の自己同型 Ψ で, 各 $\alpha \in V_s(S)$ について等式 $\Psi(\alpha) = \psi(\alpha)$ を満たすものが存在する. あとは, この Ψ が各 $\{\beta, \gamma\} \in V_{bp}(S)$ について等式 $\{\Psi(\beta), \Psi(\gamma)\} = \psi(\{\beta, \gamma\})$ を満たすことを示せばよい. この等式は比較的容易に示すことができる.

4.2 $(g, p) = (2, 1)$ のとき*

本節については [7] を参照せよ. $S = S_{2,1}$ とおく. S の任意の分離的曲線は S からハンドルを切り取り, 一方, S の任意の切断対は S からパンツを切り取ることに注意する. すぐにわかる $\mathcal{T}(S)$ の性質を挙げる.

- $\mathcal{T}(S)$ は一次元, つまり, グラフである. 連結であることも示せる.
- $\mathcal{T}(S)$ の任意の辺は, 一つの分離的曲線と一つの切断対からなるか, または, 二つの分離的曲線からなるかのどちらかである.

$\mathcal{T}(S)$ が一次元であることもあって, 4.1 節のようにして $\mathcal{T}(S)$ の最大次元の単体を調べるだけでは, $\mathcal{T}(S)$ の任意の自己同型が $V_{bp}(S)$ と $V_s(S)$ をそれぞれ保存するという主張を示すことはできない. そこで, 3.1.1 節のように $\mathcal{T}(S)$ の多角形を定義し, それを調べることが有効になる. まず, $\mathcal{T}(S)$ には三, 四, 五角形のいずれもが存在しないことがわかる. ただし, 五角形が存在しないことの証明は非自明である. 一方, $\mathcal{T}(S)$ の六角形は存在し, さらに, 互いに $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元で写り合わないものが多く存在する. この事実は, $\mathcal{T}(S)$ の自己同型を調べる問題をより困難なものにしている. $\mathcal{T}(S)$ の六角形の特筆すべき性質を述べよう.

- $\mathcal{T}(S)$ の任意の六角形 Π に対し, その頂点で切断対に対応するものの個数を $n(\Pi)$ とかくことにすると, すでに述べた事実より, $n(\Pi) \in \{0, 1, 2, 3\}$ である. さらに, 非自明であるが, $n(\Pi) \in \{2, 3\}$ となることが示せる. $n(\Pi) = 2$ または 3 となる $\mathcal{T}(S)$ の六角形 Π はそれぞれ**第一種**または**第二種**であるということにする.
- S の任意の非分離的曲線 α に対し, S を α に沿って切ることで得られる曲面を S_α とかく. 自然な埋め込み $\lambda_\alpha \colon \mathcal{C}_s(S_\alpha) \to \mathcal{T}(S)$ があることに注意する. S_α は $S_{1,3}$ に同相であるため, 図 2 にある $\mathcal{C}_s(S_{1,3})$ の六角形と埋め込み λ_α を用いて, $\mathcal{T}(S)$ の第一種六角形を得る. 逆に, $\mathcal{T}(S)$ の任意の第一種六角形はこのようにして得られることが示される.
- $\mathcal{T}(S)$ の任意の第一種六角形 Π に対し, Π の任意の三辺を含む $\mathcal{T}(S)$ の六角形は Π に限る.
- 図 5 にある $\mathcal{T}(S)$ の二つの第二種六角形 Π_1, Π_2 は三辺を共有する.

付け加えると, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元によって図 5 の第二種六角形に写り合わないような $\mathcal{T}(S)$ の第二種六角形が存在する. $\mathcal{T}(S)$ の全ての第二種六角形を特徴付けるという問題は未解決である.

ψ を $\mathcal{T}(S)$ の自己同型とする. 上記の六角形に関する事実を用いると, ψ は $V_{bp}(S)$ と $V_s(S)$ をそれぞれ保存することが示せる. 写像 $\Psi \colon V(S) \to V(S)$ を次のように定義する. $\alpha \in V(S)$ をとる. α が分離的ならば, $\Psi(\alpha) = \psi(\alpha)$ とおく. α は非分離的であるとする. $\lambda_\alpha(\mathcal{C}_s(S_\alpha))$ の六角形 Π をとると, ψ は第一種六角形を保存するから, ある S の非分離的曲線 β が存在して $\psi(\Pi)$ は $\lambda_\beta(\mathcal{C}_s(S_\beta))$ の

*2012 年 7 月 31 日追記. 本節の内容には誤りがある. 第一種の六角形で見過ごされたものがある. [7] の arXiv:1009.0568v3 で証明を修正した.

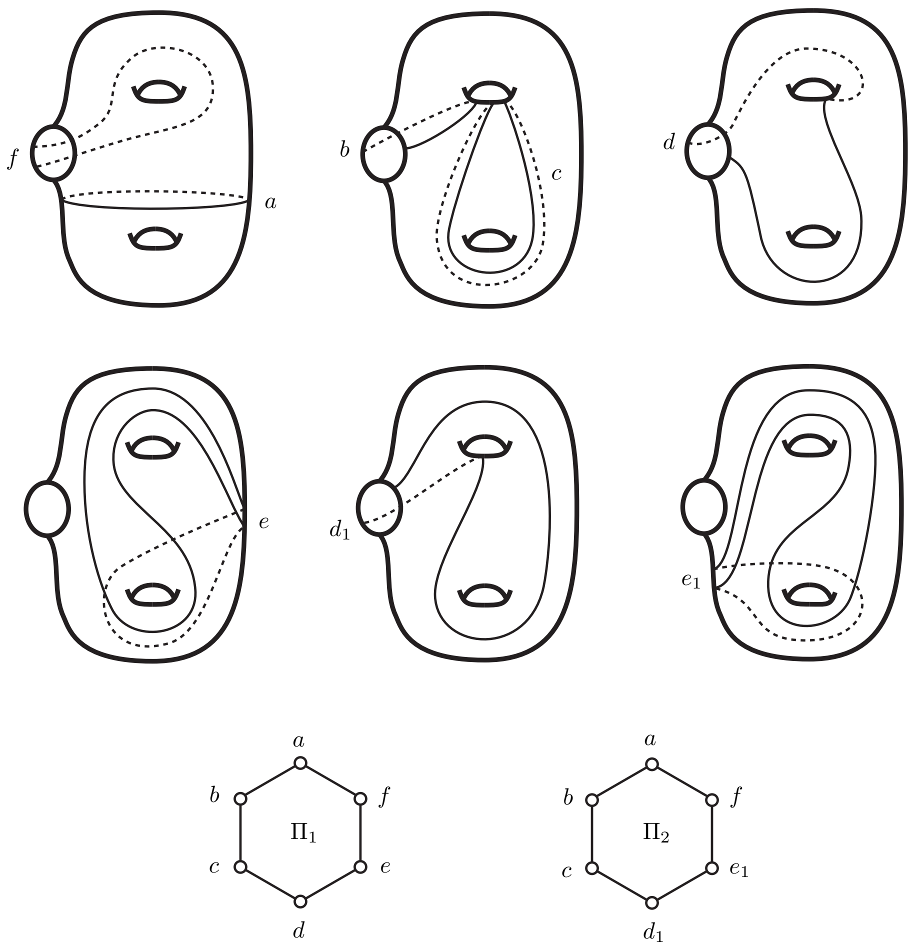


図 5: $S = S_{2,1}$ とおく. 図の下側にある Π_1 と Π_2 は共に $\mathcal{T}(S)$ の第二種六角形である. 図の上側では, 切断対そのものではなく, それを定める S の非分離的な弧を描いている. 例えば, b で添え字づけられた弧と S の境界との和の S における正則近傍 N を考えたとき, N の境界成分となる二つの S の曲線が切断対 b を定める. b, d, f, d_1 が切断対であり, その他は h-曲線である.

六角形となる. そこで, $\Psi(\alpha) = \beta$ とおく. この定義に関して Ψ が well-defined になること, $\mathcal{C}(S)$ の自己同型を定めること, そして, 任意の $\{\gamma, \delta\} \in V_{bp}(S)$ について等式 $\{\Psi(\gamma), \Psi(\delta)\} = \psi(\{\gamma, \delta\})$ を満たすことが示される.

5 主結果の一般化

S を曲面とし, $(\Gamma, X) = (\mathcal{I}(S), \mathcal{T}(S))$ または $(\mathcal{K}(S), \mathcal{C}_s(S))$ とおく. 定理 2.1 と定理 2.2 の主張 (ii) の一般化として, Γ の有限指数部分群から Γ への単射準同型を記述するという問題がある. 結論から言えば, このような単射準同型もまた $\mathrm{Mod}^*(S)$ のある元 γ による内部自己同型 $\mathrm{Inn}(\gamma)$ の制限と一致することが示される. 本節では, この結果について簡単に述べる. まず, X からそれ自身への単体写像に関して, 次で定義される性質を考える.

超単射写像. X からそれ自身への**超単射写像 (superinjective map)** とは, 単体写像 $\phi\colon X \to X$ で, X の任意の頂点 u, v に対し $i(u,v) \neq 0$ ならば $i(\phi(u),\phi(v)) \neq 0$ となるようなものを意味する.

X の頂点集合からそれ自身への写像 ϕ が X からそれ自身への単体写像を定めるためには, X の任意の頂点 u, v に対し $i(u,v) = 0$ ならば $i(\phi(u),\phi(v)) = 0$ となることが必要十分であることに注意する. 任意の超単射写像が実際に単射になることは容易にわかる. 超単射性は元々, $\mathcal{C}(S)$ からそれ自身への単体写像に対して [2] で導入された性質である. その動機は, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の有限指数部分群から $\mathrm{Mod}^*(S)$ への単射準同型が $\mathcal{C}(S)$ からそれ自身への (単射であるだけでなく) 超単射な写像を誘導するという事実にある. 同様に, Γ_1 を Γ の有限指数部分群とすると, 任意の単射準同型 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma$ は X からそれ自身への超単射写像を誘導する. 定理 2.1 と定理 2.2 の一般化として次の二つの定理を得る.

定理 5.1 ([5], [7])**.** S を定理 2.1 の曲面とする. このとき次が成り立つ.

(i) 任意の超単射写像 $\phi\colon \mathcal{T}(S) \to \mathcal{T}(S)$ は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導される.

(ii) Γ を $\mathcal{I}(S)$ の有限指数部分群とし, $f\colon \Gamma \to \mathcal{I}(S)$ を単射準同型とすると, Γ 上で $f = \mathrm{Inn}(\gamma)$ となる $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 γ が唯一存在する.

定理 5.2 ([5])**.** S を定理 2.2 の曲面とする. このとき次が成り立つ.

(i) 任意の超単射写像 $\psi\colon \mathcal{C}_s(S) \to \mathcal{C}_s(S)$ は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元により誘導される.

(ii) Λ を $\mathcal{K}(S)$ の有限指数部分群とし, $h\colon \Lambda \to \mathcal{K}(S)$ を単射準同型とすると, Λ 上で $h = \mathrm{Inn}(\lambda)$ となる $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 λ が唯一存在する.

定理 5.2 (i) の証明は, 任意の超単射写像 $\psi\colon \mathcal{C}_s(S) \to \mathcal{C}_s(S)$ が全射になることを示し, 定理 2.2 (i) に帰着させることで得られる. 定理 5.1 (i) の証明は, 任意の超単射写像 $\phi\colon \mathcal{T}(S) \to \mathcal{T}(S)$ が $\mathcal{C}_s(S)$ を保存するという事実と定理 5.2 (i) を組み合わせることで得られる.

S を定理 2.2 の曲面であって, かつ $(g,p) \neq (1,3)$ となるものとしたとき, 定理 5.2 (i) の一般化として, $\mathcal{C}_s(S)$ から $\mathcal{T}(S)$ への任意の超単射写像が $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元から誘導されるということも示される ([6] を参照). この結果は, そのような超単射写像の像が $\mathcal{C}_s(S)$ に含まれることを示した後, 定理 5.2 (i) を適用することで得られる. 結論として, $\mathcal{K}(S)$ の有限指数部分群から $\mathcal{I}(S)$ への任意の単射準同型は $\mathrm{Mod}^*(S)$ のある元 γ による内部自己同型 $\mathrm{Inn}(\gamma)$ の制限と一致することが示される. $(g,p) = (1,3)$ のときに同様の主張が成り立つかどうかは未解決である.

参考文献

[1] T. Brendle and D. Margalit, Commensurations of the Johnson kernel, *Geom. Topol.* **8** (2004), 1361–1384; Addendum, ibid. **12** (2008), 97–101.

[2] E. Irmak, Superinjective simplicial maps of complexes of curves and injective homomorphisms of subgroups of mapping class groups, *Topology* **43** (2004), 513–541.

[3] N. V. Ivanov, Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces, *Int. Math. Res. Not.* **1997**, no. 14, 651–666.

[4] Y. Kida, Automorphisms of the Torelli complex and the complex of separating curves, preprint, arXiv:0909.4718.

[5] Y. Kida, The co-Hopfian property of the Johnson kernel and the Torelli group, preprint, arXiv:0911.3923.

[6] Y. Kida, Injections of the complex of separating curves into the Torelli complex, preprint, arXiv:0911.3926.

[7] Y. Kida and S. Yamagata, Automorphisms of the Torelli complex for the one-holed genus two surface, in preparation.

[8] M. Korkmaz, Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori, *Topology Appl.* **95** (1999), 85–111.

[9] F. Luo, Automorphisms of the complex of curves, *Topology* **39** (2000), 283–298.