写像類群の測度同値剛性定理

木田 良才 (京都大学大学院理学研究科)

1　はじめに

向き付け可能な閉曲面 M に対し, M から M への同相写像のアイソトピー類からなる群を M の**写像類群**といい, $\mathrm{Mod}^*(M)$ とかく. この群は可算であることが知られている. 測度同値とは可算で離散な群 (そのような群を離散群と呼ぶ) の間に定義される同値関係であり, Lie 群の格子の同型類がその Lie 群を決定するかを問う問題や測度空間上の群作用に関する軌道同型の問題と関連が深い. 本講演で紹介する定理の一つは, 向き付け可能な閉曲面 M の種数が 2 以上のとき, 写像類群 $\mathrm{Mod}^*(M)$ と測度同値になる離散群は $\mathrm{Mod}^*(M)$ と実質的に同型な離散群に限ることを主張するものである. このような剛性を満たす離散群の例を示したのは, この定理が初めてである.

この剛性定理が証明される以前, 与えられた離散群と測度同値になる離散群を決定するという剛性定理の中で最も代表的なものは, 実階数が 2 以上の単純 Lie 群の格子に関する Furman の定理であった (注意 5.3 を参照). この定理の証明では, Zimmer によるコサイクル超剛性定理が必要不可欠な役割を果たす. そしてその Zimmer の定理は, Lie 群の格子から代数群への準同型に関する Margulis の超剛性定理をエルゴード理論の枠組みで拡張することにより得られる. 筆者は, 剛性定理を証明する前, 色々な曲面の写像類群を測度同値で分類する結果を得ていたが, 写像類群からの準同型に関する超剛性定理は設定にもよるが全く知られていなかったため, 写像類群の測度同値剛性定理を証明することは極めて困難であると考えていた. しかし, 測度同値の亜群による定式化をよくよく考えてみると, 測度同値剛性定理を証明する際に関連が深いのは準同型についての定理ではなく, 同型についての定理であると考える方がより自然である. 実際この考え方を基に, 写像類群の通約群の計算方法をふまえながら写像類群の測度同値剛性定理は証明される (通約群とは, 自己同型群をある意味で一般化したものである). 本講演では, 位相群の格子や測度同値に関する基本的な事実を述べた後, 写像類群の通約群に関する Ivanov の定理を紹介し, そのアイデアをふまえて写像類群の測度同値剛性定理の証明を説明する. また, 剛性定理の証明の途中で得られる結果の応用として, 写像類群と同型な格子を含む位相群を決定するという話題を紹介したい.

2 局所コンパクト位相群の格子

G を局所コンパクト位相群とし, Γ を G の部分群とする. Γ が G において離散であって, 商空間 G/Γ 上に G の各元による左掛け算の作用で不変な Borel 確率測度が存在するとき, Γ は G の**格子**であるという. 商空間 G/Γ がコンパクトになるような G の離散部分群 Γ は G の格子となり, このとき Γ は G の**一様格子**であるという. G/Γ がコンパクトでないような格子 Γ は G の**非一様格子**と呼ばれる. 例えば, $\mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の一様格子であり, $SL(n,\mathbb{Z})$ は $SL(n,\mathbb{R})$ の非一様格子であることが知られている. X を対称空間とし, 可算群 Γ が X 上忠実かつ等長に作用しているとする. もしこの作用が固有不連続 (すなわち, X の任意のコンパクト部分集合 K に対し, $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ となる $\gamma \in \Gamma$ は高々有限個) であって, X のコンパクト部分集合 F で $\Gamma F = X$ となるものが存在するならば, Γ は X の等長変換群 $\mathrm{Isom}(X)$ における一様格子となる. X が局所有限な単体複体であっても同様な主張が成り立つ. また X が対称空間であるとき, 有限測度の F で $\Gamma F = X$ となるものが存在するならば, Γ は $\mathrm{Isom}(X)$ の格子となる. よって,

- 有限体積のリーマン面 R の基本群 $\pi_1(R)$ は, R の普遍被覆を考えることにより, 双曲平面の向きを保つ等長変換群 $PSL(2,\mathbb{R})$ の格子となる.
- 任意の有限生成群は, その Cayley グラフの自己同型群における一様格子である.

最後に自明な事実を述べよう.

- 離散群 Γ がコンパクト群 K 上に自己同型として作用しているとき, Γ は半直積 $\Gamma \ltimes K$ の一様格子である.

さて, 写像類群について次の問題を考える:

問題 2.1. 種数が 2 以上の向き付け可能な閉曲面 M に対し, $\mathrm{Mod}^*(M)$ と同型な格子を含む局所コンパクト位相群は, コンパクト群 K を用いて構成される半直積 $\mathrm{Mod}^*(M) \ltimes K$ の形のものに限るか?

これは一般の離散群に対しても考えられる問題ではあるが, 特に $\mathrm{Mod}^*(M)$ について考える動機は以下に述べる事実である. M の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}$ は $\mathrm{Mod}^*(M)$ が自然に作用する空間であり, その作用はある計量について等長かつ固有不連続であることが知られている. また, $\mathcal{T}$ の有限測度の部分集合 F で $\mathrm{Mod}^*(M)F = \mathcal{T}$ となるものが存在する (ただし, コンパクトな F は存在しない). よって, 上で述べた一般的な事実を考慮すると, $\mathcal{T}$ の等長変換群 $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ が問題 2.1 の主張の反例になることを期待させる. しかし一方で, 多くの場合, $\mathrm{Mod}^*(M)$ から $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ への自然な準同型は同型になることが知られている.

本講演の主定理の一つは, 問題 2.1 の主張を本質的に肯定するものである (定理 4.2 を参照).

3　測度同値

測度同値を導入する目的の一つは, 離散群が位相群の格子となっている状況を一般化することである. この一般化により, 与えられた離散群 Γ を格子として含む位相群を決定する問題は, Γ による確率測度空間上への二つの保測作用からできる (離散測度) 亜群の間の同型を調べる問題に帰着される. 以下では簡単のために, 測度論の対象について述べる際に必要な “測度零の集合を除く” という類の言葉を所々で省いている.

3.1　定義と問題

測度同値は Gromov により導入された. その元々の動機は, 有限生成群の間で定義される擬等長の測度論的類似を考えることにあった.

定義 3.1 ([5, 0.5.E]). 二つの離散群 Γ と Λ が**測度同値 (measure equivalent)** であるとは, σ-有限正測度付きの標準 Borel 空間 (Σ, m) と m を保存するような Borel 作用 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright \Sigma$ が存在して, 次が満たされるときをいう: Σ の有限測度の Borel 部分集合 X, Y で等式

$$\Sigma = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma Y = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda X$$

が測度零の集合を除いて成り立つようなものが存在する. ここで, Γ, Λ はそれぞれ $\Gamma \times \Lambda$ の部分群 $\Gamma \times \{e\}$, $\{e\} \times \Lambda$ と同一視している. このとき, X, Y はそれぞれ作用 $\Lambda \curvearrowright \Sigma$, $\Gamma \curvearrowright \Sigma$ に関する**基本領域**と呼ばれ, $\Gamma \times \Lambda$ の作用付きの空間 (Σ, m) は Γ と Λ の **ME カップリング**と呼ばれる.

G を局所コンパクトで第二可算公理を満たす位相群とし, Γ と Λ を G の格子とする. m を G 上の Haar 測度としたとき, Γ による左掛け算と Λ による右掛け算で定義される作用 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright (G, m)$ は Γ と Λ の ME カップリングを与える. 測度同値は離散群の間の同値関係を定めることが容易にわかる. 測度同値の研究では, 種々の離散群の族を測度同値に関して分類したり, 与えられた離散群と測度同値になる離散群を決定することが基本的問題となる. また, 与えられた離散群 Γ の**自己 ME カップリング** (つまり, Γ と Γ の ME カップリング) を理解することも非常に基本的である.

“Γ の自己 ME カップリングを理解する” とはどういうことかを具体的に説明しよう. このことは測度同値に関する分類・決定問題を解くための第一段階であり, また問題 2.1 の解決にも直結する. 前者については 5 節で説明することにして, ここでは後者について説明する. 与えられた離散群 Γ の自己 ME カップリングの簡単な例を挙げよう.

例 3.2. $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ をとり, $\Sigma_f = \Gamma$ とおく. 作用 $\Gamma \times \Gamma \curvearrowright \Sigma_f$ を

$$(\gamma_1, \gamma_2)g = f(\gamma_1)g\gamma_2^{-1}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma,\ g \in \Sigma_f$$

で定めると, (Σ_f, c) は Γ の自己 ME カップリングである. ここで, c は数え上げ測度である.

この例を Γ の通約群を用いて一般化したい. 離散群 Γ に対し, Γ の**通約群 (commensurator)** とは, 次のようにして定義される群 $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ を意味する: Γ の二つの有限指数部分群の間の同型全体から成る集合 S を考える. そのような二つの同型 $f\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$ と $g\colon \Delta_1 \to \Delta_2$ に対し, Γ のある有限指数部分群上それらが一致するとき, f と g は同値であると定める. $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ を S における同値類全体で定義する. このとき, 二つの元 $f, g \in S$ の同値類の積を, Γ の有限指数部分群 $g^{-1}(\Lambda_1) \cap \Delta_1$ 上で定義される合成 $f \circ g$ の同値類で定めると, $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ は群になる. Γ の内部自己同型を考えることにより, 自然な準同型 $\mathbf{i}\colon \Gamma \to \mathrm{Comm}(\Gamma)$ が構成されることに注意する. Γ が有限生成ならば $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ は可算である. 以下では簡単のため, $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ は常に可算であると仮定する. $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ の計算例を以下に挙げる.

- $\mathrm{Comm}(\mathbb{Z}^n) \simeq GL(n, \mathbb{Q})$ である.
- 種数が 3 以上の向き付け可能な閉曲面 M に対し, 自然な準同型 $\mathbf{i}\colon \mathrm{Mod}^*(M) \to \mathrm{Comm}(\mathrm{Mod}^*(M))$ は同型である (定理 4.3 を参照).

S の元 $f\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$ に対し, 例 3.2 のようにして Λ_1 と Λ_2 の ME カップリングを構成することができる. この作用から誘導される $\Gamma \times \Gamma$ の作用が Γ の自己 ME カップリングとなる. さらに S の同値な二つの元が定める Γ の自己 ME カップリングは $\Gamma \times \Gamma$ が作用する空間として同型である.

以上に述べた自己 ME カップリングの例はいずれも Σ が可算個の元から成るものである. 逆に, Γ の自己 ME カップリング Σ で可算個の元から成るものが与えられれば, Σ から $(\mathrm{Comm}(\Gamma), \mathbf{i}, \mathbf{i})$ への $(\Gamma \times \Gamma)$-同変写像が構成される. ここで, $(\mathrm{Comm}(\Gamma), \mathbf{i}, \mathbf{i})$ は

$$(\gamma_1, \gamma_2)g = \mathbf{i}(\gamma_1)g\mathbf{i}(\gamma_2)^{-1}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma,\ g \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$$

で定義される $\Gamma \times \Gamma$ が作用する空間 $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ である. そこで, “Γ の自己 ME カップリングを理解する” ための一つの具体的な問題として次が考えられる:

問題 3.3. Γ の任意の自己 ME カップリング (Σ, m) が与えられたとき, (Σ, m) から $(\mathrm{Comm}(\Gamma), \mathbf{i}, \mathbf{i})$ への $(\Gamma \times \Gamma)$-同変 Borel 写像を構成することができるか?

もちろん一般にこの主張は正しくない. 例えば, $PSL(n, \mathbb{Z})$ の自己 ME カップリング $PSL(n, \mathbb{R})$ から $\mathrm{Comm}(PSL(n, \mathbb{Z}))$ への同変 Borel 写像は存在しない. もし

与えられた離散群 Γ に対し問題 3.3 の主張が証明されれば, 問題 2.1 は解決される. なぜなら, Γ と同型な格子を含む局所コンパクト位相群 H を Γ の自己 ME カップリングと見なしたとき, H から $(\mathrm{Comm}(\Gamma), \mathbf{i}, \mathbf{i})$ への $(\Gamma \times \Gamma)$-同変 Borel 写像は連続準同型と a.e. で一致し, その核はコンパクトになるからである. これは位相群に関する一般論から導かれる事実であり, 証明は Furman [3] に従う.

3.2 ME カップリングと亜群の間の同型

(Σ, m) を二つの離散群 Γ と Λ の ME カップリングとする. $X, Y \subset \Sigma$ をそれぞれ Λ と Γ の作用に関する基本領域とする. このとき, 以下のようにして二つの作用 $\Gamma \curvearrowright X$, $\Lambda \curvearrowright Y$ を定義し, それらからできる亜群の間の同型を構成することができる. これは, Γ と Λ の ME カップリングが Γ から Λ への同型写像の一般化であるという視点を与えるものである. 簡単のため $X = Y$ と仮定する ($m(X) = m(Y)$ ならば常にこのような X, Y を選べる). X を商空間 Σ/Λ と自然に同一視することにより, 作用 $\Gamma \curvearrowright X$ を定義する. この作用は m の X への制限に関して保測である. 作用 $\Gamma \curvearrowright \Sigma$ と区別するために, X 上の作用についてはドットを用いて記す: $(\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x$. Borel 写像 $\alpha\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ が

$$\gamma \cdot x = (\gamma, \alpha(\gamma, x))x \in X, \quad \gamma \in \Gamma,\ x \in X$$

によって定義される. 同様にして保測作用 $\Lambda \curvearrowright Y$ と Borel 写像 $\beta\colon \Lambda \times Y \to \Gamma$ を定義することができる. 一般に測度空間 Z 上に離散群 Δ が保測で作用しているとき, Z 上の (離散測度) 亜群 $\Delta \ltimes Z$ が定義される (注意 3.5 を参照). 二つの作用 $\Gamma \curvearrowright X$, $\Lambda \curvearrowright Y$ からできる亜群の間の同型が次のようにして構成される:

命題 3.4. 上の記号で, 二つの Borel 写像

$$\begin{aligned} f&\colon \Gamma \ltimes X \to \Lambda \ltimes Y, \quad f(\gamma, x) = (\alpha(\gamma, x), x) \\ g&\colon \Lambda \ltimes Y \to \Gamma \ltimes X, \quad g(\lambda, y) = (\beta(\lambda, y), y) \end{aligned}$$

はそれぞれ亜群の間の準同型となり, $f \circ g = \mathrm{id}$, $g \circ f = \mathrm{id}$ が成り立つ.

もし (Σ, m) が例 3.2 のように Γ の自己同型 f からできるものであれば, X と Y は一点からなる集合であり, 亜群 $\Gamma \ltimes X$, $\Lambda \ltimes Y$ はそれぞれ Γ, Λ と同一視され, 命題 3.4 における f ははじめに選んだ f の内部共役と一致する. もし (Σ, m) が Γ の有限指数部分群の間の同型 f からできるものであれば, X と Y は有限集合となり, 命題 3.4 における f の X の各点への制限ははじめに選んだ f の内部共役と一致する.

注意 3.5. 測度空間 Z 上に離散群 Δ が保測で作用しているとき, Z 上の (離散測度) 亜群 $\Delta \ltimes Z$ とは次のような構造をもつ測度空間 $\Delta \times Z$ を指す:

- 始点写像 $s\colon \Delta \times Z \to Z$ と終点写像 $r\colon \Delta \times Z \to Z$ はそれぞれ $s(\delta, z) = z$, $r(\delta, z) = \delta z$ で定義される.
- $s(g_1) = r(g_2)$ となる $\Delta \times Z$ の二つの元 $g_1 = (\delta_1, \delta_2 z)$, $g_2 = (\delta_2, z)$ に対し, その積 $g_1 g_2$ は $(\delta_1\delta_2, z)$ で与えられる.
- $(\delta, z) \in \Delta \times Z$ の逆元 $(\delta, z)^{-1}$ は $(\delta^{-1}, \delta z)$ で与えられる.

Δ 上では数え上げ測度を考え, $\Delta \times Z$ 上では積測度を考える. Z が一点からなる集合であるときは, 亜群 $\Delta \ltimes Z$ と群 Δ が同一視される.

4 写像類群の自己 ME カップリング

写像類群に対する問題 3.3 は次のように肯定的に解決される:

定理 4.1 ([8]). M を種数 g が 2 以上の向き付け可能な閉曲面とする. $g \geq 3$ のとき $\Gamma = \mathrm{Mod}^*(M)$ とおき, $g = 2$ のとき Γ を $\mathrm{Mod}^*(M)$ の中心による商群とする. このとき, Γ の任意の自己 ME カップリング (Σ, m) に対し, (Σ, m) から $(\mathrm{Comm}(\Gamma), \mathbf{i}, \mathbf{i})$ への $(\Gamma \times \Gamma)$-同変 Borel 写像が (測度零の集合上異なるものを除いて) 唯一存在する.

さらに, 写像類群と同型な格子を含む位相群に関する問題 2.1 は, 定理 4.1 の応用として次のように解決される:

定理 4.2 ([8]). Γ を定理 4.1 の群とし, $\tau\colon \Gamma \to H$ を Γ から局所コンパクトで第二可算公理を満たす位相群 H への単射準同型で像 $\tau(\Gamma)$ が H の格子になるようなものとする. このとき, H のコンパクトな正規部分群 K が存在して, H は半直積 $\Gamma \ltimes K$ と同型である. ここで, Γ は K 上に τ を通して内部共役で作用している.

3.2 節で述べた事実をふまえると, 写像類群の自己 ME カップリングを理解するためには, まず写像類群の通約群を知る必要がある. この節では, 写像類群の通約群の計算を紹介した後, それをどのようにして自己 ME カップリングの設定に拡張していくのかを説明する.

4.1 写像類群の通約群

種数が 2 以上の向き付け可能な閉曲面 M に対し, **カーブ複体**と呼ばれる単体複体 $C = C(M)$ が次のようにして構成される: C の頂点集合 $V(M)$ は, 一点にホモトピックでない M 上の単純閉曲線のアイソトピー類全体で与えられる. $V(M)$ の空でない有限部分集合 σ に対し, σ の各元から代表類をとり, それらが M 上互いに交わらないようにできるとき, σ は C の単体を張ると定める. C の単体の集合を $S(M)$

とかく. $\mathrm{Aut}(C)$ で C の単体複体としての自己同型群を表す. 写像類群 $\mathrm{Mod}^*(M)$ は C 上へ自然に単体複体の同型として作用するので, 準同型 $\pi\colon \mathrm{Mod}^*(M) \to \mathrm{Aut}(C)$ が得られる. 次は C に関する非常に重要な事実である ([6]): g を M の種数とする. $g \geq 3$ のとき π は同型である. $g = 2$ のとき π は全射であって, $\ker \pi$ は $\mathrm{Mod}^*(M)$ の中心に一致する. この中心は位数 2 であることが知られている. このことを用いて写像類群の通約群を計算することができる.

定理 4.3 ([6]). M を種数 g が 2 以上の向き付け可能な閉曲面とする.

(i) $\mathrm{Mod}^*(M)$ の有限指数部分群の間で定義される任意の同型 $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ に対し, $\varphi \in \mathrm{Aut}(C)$ で次を満たすものが唯一存在する:

$$\pi(f(\gamma)) = \varphi\pi(\gamma)\varphi^{-1}, \quad \forall\gamma \in \Gamma_1.$$

(ii) $g \geq 3$ のとき $\Gamma = \mathrm{Mod}^*(M)$ とおき, $g = 2$ のとき Γ を $\mathrm{Mod}^*(M)$ の中心による商群とすると, 自然な準同型 $\mathbf{i}\colon \Gamma \to \mathrm{Comm}(\Gamma)$ は同型である.

(ii) は (i) から容易に従う. (i) の証明の概略を述べるために記号を用意する. 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $t_\alpha \in \mathrm{Mod}^*(M)$ で α についての Dehn ツイストを表す. これは, M を α の曲線に沿って切り 360 度ねじって貼り付けることで定義される M の同相写像のアイソトピー類である. t_α で生成される無限巡回群を T_α と表す. 定理 4.3 の証明の粗筋は次の通りである:

(1) T_α という形の部分群を代数的に特徴付けることより, f がそのような部分群を保存することを示す. 正確に述べると, 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $\beta \in V(M)$ で $f(T_\alpha \cap \Gamma_1) = T_\beta \cap \Gamma_2$ となるようなものが唯一存在することを証明する.

(2) 写像 $\varphi\colon V(M) \to V(M)$ を, (1) の記号で $\varphi(\alpha) = \beta$ と定義する. この φ は $\mathrm{Aut}(C)$ の元を定め, 定理 4.3 の条件を満たすことを示す.

(2) で φ が C の自己同型を定めることは, $\alpha_1, \alpha_2 \in V(M)$ に対し $T_{\alpha_1} \cap \Gamma_1$ と $T_{\alpha_2} \cap \Gamma_1$ で生成される群に注目することで証明される. この小節の残りで, (1) における T_α という形の部分群の特徴付けについて説明する. 以下で説明する特徴付けのアイデアは, Ivanov による元々のものとは異なる. 次の事実は, $\mathrm{Mod}^*(M)$ の部分群に対し, 代数的な条件から幾何的な条件を導くことができるという点で有用である:

命題 4.4. $\mathrm{Mod}^*(M)$ の部分群の組 $N \lhd \Lambda$ で, N が無限かつ従順で Λ が非従順であるようなものをとったとき, N と Λ は共に可約である.

ここで, $\mathrm{Mod}^*(M)$ の部分群が**可約**であるとは, それが $S(M)$ のある元を固定するときをいう. 例えば, $\alpha \in V(M)$ に対し, $N = T_\alpha$ とおき, Λ を $\mathrm{Mod}^*(M)$ の元で α を固定するもの全体として定義すれば, N と Λ は命題 4.4 の仮定を満たす.

命題 4.4 の証明には Thurston 境界 $\mathcal{PMF}$ とカーブ複体 C を用いる．M に対する **Thurston 境界**とは, M 上の測度付き葉層からなるコンパクト空間であり, Teichmüller 空間の理想境界である．$\mathrm{Mod}^*(M)$ は $\mathcal{PMF}$ 上同相写像として作用する．$\mathcal{MIN}$ で極小な測度付き葉層全体を表す．測度付き葉層 F が極小であるとは, $V(M)$ の各元の F に関する横断的測度が正であるときをいう．$\mathcal{MIN}$ は $\mathcal{PMF}$ の $\mathrm{Mod}^*(M)$-不変な Borel 部分集合である．$\mathcal{PMF}$ と C の間には次の二つの $\mathrm{Mod}^*(M)$-同変 Borel 写像が構成される:

$$p_1 \colon \mathcal{MIN} \to \partial C, \quad p_2 \colon \mathcal{MIN}^c \to S(M).$$

ここで, $\mathcal{MIN}^c = \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ とおいた．C は Gromov の意味で双曲的な距離空間になることが知られており (Masur-Minsky), ∂C はその理想境界である．

さて, $\mathrm{Mod}^*(M)$ の部分群 $N \lhd \Lambda$ で命題 4.4 の仮定を満たすようなものをとる．N の従順性より, N-不変な $\mathcal{PMF}$ 上の確率測度 μ が存在する．もし $\mu(\mathcal{MIN}^c) > 0$ ならば, p_2 を用いて N-不変な $S(M)$ の元を見つけることができる．このことと可約部分群に関する一般論より Λ の可約性が従う．$\mu(\mathcal{MIN}^c) = 0$ と仮定する．$p_{1*}\mu$ は ∂C 上の N-不変な確率測度となる．C の双曲性を用いると, 高々二点からなる ∂C の空でない部分集合で Λ-不変となるものの存在が示される．このことから, 再び C の双曲性を用いて Λ の従順性を結論づけることができ, これは矛盾である．以上が命題 4.4 の証明の概略である．(実は上の議論において, C が局所無限な単体複体であることが障害になって, C の双曲性だけでは証明できない部分がある．C の測地線で tight なもの全体が局所有限な双曲グラフの測地線全体と似た振る舞いをするという Masur-Minsky と Bowditch による定理を用いる必要がある.)

命題 4.4 を用いることで, $\mathrm{Mod}^*(M)$ の無限可約部分群を代数的な条件で特徴付けることができる．各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $\alpha \in V(M)$ を固定する $\mathrm{Mod}^*(M)$ の元全体は, $\mathrm{Mod}^*(M)$ の極大な無限可約部分群になることに注意する．逆にほとんどの極大な無限可約部分群はこのような形をしている．さらに, T_α は, $\mathrm{Mod}^*(M)$ の極大な無限可約部分群の無限従順正規部分群で最大なものとして (大体) 特徴付けられる．この T_α の特徴付けで用いられた条件は, いずれも群の同型で保存されるものである．従って, 定理 4.3 における同型 f は T_α という形の部分群を保存する．

注意 4.5. M の種数が 1 つまり M がトーラスのとき, $\mathrm{Mod}^*(M) \simeq GL(2, \mathbb{Z})$ である．$GL(2, \mathbb{Z})$ の通約群はそれ自身より巨大なものであり, 定理 4.3 の類似は成り立たない．また, $GL(2, \mathbb{Z})$ において無限従順部分群の正規化群は常に従順であり, 命題 4.4 のような部分群の組は存在しない．

4.2 亜群を用いた議論

定理 4.1 の証明は, 亜群を用いて 4.1 節の定理 4.3 の証明に沿っていくものである．定理 4.3 の証明で用いられた諸概念 (特に従順性) がどのようにして亜群の概念

として一般化されるかを説明しよう. 測度空間 X 上の亜群 $\mathcal{G}$ をとる. ここでは, 注意 3.5 で構成した群作用からできる亜群に対し, その部分亜群を $\mathcal{G}$ の例として考えれば十分である. X が一点からなるときは, 以下で説明する $\mathcal{G}$ に対する諸概念は群に対する概念と一致することに注意する. $\mathcal{G}$ による空間 S 上への作用は, 亜群としての準同型 $\rho\colon \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(S)$ で与えられる. このとき, この作用に関する不動点とは, Borel 写像 $\varphi\colon X \to S$ で

$$\rho(g)\varphi(s(g)) = \varphi(r(g)), \quad \text{a.e. } g \in \mathcal{G}$$

を満たすものである. (もっと一般に, X の各点 x に対し空間 S_x が与えられたとき, 空間をファイバーとする X 上のバンドル $S = \{S_x\}_x$ 上への $\mathcal{G}$ の作用とその不動点を定義することができるが省略する.) 一方, 離散群の従順性は, その群による可分 Banach 空間への等長同型作用とその不動点に関する言葉で定義される. 従って, 対応して亜群の従順性を定義することが可能である. 従順性が亜群の研究で役立つ理由の一つは, その亜群が群作用に由来するものであるとき, その群と亜群の従順性が両立することである. 正確に述べると, $\Gamma \curvearrowright X$ を確率測度空間上の離散群による保測作用とすると, Γ の従順性と $\Gamma \ltimes X$ の従順性は同値である. これより, 従順性が測度同値で保存されることが従う. さらに, 群の従順性がそうであるように, 亜群の従順性は多くの同値条件をもつ. 与えられた亜群の従順性を判定する数多くの道具が今日まで考えられてきており, 従順性は極めて応用に適した性質である.

最後に, 定理 4.1 の証明の概略を簡単に述べる. M を種数が 2 以上の向き付け可能な閉曲面とし, $\Gamma = \mathrm{Mod}^*(M)$ とおく. (Σ, m) を Γ の自己 ME カップリングとし, $f\colon \Gamma \ltimes X \to \Gamma \ltimes Y$ を命題 3.4 で構成される亜群の間の同型とする. $\mathcal{G} = \Gamma \ltimes X$, $\mathcal{H} = \Gamma \ltimes Y$ とおく. 定理 4.3 の証明における (1) の主張に対応して次が示される:

命題 4.6. 任意の $\alpha \in V(M)$ に対し, 可算個の Borel 部分集合への分解 $X = \bigsqcup_n X_n$ と $\beta_n \in V(M)$ が存在して,

$$f(\mathcal{G}_\alpha|_{X_n}) = \mathcal{H}_{\beta_n}|_{f(X_n)}, \quad \forall n$$

が成り立つ. ここで, $\gamma \in V(M)$ に対し, $\mathcal{G}_\gamma = T_\gamma \ltimes X$ とおいた. また, Borel 部分集合 $Z \subset X$ と部分亜群 $\mathcal{S} < \mathcal{G}$ に対し, $\mathcal{S}|_Z = \{\, g \in \mathcal{G} \mid r(g), s(g) \in Z \,\}$ は $\mathcal{G}$ を Z へ制限して得られる亜群である. これらは $\mathcal{H}$ に対しても同様に定義される.

よって, 可算個の Borel 部分集合への分解を考えれば, f は Dehn ツイストで生成される部分亜群を保存する. Borel 写像 $\varphi\colon X \times V(M) \to V(M)$ を命題 4.6 の記号で, $x \in X_n$ のとき $\varphi(x, \alpha) = \beta_n$ と定めれば, a.e. $x \in X$ に対し $\varphi(x, \cdot)$ が $\mathrm{Aut}(C)$ の元を定めることがわかる. Borel 写像 $\Phi\colon X \to \mathrm{Aut}(C)$ を $\Phi(x) = \varphi(x)^{-1}$ で定義し, これを Σ 上に $(\Gamma \times \Gamma)$-同変になるように拡張すれば, それが求める写像となる.

5 測度同値剛性定理

次の定理は, 離散群 Γ と測度同値になる離散群を調べるためには Γ の自己 ME カップリングを調べればよいという一般的な原理を与えるものである. 証明は本質的には Furman [2] による. 定理を述べる前に記号を導入する. Γ と Λ を離散群とし, G を標準 Borel 群とする. 二つの準同型 $\pi\colon \Gamma \to G$, $\rho\colon \Lambda \to G$ に対し, $\Gamma \times \Lambda$ が次のように作用する Borel 空間 G を (G, π, ρ) で表す:

$$(\gamma, \lambda)g = \pi(\gamma)g\rho(\lambda)^{-1}, \quad \gamma \in \Gamma,\ \lambda \in \Lambda,\ g \in G.$$

定理 5.1. Γ を離散群とし, $\pi\colon \Gamma \to G$ を標準 Borel 群 G への準同型とする. 次の二条件を仮定する:

(i) 任意の Γ の自己 ME カップリング Ω に対し, Ω から (G, π, π) への $(\Gamma \times \Gamma)$-同変 Borel 写像が存在する.

(ii) G 上の確率測度で $\pi(\Gamma)$ の内部自己同型による作用で不変なものは, G の単位元上の Dirac 測度に限る.

Σ を Γ と離散群 Λ の ME カップリングとする. このとき, 準同型 $\rho\colon \Lambda \to G$ と $(\Gamma \times \Lambda)$-同変 Borel 写像 $\Phi\colon \Sigma \to (G, \pi, \rho)$ を構成することができる. さらに, $\ker \pi$ が有限で, $\pi(\Gamma)$ の G 上への左掛け算による作用に関する基本領域で Borel 部分集合となるものがとれるならば, $\ker \rho$ が有限になるような ρ をとれる.

Γ を定理 4.1 のものとし $G = \mathrm{Comm}(\Gamma)$ とおく. 定理 4.1 と定理 5.1 を組み合わせると, Γ と測度同値な離散群 Λ に対し, 準同型 $\rho\colon \Lambda \to \Gamma$ で $|\ker \rho| < \infty$ かつ $[\Gamma : \rho(\Lambda)] < \infty$ となるものを構成することができる. よって次を得る:

系 5.2 ([8])**.** M を種数が 2 以上の向き付け可能な閉曲面とする. このとき, $\mathrm{Mod}^*(M)$ と測度同値な離散群は $\mathrm{Mod}^*(M)$ と実質的に同型である.

二つの離散群 Γ と Λ が**実質的に同型 (virtually isomorphic)** であるとは, 有限指数部分群をとる操作や有限正規部分群による商群をとる操作を除いて Γ と Λ が同型になるときをいう. 実質的に同型な二つの離散群が測度同値であることは容易に従うので, 系 5.2 は $\mathrm{Mod}^*(M)$ と測度同値になる離散群を決定している.

さて, 定理 5.1 の証明の粗筋を述べよう. Σ を Γ と Λ の ME カップリングとする. 次で与えられるような $\Gamma \times \Gamma$ と $\Lambda \times \Lambda$ による $\Sigma \times \Lambda \times \Sigma$ 上の作用を考える:

$$(\gamma_1, \gamma_2)(x, \lambda, y) = (\gamma_1 x, \lambda, \gamma_2 y), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma,\ \lambda \in \Lambda,\ x, y \in \Sigma,$$

$$(\lambda_1, \lambda_2)(x, \lambda, y) = (\lambda_1 x, \lambda_1 \lambda \lambda_2^{-1}, \lambda_2 y), \quad \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda,\ x, y \in \Sigma.$$

この $\Gamma \times \Gamma$ の作用と $\Lambda \times \Lambda$ の作用は可換だから, 作用 $\Lambda \times \Lambda \curvearrowright \Sigma \times \Lambda \times \Sigma$ に関する商空間 Ω 上の $\Gamma \times \Gamma$ の作用を考えることができる. 仮定 (i) より, $(\Gamma \times \Gamma)$-同変

Borel 写像 $\Psi\colon \Omega \to (G, \pi, \pi)$ が存在する. 最終的には, 定理の主張の中の ρ, Φ を用いて, Ψ は次のようにして変数分離されることが示される:

$$\Psi([x, \lambda, y]) = \Phi(x)\rho(\lambda)\Phi(y)^{-1}, \quad \forall\lambda \in \Lambda, \text{ a.e. } (x, y) \in \Sigma \times \Sigma. \qquad (\star)$$

ここで, (x, λ, y) の Ω における同値類を $[x, \lambda, y]$ と表した. Borel 写像 $F\colon \Sigma^3 \to G$ を $F(x, y, z) = \Psi([x, e, z])\Psi([y, e, z])^{-1}$ で定義する. $(\star)$ の右辺を考えると, $F(x, y, z)$ は z によらないことを期待できる. 実際, 仮定 (ii) を用いると, これを示すことができる. そこで Fubini の定理を用いて $x_0 \in \Sigma$ をうまくとり,

$$\rho(\lambda) = \Psi([x_0, \lambda, z])\Psi([x_0, e, z])^{-1}, \quad \lambda \in \Lambda; \quad \Phi(x) = \Psi([x_0, e, x])^{-1}, \quad x \in \Sigma$$

とおけば, $\rho\colon \Lambda \to G$ は z によらない写像となる. このことより, ρ が準同型を定めることと, $\Phi\colon \Sigma \to (G, \pi, \rho)$ が $(\Gamma \times \Lambda)$-同変であることを示すことができる. 等式 $(\star)$ が成り立つことは仮定 (ii) を用いて証明される.

注意 5.3. G_0 を中心が有限で実階数が 2 以上の非コンパクト連結単純 Lie 群とし, Γ を G_0 の格子とする (例えば $n \geq 3$ として $G_0 = SL(n, \mathbb{R})$, $\Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$). $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{Ad}G_0)$ とおき, $\pi\colon \Gamma \to G$ を自然な準同型とすると, Zimmer のコサイクル超剛性定理を用いることにより, Γ, G, π が定理 5.1 の仮定 (i) を満たすことがわかる. さらに, 定理 5.1 を適用すると, Γ と測度同値になる離散群は G_0 の格子と実質的に同型であることを結論づけることができる. 詳細については [2] を参照せよ.

6　終わりに

これまで, 閉曲面の写像類群の剛性について論じてきたが, 向き付け可能で境界が空でない曲面の写像類群に対しても定理 4.1, 4.2 や系 5.2 の類似が全く同じアイデアで証明される (一つ穴付きトーラスなどいくつかの例外を除く). また, そのような写像類群の有限個の直積からなる群についても同様の剛性定理が成り立つ. この証明は自明ではなく, 有界コホモロジーの理論を測度同値の研究に応用した Monod-Shalom の結果と写像類群の ℓ^2-係数有界コホモロジーの非消滅性に関する Hamenstädt の結果を組み合わせることで得られる. 詳しくは [8] を参照せよ.

離散群 Γ の自己 ME カップリングは, Γ の有限指数部分群の間で定義される同型の一般化であることを 3.2 節で述べた. この考え方は, 写像類群以外の離散群の剛性を証明する際にも重要な指針を与えるものである. 実際この考え方を基にして, ある種の融合積で与えられる群に対しても定理 4.1, 4.2 や系 5.2 にあるような剛性が証明される ([9]). この設定では, 融合積が作用する Bass-Serre 樹木がカーブ複体の役割を果たす.

測度同値の研究全般に関する概説記事として [4] と [10] を挙げる. 共に測度同値に関して特筆すべき結果を網羅しており, 測度同値と関連する話題である軌道同型

理論にも触れている．この予稿で取り上げたカーブ複体等の写像類群周辺の話題は [7] で概説されている．亜群の従順性については [1] が詳しい．

参考文献

[1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Monogr. Enseign. Math., 36. Enseignement Math., Geneva, 2000.

[2] A. Furman, Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[3] A. Furman, Mostow-Margulis rigidity with locally compact targets, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), 30–59.

[4] A. Furman, A survey of measured group theory, preprint, arXiv:0901.0678.

[5] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups, in *Geometric group theory, Vol. 2* (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[6] N. V. Ivanov, Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces, *Int. Math. Res. Not.* **1997**, no. 14, 651–666.

[7] N. V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[8] Y. Kida, Measure equivalence rigidity of the mapping class group, preprint, to appear in *Ann. of Math.*

[9] Y. Kida, Rigidity of amalgamated free products in measure equivalence theory, preprint, arXiv:0902.2888.

[10] Y. Shalom, Measurable group theory, in *European Congress of Mathematics*, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.