ORBIT EQUIVALENCE RIGIDITY FOR MAPPING CLASS GROUPS

木田 良才 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

1. 序

本講演で扱う対象は, 可算離散群による, 測度を保存するような確率測度空間上の作用で, エルゴード的で本質的自由なものである. 2つのそのような作用が与えられたとき, それらの作用による軌道が保存されるような測度空間の間の同型が得られるならば, その2つの作用は軌道同値であるという. 本講演では特に, 曲面の写像類群の作用に関して, 軌道同値の観点から得られた結果 [Ki2], [Ki3] を紹介する. 軌道同値やそれに関連する話題については, [S] を参照せよ.

2. 軌道同値

2.1. **定義.** この予稿では, Γ, Λ, ... 等は可算で離散な群 (ほとんどの場合, 無限群) を表す. 可算で離散な群を単に離散群ともいう. また, (X, μ), (Y, ν), ... 等は有限正測度をもつ標準 Borel 空間を表す. 特に, 確率測度をもつ標準 Borel 空間を標準確率空間という. ここで, 標準 Borel 空間とは, 可分で完備な距離空間からできる Borel 空間を意味する. 基本的な事実として, 濃度が等しい標準 Borel 空間は全て Borel 空間として同型であることが知られている. 特に, 連続濃度をもつ標準 Borel 空間は Borel 空間として単位区間に同型である. 標準 Borel 空間の基本性質に関する文献としては [Ke] がある. 以下では, 離散群による標準 Borel 空間上の様々な作用について論じるが, 作用は全て Borel 可測とする. さらに, 断らない限り, 標準 Borel 空間の部分集合としては Borel 可測なものしか考えない.

定義 2.1. Borel 可測な作用 $\xi\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ に対し,

(i) ξ が**保測** (**measure-preserving**) であるとは, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と $A \subset X$ に対し, $\mu(\gamma A) = \mu(A)$ となることをいう.

(ii) ξ が**本質的に自由** (**essentially free**) であるとは, a.e. $x \in X$ に対し, その stabilizer $\{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ が単位元のみからなるときをいう.

(iii) ξ が**エルゴード的** (**ergodic**) であるとは, 可測部分集合 $A \subset X$ が Γ-不変, すなわち, $\gamma A = A$ が任意の $\gamma \in \Gamma$ について成り立つならば, $\mu(A) = 0$ または, $\mu(A) = \mu(X)$ が成り立つときをいう.

(iv) ξ が **e.f.m.p.** であるとは, ξ がエルゴード的, 本質的に自由かつ, 保測であるときをいう.

例 2.2. Γ を無限離散群とし, (X_0, μ_0) を標準確率空間とする. ここで, X_0 の濃度は連続とは限らないが, $\mu_0(\{x\}) = 1$ となる $x \in X_0$ は存在しないと仮定する. このとき, 積空間 $(X_0, \mu_0)^\Gamma = \prod_\Gamma (X_0, \mu_0)$ は標準確率空間となり, この上の Γ の作用が次のように定義される:

$$\gamma(x_g)_{g\in\Gamma} = (x_{\gamma^{-1}g})_{g\in\Gamma},\ \ \gamma \in \Gamma,\ (x_g)_{g\in\Gamma} \in X_0^\Gamma.$$

この作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^\Gamma$ は e.f.m.p. である. このような作用を **Bernoulli 作用**と呼ぶ. このことから特に, 任意の無限離散群は e.f.m.p. 作用をもつことがわかる.

2つの保測作用 $\xi\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\zeta\colon \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が与えられたとき, それらの間の, 以下のような2つの同値関係を考えたい. (X, μ) と (Y, ν) が測度空間として同型であるとは, 可測部分集合 $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ で補集合が測度 0 になるものと, X' と Y' の間の Borel 同型写像 f で測度を保つものがあるときをいう. そのような f を測度空間の間の同型写像という. 以下の2つの同値関係は測度 0 の集合を無視して定義されるものだから, 以後, 至る所で測度 0 の集合を除くといった類いの注意書きが必要になるが, 逐一述べることはしない.

定義 2.3. 2つの保測作用 $\xi\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\zeta\colon \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が **共役** (**conjugate**) であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X, \mu) \xrightarrow{\simeq} (Y, \nu)$ と同型 $F\colon \Gamma \xrightarrow{\simeq} \Lambda$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\gamma x) = F(\gamma) f(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma,\ \text{a.e. } x \in X.$$

定義 2.4. 2つの保測作用 $\xi\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\zeta\colon \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が**軌道同値** (**orbit equivalent**, **OE**) であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X, \mu) \xrightarrow{\simeq} (Y, \nu)$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\Gamma x) = \Lambda f(x) \quad \text{a.e. } x \in X.$$

$A \subset X$, $B \subset Y$ とその間の測度のクラスを保つ Borel 同型写像 $g\colon A \to B$ で, $\Gamma A = X$, $\Lambda B = Y$ かつ,

$$g(\Gamma x \cap A) = \Lambda g(x) \cap B \quad \text{a.e. } x \in A$$

が成り立つようなものが存在するとき, ξ, ζ は**弱軌道同値** (**weakly orbit equivalent**, **WOE**) であるという.

定義から明らかに, 共役な作用は OE である. 注意として, 無限離散群による e.f.m.p. 作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が与えられたとき, その基本領域で可測なものは取れない. つまり, 可測部分集合 $F \subset X$ で,

- $\mu(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F) = \mu(X)$,
- 任意の相異なる $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対し, $\mu(\gamma_1 F \triangle \gamma_2 F) = 0$

が成り立つようなものは存在しない. 基本領域が取れない故, 2つの作用による軌道の空間が同型であるかどうかを判定するのは, 一般には容易ではない. 共役とは限らない, (W)OE の例としては次がある:

命題 2.5 ([F2, Lemma 3.2])**.** G を局所コンパクトで第二可算公理を満たす位相群とし, Γ, Λ を G の格子部分群とする. 作用 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright G$ を

$$(\gamma, \lambda) g = \gamma g \lambda^{-1}$$

で定める. このとき, 2つの作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$, $\Gamma \backslash G \curvearrowleft \Lambda$ は WOE である.

$X, Y \subset G$ をそれぞれ $G \curvearrowleft \Lambda$, $\Gamma \curvearrowright G$ に関する基本領域とすると, 2つの写像

$$p\colon X \to Y, \quad p(x) = \Gamma x \cap Y,$$
$$q\colon Y \to X, \quad q(x) = y\Lambda \cap X$$

は共に各点のファイバーが高々可算個の元から成り, その上で単射になるような正測度をもつ Borel 部分集合に制限すると, その制限は 2 つの作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$, $\Gamma\backslash G \curvearrowleft \Lambda$ の間の WOE を与える.

2.2. **従順群の作用.** 軌道同値の研究は, $\mathbb{Z}$ の作用に対する研究から始まり, 現在ではより一般に, 従順群 (amenable groups) の作用に関して, 次のような結果が最終的が得られている. これにより, 従順群の e.f.m.p. 作用の OE による分類は完了したことになる.

定理 2.6. $\xi\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\zeta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を e.f.m.p. 作用とする.

(i) $\xi \sim_{\mathrm{OE}} \zeta$ であって, Γ が従順ならば, Λ も従順である ([Z, 4.3.3]).

(ii) Γ と Λ が無限で従順ならば, $\xi \sim_{\mathrm{OE}} \zeta$ である ([OW]).

(i) は, 群の従順性が OE によって保たれることを主張しており, (ii) は無限従順群の e.f.m.p. 作用は全て互いに OE であることを主張している. 従順性は, 群だけでなく色々な対象に対しても定義することができ, 例えば, e.f.m.p. 作用が従順であるということも定義できる. このような従順性は, 非従順群の作用の研究においても重要な役割を果たす.

2.3. **写像類群の作用.** M をコンパクト, 向き付け可能な連結な曲面とする (境界があってもよい). 以下, 曲面と言えば, これらの条件を満たすものを指す. M の種数が g で, 境界の連結成分の個数が p のとき, M を $M_{g,p}$ と書くこともある. このとき, $\kappa(M) = 3g + p - 4$ とおく. M の写像類群 $\Gamma(M)^\diamond$ を M の自己微分同相写像の (境界上動かしてもよい) アイソトピー類全体からなる群で定義する. 写像類群の基本的な性質については, [I1], [I2] が詳しい. 以下では, 常に $\kappa(M) > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ を仮定する.

注意 2.7. $\kappa(M) \leq 0$ となる曲面 M については次が知られている. M が $M_{0,4}$, $M_{1,0}$, $M_{1,1}$ のいずれでもないとき, $\Gamma(M)^\diamond$ は有限である. M が $M_{0,4}$, $M_{1,0}$, $M_{1,1}$ のうちのいずれかならば, $\Gamma(M)^\diamond$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ とほとんど同型となる. また, $M_{1,2}$ と $M_{0,5}$ の写像類群, $M_{2,0}$ と $M_{0,6}$ の写像類群はそれぞれほとんど同型である.

定理 2.8 ([Ki2], [Ki3])**.** $\Gamma = \Gamma(M)^\diamond$ とし, 2 つの e.f.m.p. 作用 $\xi_1\colon \Gamma \curvearrowright (X_1,\mu_1)$, $\xi_2\colon \Gamma \curvearrowright (X_2,\mu_2)$ を考える. このとき, $\xi_1 \sim_{\mathrm{OE}} \xi_2$ ならば, ξ_1 と ξ_2 は共役である.

この定理は, ξ_1 と ξ_2 が WOE であるという仮定の下でも正しい. 次の節でこの定理の証明の粗筋を述べる.

3. 定理 2.8 の証明

写像類群の作用について考える前に, 軌道同値の研究で重要な概念をいくつか紹介する. なお, この節の内容は著者による概説 [Ki4] でも詳しく説明されている.

3.1. **(測度論的) 同値関係.** $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ を保測作用とする. このとき,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X) = \{(\gamma x, x) \in X \times X : \gamma \in \Gamma,\ x \in X\}$$

は, 底空間 (X,μ) 上の擬群 (groupoid) の構造をもつ:

- range map $(x,y) \mapsto x$
- source map $(x,y) \mapsto y$

- 積 $(x,y)\cdot(y,z)=(x,z)$
- 逆元 $(x,y)^{-1}=(y,x)$

この擬群構造をもった $\mathcal{R}$ を作用 $\Gamma\curvearrowright(X,\mu)$ からできる **(測度論的) 同値関係**という. この $\mathcal{R}$ は次の３つの性質を満たす:

- (反射律) 任意の $x\in X$ に対し, $(x,x)\in\mathcal{R}$;
- (対称律) 任意の $(x,y)\in\mathcal{R}$ に対し, $(y,x)\in\mathcal{R}$;
- (推移律) 任意の $(x,y),(y,z)\in\mathcal{R}$ に対し, $(x,z)\in\mathcal{R}$.

一般に, $X\times X$ の Borel 可測部分集合で上の３つの性質を満たし, かつ, 各同値類が高々可算個の元から成るようなものを X 上の **(測度論的) 同値関係**といい, それが同値関係 $\mathcal{R}$ の Borel 部分集合であるならば, $\mathcal{R}$ の部分同値関係であるという.

２つの e.f.m.p. 作用 $\xi\colon\Gamma\curvearrowright(X,\mu)$, $\zeta\colon\Lambda\curvearrowright(Y,\nu)$ に対し, ξ と ζ が OE であることとそれらからできる同値関係 $\mathcal{R}(\xi)$ と $\mathcal{R}(\zeta)$ が (擬群として) 同型であることは同値である. 実際, 同型 $f\colon(X,\mu)\xrightarrow{\simeq}(Y,\nu)$ が $\xi\sim_{\mathrm{OE}}\zeta$ を与えるとすると,

$$f\colon\mathcal{R}(\xi)\to\mathcal{R}(\zeta),\quad (x,y)\mapsto(f(x),f(y))$$

は同型を与える. 逆に同値関係の間の同型が得られれば, 底空間の間の同型が２つの作用の間の OE を与える.

3.2. **コサイクル.** 一般に, $\xi\colon\Gamma\curvearrowright(X,\mu)$, $\zeta\colon\Lambda\curvearrowright(Y,\nu)$ を e.f.m.p. 作用とし, それらが OE であるとする, すなわち, 同型写像 $f\colon(X,\mu)\xrightarrow{\simeq}(Y,\nu)$ で

$$f(\Gamma x)=\Lambda f(x)\quad \text{a.e. } x\in X$$

が成り立つようなものが存在するとする. このとき, $\Lambda\curvearrowright(Y,\nu)$ が本質的に自由であることを使うと, Borel 写像 $\rho\colon\Gamma\times X\to\Lambda$ で,

$$f(\gamma x)=\rho(\gamma,x)f(x)\quad \forall\gamma\in\Gamma \text{ a.e. } x\in X$$

となるものが構成される. このような ρ を (f による) **(OE) コサイクル**といい, ρ は次のコサイクル恒等式を満たす:

$$(*)\qquad \rho(\gamma_1,\gamma_2x)\rho(\gamma_2,x)=\rho(\gamma_1\gamma_2,x)\quad \forall\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma,\ \text{a.e. } x\in X.$$

証明は以下のように定義より容易に従う:

$$\rho(\gamma_1\gamma_2,x)f(x)=f(\gamma_1\gamma_2x)=\rho(\gamma_1,\gamma_2x)f(\gamma_2x)=\rho(\gamma_1,\gamma_2x)\rho(\gamma_2,x)f(x).$$

一般に, Γ, Λ を離散群とし, Γ が (X,μ) 上に保測で作用しているとき, Borel 写像 $\rho\colon\Gamma\times X\to\Lambda$ が上記のコサイクル恒等式 $(*)$ を満たすとき, ρ を**コサイクル**という.

注意 3.1. ２つの e.f.m.p. 作用 $\xi_1\colon\Gamma\curvearrowright(X_1,\mu_1)$, $\xi_2\colon\Gamma\curvearrowright(X_2,\mu_2)$ が測度空間の間の同型 $f\colon(X_1,\mu_1)\xrightarrow{\simeq}(X_2,\mu_2)$ により OE であるとし, $\rho\colon\Gamma\times X_1\to\Gamma$ を OE コサイクルとする. もし, Borel 写像 $\varphi\colon X_1\to\Gamma$ で,

$$\rho(\gamma,x)=\varphi(\gamma x)\gamma\varphi(x)^{-1}\quad \forall\gamma\in\Gamma,\ \text{a.e. } x\in X_1$$

となるものが存在するならば, $f_\varphi\colon X_1\to X_2$ を $f_\varphi(x)=\varphi(x)^{-1}f(x)$, $x\in X_1$ で定める. このとき, $\gamma\in\Gamma$, $x\in X_1$ に対し,

$$f_\varphi(\gamma x)=\varphi(\gamma x)^{-1}f(\gamma x)=\varphi(\gamma x)^{-1}\rho(\gamma,x)f(x)=\gamma\varphi(x)^{-1}f(x)=\gamma f_\varphi(x).$$

ゆえに, f_φ は Γ の作用に関して同変となる. このことから, f_φ が測度空間の間の同型を定めることを見るのは易しいので, 結果として, 2 つの作用 ξ_1, ξ_2 は f_φ を通して共役であることがわかる.

3.3. **コサイクル剛性.** M を $\kappa(M) = 3g + p - 4 > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ となる曲面とする. $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma(M)^\diamond$ とする. 注意 3.1 より, 写像類群の作用に関する定理 2.8 は次のコサイクルに関する定理から証明される:

定理 3.2 ([Ki2])**.** $\xi_1 \colon \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\xi_2 \colon \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を e.f.m.p. 作用とし, 同型 $f \colon (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\simeq} (X_2, \mu_2)$ は $\xi_1 \sim_{\mathrm{OE}} \xi_2$ を与えるとする. $\rho \colon \Gamma_1 \times X_1 \to \Gamma_2$ を f による OE コサイクルとする. このとき, Borel 写像 $\varphi \colon X_1 \to \Gamma_2$ で,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x)\gamma\varphi(x)^{-1} \quad \forall \gamma \in \Gamma,\ \text{a.e. } x \in X_1$$

が成り立つようなものが存在する.

以下では, この φ の構成の仕方について述べる. $\mathcal{R}^1$, $\mathcal{R}^2$ をそれぞれ作用 ξ_1, ξ_2 からできる同値関係とする. f は $\xi_1 \sim_{\mathrm{OE}} \xi_2$ を与えるから, 同値関係の間の同型

$$f \colon \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$$

を与える. 定理 3.2 の証明で最も重要なことは, この f がある特別な部分同値関係を保存することを見ることなのだが, そのことを定式化するために記号を準備する.

定義 3.3. $V(M)$ を M 上の, 境界成分にも一点にもアイソトピックでない単純閉曲線のアイソトピー類全体とする. $S(M)$ を $V(M)$ の空でない有限部分集合 F で, F の元の代表となる曲線たちを M 上互いに交わらないように実現できるようなもの全体とする. $C = C(M)$ を, $V(M)$ を頂点集合, $S(M)$ を単体の集合とするような単体複体とする. この C は M の**カーブ複体**と呼ばれている.

C の次元は $\kappa(M) = 3g + p - 4$ に一致する. M の写像類群は, C 上単体複体の自己同型として作用する. C の単体複体としての自己同型群について次のことが知られている.

定理 3.4 ([I2, Section 8])**.** M を $\kappa(M) > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ となる曲面とする. 自然な準同型 $\pi \colon \Gamma(M)^\diamond \to \mathrm{Aut}(C)$ は同型である.

各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $t_\alpha \in \Gamma(M)^\diamond$ を α に関する Dehn twist とし, $\langle t_\alpha \rangle$ で, t_α で生成される無限巡回部分群を表す. $i = 1, 2$ と $\alpha \in V(M)$ に対し,

$$\mathcal{R}^i_\alpha = \{(\gamma x, x) \in \mathcal{R}^i : \gamma \in \langle t_\alpha \rangle,\ x \in X_i\}$$

で $\langle t_\alpha \rangle$ で生成される $\mathcal{R}^i$ の部分同値関係を表す. $\mathcal{R}^i$ の部分同値関係 $\mathcal{S}$ と Borel 部分集合 $A \subset X_i$ に対し,

$$(\mathcal{S})_A = \mathcal{S} \cap (A \times A)$$

で, $\mathcal{S}$ の A への制限を表す. $(\mathcal{S})_A$ は A 上の同値関係となる. 次の定理は, $f \colon \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}^2$ が Dehn twist で生成される部分同値関係を (底空間の可算個の Borel 部分集合による分解を除いて) 保存するということを示している.

定理 3.5. 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, X_1 の可算個の Borel 部分集合による分割 $X_1 = \bigsqcup_n A_n$ と $\beta_n \in V(M)$ が存在して, 任意の n に対し,

$$f\left(\left(\mathcal{R}^1_\alpha\right)_{A_n}\right) = \left(\mathcal{R}^2_{\beta_n}\right)_{f(A_n)}$$

が成り立つ.

この定理を仮定して, 定理 3.2 における φ を構成する. 写像 $\Phi\colon X_1 \times V(M) \to V(M)$ を次のように定義する: $\alpha \in V(M)$ に対し, 上の定理における X_1 の分割と $\beta_n \in V(M)$ をとり, $x \in A_n$ のとき $\Phi(x,\alpha) = \beta_n$ と定める. Φ の定義は X_1 の分割によらない. これは, 異なる $\alpha, \beta \in V(M)$ に対し, $\langle t_\alpha \rangle \cap \langle t_\beta \rangle = \{e\}$ となることから示せる.

補題 3.6. $\alpha, \beta \in V(M)$ に対し,

$$i(\alpha,\beta) = 0 \iff i(\Phi(x,\alpha), \Phi(x,\beta)) = 0 \quad \text{for a.e. } x \in X_1.$$

ここで, $i\colon V(M) \times V(M) \to \mathbb{N}$ は幾何学的交叉数である.

これは, 同値関係の従順性が同型 $f\colon \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}^2$ により保存されることと次の同値性から従う: $\alpha, \beta \in V(M)$ に対し,

$$i(\alpha,\beta) = 0 \iff \langle t_\alpha \rangle \vee \langle t_\beta \rangle \text{ は従順群.}$$

補題 3.6 は a.e. $x \in X_1$ に対し, $\Phi(x,\cdot)\colon V(M) \to V(M)$ が $\mathrm{Aut}(C)$ の元を定めることを意味する. (全単射であることは, f が同型であることから従う.) よって, a.e. $x \in X_1$ に対し, $\varphi(x) = \Phi(x,\cdot) \in \mathrm{Aut}(C) \simeq \Gamma(M)^\diamond$ を定めることができる. これで $\varphi\colon X_1 \to \Gamma_2 = \Gamma(M)^\diamond$ が構成された. この φ が定理 3.2 の等式を満たすことを見るのは難しくない.

これで定理 2.8 は, 定理 3.5 から従うことがわかった. 次の小節で定理 3.5 の証明について述べる.

注意 3.7. 以上の議論は, Ivanov による, 写像類群の自己同型に関する次の定理の証明に従っている.

定理 3.8 ([I2])**.** Γ_1, Γ_2 を $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群とする. $f\colon \Gamma_1 \xrightarrow{\simeq} \Gamma_2$ を同型とすると, $g \in \Gamma(M)^\diamond$ で

$$f(\gamma) = g\gamma g^{-1} \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

が成り立つようなものが存在する.

この定理の証明の粗筋は次の通りである:

(1) $\langle t_\alpha \rangle \cap \Gamma_i$ の元を, Γ_i の元として代数的に特徴付ける. このことより, f は次を満たす: 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $\beta \in V(M)$ で $f(T_\alpha^1) = T_\beta^2$ となるようなものが (唯一) 存在する. ここで, $T_\gamma^i = \langle t_\gamma \rangle \cap \Gamma_i$ ($\gamma \in V(M)$, $i = 1, 2$) とおいた.

(2) $\varphi\colon V(M) \to V(M)$ を (1) の記号で, $\varphi(\alpha) = \beta$ と定義すると, φ は $\mathrm{Aut}(C)$ の元を定める.

(3) $\varphi \in \mathrm{Aut}(C)$ に対応する $\Gamma(M)^\diamond$ の元を g とすると, g は求める元である.

(3) については次のようにして示される: $\gamma \in \Gamma_1$, $\alpha \in V(M)$ をとる. このとき,

$$f(\gamma T_\alpha^1 \gamma^{-1}) = f(\gamma) T_{g(\alpha)}^2 f(\gamma)^{-1} = T_{f(\gamma)g(\alpha)}^2$$

が成り立つ. 一方,

$$f(\gamma T_\alpha^1 \gamma^{-1}) = f(T_{\gamma(\alpha)}^1) = T_{g\gamma(\alpha)}^2$$

より, $f(\gamma)g(\alpha) = g\gamma(\alpha)$. このことより, $f(\gamma)g = g\gamma$, すなわち, $f(\gamma) = g\gamma g^{-1}$ が従う.

3.4. **同値関係の従順性.** 定理 3.5 の証明を述べる前に, 同値関係の従順性を紹介する. しかし, その定義を正確に述べるためには多くの概念を導入しなければいけないため, ここでは従順性の基本的な性質を述べるだけにする. 正確な定義については, [ADR] を参照してほしい. 同値関係の従順性は, 群の従順性の類似として定義されるので, まず後者について述べる. 群の従順性は同値な条件が数多く知られているが, その中でも次の性質を考えることにする.

定義 3.9. 離散群 Γ が **従順** (**amenable**) であるとは, 次が満たされるときをいう: E を可分な Banach 空間とし, Γ は E 上等長同型として作用しているとする. E の双対空間の単位閉球 E_1^* 上の位相として weak*-位相を考える. $A \subset E_1^*$ を, Γ の作用に関して不変な空でない閉凸集合とする. このとき, A 内に Γ の作用に関する不動点が存在する. すなわち, $a \in A$ で $\gamma a = a, \forall \gamma \in \Gamma$ となるものが存在する.

同値関係は擬群の構造をもつことを述べたが, 擬群は群の一般化である. 同値関係の従順性は, 上の定義の類似として定義される. そのためには, 擬群が作用する, 底空間上の Banach 束やその作用に関する不動点等の概念を導入する必要がある. 同値関係の従順性の基本性質を次の命題でまとめておく.

命題 3.10. (i) $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を保測作用とし, $\mathcal{R}$ をその作用からできる同値関係とする. Γ が従順ならば, $\mathcal{R}$ は従順である. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が本質的自由ならば, 逆も成り立つ.
(ii) 従順な同値関係の部分同値関係は従順である.

命題 3.11. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を本質的自由な保測作用とし, $\mathcal{R}$ をその作用からできる同値関係とする. 写像 $\rho\colon \mathcal{R} \to \Gamma$ を $(\gamma x, x) \mapsto \gamma$ で定義する. (この ρ は擬群の準同型を定める.) Γ は可分コンパクト Hausdorff 空間 K 上連続に作用しているとする. $M(K)$ で K 上の確率測度全体の空間を表す. $\mathcal{S}$ を $\mathcal{R}$ の従順な部分同値関係とする. このとき, $\varphi\colon X \to M(K)$ で,

$$\rho(x, y)\varphi(y) = \varphi(x) \quad \text{for a.e. } (x, y) \in \mathcal{S}$$

となるものが存在する.

この命題で, $M(K)$ は K 上の連続関数から成る Banach 空間の双対空間の単位球面になることに注意せよ. $\mathcal{R}$ は ρ を通して K 上に作用していると見ていて, φ はその作用に関する $\mathcal{S}$ の不動点である.

3.5. **Dehn twist で生成される部分同値関係の特徴付け.** 注意 3.7 でも述べたように, Ivanov の定理 3.8 の証明では, Dehn twist で生成される巡回群の元を代数的に特徴付けていることにより, 写像類群の任意の自己同型がそのような元を保存することを示していた. 同値関係の同型写像に関する定理 3.5 も, Dehn twist で生成される部分同値関係を代数的に特徴付けることにより証明される. (ただ, その特徴付けは Ivanov のそれと異なる.) まず, 写像類群の作用からできる同値関係の部分同値関係に対し, その可約性という概念を導入したい. そして, その性質を代数的に特徴付けることから始めたい. 写像類群 $\Gamma(M)^\diamond$ の部分群 Λ が**可約** (**reducible**) であるとは, $\sigma \in S(M)$ で $\lambda\sigma = \sigma, \forall \lambda \in \Lambda$ が成り立つものが存在するときをいう. これを同値関係で定式化したい.

$\Gamma = \Gamma(M)^\diamond$ とし, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を e.f.m.p. 作用とする. $\mathcal{R}$ をその作用からできる同値関係とする. 写像 $\rho\colon \mathcal{R} \to \Gamma$ を $\rho(\gamma x, x) = \gamma$ で定義する. $\mathcal{PMF}$ を (M に対す

る) Thurston 境界とする. $\mathcal{PMF}$ は M の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}$ の理想境界と見なすことができ, Γ が連続に作用するコンパクト空間である. $\mathcal{PMF}$ は写像類群の部分群の分類において重要な役割を果たす. $\mathcal{T}$ や $\mathcal{PMF}$ のどのような点を不動点としてもつかによって, 部分群が分類される. また, $\mathcal{PMF}$ は M 上の measured foliation の projective class 全体の空間と見なすこともできる. $\mathcal{MIN}$ を M 上の minimal measured foliation の projective class 全体とする. $\mathcal{MIN}$ は $\mathcal{PMF}$ の Borel 部分集合で, Γ の作用に関して不変である. $S(M)$ は自然に $\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ の部分集合と見なすことができる. 一方で, Γ の作用に関して同変な写像

$$H\colon \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN} \to S(M)$$

が Ivanov により構成されている ([I1, Corollary 2.15] または [Ki1] の 4.2 節を参照せよ). 自然な埋め込み $S(M) \hookrightarrow \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ は, H に対する切断になっている. これを用いると, Γ の可約部分群の特徴付けが次のようにして得られる: $M(\mathcal{PMF})$ で, $\mathcal{PMF}$ 上の確率測度全体の空間を表す. Γ の部分群 Λ に対し, Λ が可約であるためには, $\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ に台をもつの $M(\mathcal{PMF})$ の元で, Λ の各元により固定されるようなものが存在することが必要十分である.

さて, $\mathcal{R}$ の recurrent な部分同値関係について次の性質を示すことができる. (同値関係が recurrent とは, その各同値類が無限個の元から成ることを意味する.)

命題 3.12 ([Ki1, Theorem 4.41])**.** $A \subset X$ を正測度をもつ Borel 部分集合とし, $\mathcal{S}$ を $(\mathcal{R})_A$ の recurrent な部分同値関係とする. Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{PMF})$ で

$$\rho(x, y)\varphi(y) = \varphi(x) \quad \text{for a.e. } (x, y) \in \mathcal{S}$$

となるものが存在するとする. (このような φ は $\mathcal{S}$ に関して **ρ-不変**であるという.) このとき A の分割 $A = A_1 \sqcup A_2$ で,

$$\varphi(x)(\mathcal{MIN}) = 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_1,$$
$$\varphi(x)(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}) = 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_2$$

となるものが本質的に唯一存在する.

これはある種の dichotomy を主張している. つまり, $\varphi(x) \in M(\mathcal{PMF})$ の台は $\mathcal{MIN}$ またはその補集合のどちらか一方に含まれる. また, Γ の無限部分群 Λ が $\mathcal{PMF}$ 上の不変確率測度 ν をもつとき, ν の台は $\mathcal{MIN}$ またはその補集合に含まれることが示すことができる. 上記の可約部分群の特徴付けを考慮して, 可約部分同値関係の定義を次のように与える:

定義 3.13. $A \subset X$ を正測度をもつ部分集合とし, $\mathcal{S}$ を $(\mathcal{R})_A$ の recurrent な部分同値関係とする.

(i) $\mathcal{S}$ に関して ρ-不変な Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN})$ が存在するとき, $\mathcal{S}$ は**可約**であるという.
(ii) $\mathcal{S}$ に関して ρ-不変な Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{MIN})$ が存在するとき, $\mathcal{S}$ は **IA (irreducible and amenable)** であるという.

ここで, $\mathcal{PMF}$ の Borel 部分集合 S に対し, $M(S) = \{\nu \in M(\mathcal{PMF}) : \nu(S) = 1\}$ とかく.

命題 3.12 はこの２つの部分同値関係は互いに排他的であることを主張している. ちなみに, IA 部分同値関係は, １つの pseudo-Anosov 元で生成される巡回群を有限

指数部分群して含むような Γ の部分群に対応している. (そのような部分群は $\mathcal{MIN}$ 上にちょうど 2 つの不動点をもち, $\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ 上には不動点はない.)

以下では, これらの特別な部分同値関係の基本性質を述べる. その前に, 正規部分同値関係について言及しておく. これは, 群論における正規部分群の類似であり, 同値関係の同型で保存される代数的な性質である. ここでは, その正確な定義を述べないが, その基本性質だけを述べておく. 詳しくは [Ki1] の 6.1 節を参照せよ. $\mathcal{R}$ を (X, μ) 上の同値関係とし, $\mathcal{S}$ が $\mathcal{R}$ の正規部分同値関係であるとき, $\mathcal{S} \lhd \mathcal{R}$ とかくことにする.

命題 3.14. 次が成り立つ:

(i) $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を保測作用とし, N を Γ の正規部分群とする. このとき, $\mathcal{R}(N \curvearrowright X) \lhd \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$.
(ii) $\mathcal{R}$ を (X, μ) 上の同値関係, $\mathcal{S}$ を $\mathcal{R}$ の正規部分同値関係とする. このとき, 正測度をもつ Borel 部分集合 $A \subset X$ に対し, $(\mathcal{S})_A \lhd (\mathcal{R})_A$.

IA, 可約部分同値関係の基本性質を以下に記す.

命題 3.15. 定義 3.13 の記号を用いる. 次が成り立つ:

(i) IA 部分同値関係は従順である ([Ki1, Proposition 4.33]).
(ii) $\mathcal{S}$ $(< (\mathcal{R})_A)$ を IA (resp. 可約) 部分同値関係とする. $\mathcal{T}$ を $(\mathcal{R})_A$ の部分同値関係で, $\mathcal{S} \lhd \mathcal{T}$ となるようなものとする. このとき $\mathcal{T}$ も IA (resp. 可約) となる.

(i) は, 次の 2 つの重要な事実を用いて示される:

(a) カーブ複体 C の (Gromov 双曲的距離空間としての) 理想境界 ∂C 上の $\Gamma = \Gamma(M)^\diamond$ による作用は (測度論的な意味で) 従順である ([Ki1, Theorem 3.29]).
(b) Γ の作用に関して同変な連続写像 $\pi\colon \mathcal{MIN} \to \partial C$ が構成される. (これは, Klarreich [Kl] による.)

(a) は C の距離空間としての双曲性等の幾何的な性質を用いることで証明される. (ここでは, 作用の従順性については詳述しない.) (b) についていうと, ∂C の点は曲面 M 上の (transverse measure 無しの) minimal foliation に対応しており, π は transverse measure を忘れるという対応である. IA 部分同値関係 $\mathcal{S}$ $(< (\mathcal{R})_A)$ に対し, $\varphi\colon A \to M(\mathcal{MIN})$ を $\mathcal{S}$ に関する ρ-不変 Borel 写像とすると, φ と π は ρ-不変 Borel 写像 $A \to M(\partial C)$ を誘導する. この写像の像は ∂C 上の確率測度で台が高々 2 点から成るもの全体に含まれることがわかり, このことと (a) を用いると, $\mathcal{S}$ の従順性が従う.

(ii) は, $\mathcal{S}$ に関する ρ-不変写像の中で, ある特別な性質をもつものは唯一であることが証明されるので, その唯一の写像が $\mathcal{T}$ に関しても ρ-不変であることより従う. 詳しくは [Ki1] の 6.2 節を参照せよ.

命題 3.16. $\mathcal{S}$ $(< (\mathcal{R})_A)$ を recurrent で従順な部分同値関係とする. $\mathcal{T}$ を $(\mathcal{R})_A$ の至る所非従順な部分同値関係で, $\mathcal{S} \lhd \mathcal{T}$ となるものとする. このとき $\mathcal{T}$ は可約である.

(Y, ν) 上の同値関係 $\mathcal{U}$ が**至る所非従順**であるとは, 正測度をもつ任意の Borel 部分集合 $B \subset Y$ に対し, $(\mathcal{U})_B$ が従順でないときをいう.

命題 3.16 の証明. $\mathcal{S}$ は従順なので, ρ-不変 Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{PMF})$ が存在する. 命題 3.12 より, A の分割 $A = A_1 \sqcup A_2$ で,

$$\begin{aligned} \varphi(x)(\mathcal{MIN}) &= 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_1, \\ \varphi(x)(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}) &= 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_2 \end{aligned}$$

となるものが存在する. もし, A_1 が正測度をもつならば, $(\mathcal{S})_{A_1} \lhd (\mathcal{T})_{A_1}$ かつ $(\mathcal{S})_{A_1}$ は IA 故, $(\mathcal{T})_{A_1}$ も IA となり, 特に従順である. これは, $\mathcal{T}$ が至る所非従順であることに反する. ゆえに, $A = A_2$ となり, $\mathcal{S}$ は可約である. □

この命題で大切な点は, 同値関係の代数的な性質だけから, 可約という幾何的な性質を導いていることである. このことが可約部分同値関係の代数的な特徴付けをする上で重要な役割を果たす. この代数的な特徴付けについての正確な主張は複雑になるので, ここでは述べないが, その帰結として次を得る:

定理 3.17. $\xi_1\colon \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\xi_2\colon \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を e.f.m.p. 作用とし, $f\colon (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\simeq} (X_2, \mu_2)$ は $\xi_1 \sim_{\mathrm{OE}} \xi_2$ を与えるとする. $\mathcal{R}^1$, $\mathcal{R}^2$ をそれぞれ作用 ξ_1, ξ_2 からできる同値関係とする. このとき, 同型

$$f\colon \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}^2$$

は次を満たす: $A \subset X$ を正測度の Borel 部分集合, $\mathcal{S} < (\mathcal{R}^1)_A$ を可約部分同値関係とすると, $f(\mathcal{S}) < (\mathcal{R}^2)_{f(A)}$ も可約である.

これを用いて, Dehn twist で生成される部分同値関係が同型 $f\colon \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}^2$ によって保存されることを見る. 方針は次のようになる:

(A) f は可約部分同値関係を保存するから, そのようなもので (包含関係の意味で) 極大なものも保存する.

(B) 極大な可約部分同値関係は次のようにして特徴付けられる: 定義 3.13 の記号で, $(\mathcal{R})_A$ の極大な可約部分同値関係 $\mathcal{S}$ は, ある Borel 写像 $\varphi\colon A \to V(M)$ の "stabilizer" $\mathcal{S}_\varphi$ にだいたい一致する. (正確にはそうならない場合もある.) ここで,

$$\mathcal{S}_\varphi = \{(x, y) \in (\mathcal{R})_A : \rho(x, y)\varphi(y) = \varphi(x)\}$$

が成り立つ. 逆に, 任意の Borel 写像 $\varphi\colon A \to V(M)$ に対し, $\mathcal{S}_\varphi$ は $(\mathcal{R})_A$ の極大な可約部分同値関係である.

(C) (B) の記号で, Borel 写像 $\varphi\colon A \to V(M)$ に対し, $\mathcal{S} \lhd \mathcal{S}_\varphi$ となる recurrent で従順な部分同値関係 $\mathcal{S}$ は次を満たす: 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $A_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$ の測度が正ならば,

$$(\mathcal{S})_{A_\alpha} < (\mathcal{R}_\alpha)_{A_\alpha}.$$

ここで,

$$\mathcal{R}_\alpha = \{(\gamma x, x) \in \mathcal{R} : \gamma \in \langle t_\alpha \rangle,\ x \in X\}.$$

逆に, $A_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$ の測度が正ならば, $(\mathcal{R}_\alpha)_{A_\alpha} \lhd (\mathcal{S}_\varphi)_{A_\alpha}$ であって, $\mathcal{R}_\alpha$ は recurrent で従順な同値関係である.

(D) (C) により, $\mathcal{R}_\alpha$ が代数的に特徴付けられたことになり, 同型 $f\colon \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}^2$ は $\mathcal{R}_\alpha$ の形の部分同値関係を保存する.

以上が定理 3.5 の証明の方針である.

注意 3.18. 上の議論は Ivanov の定理 3.8 の証明 (注意 3.7) における, (1) の証明の方針にもなる.

4. 超剛性定理

定理 2.8 は同じ群 $\Gamma = \Gamma(M)^\diamond$ の作用の間の軌道同値を考えているが, それでは, Γ の作用と軌道同値になる作用をもつ離散群 Λ はどのような群だろうか? この問いに対しては以下のような答えが得られている:

定理 4.1 ([Ki2], [Ki3])**.** $\Gamma = \Gamma(M)^\diamond$ とし, Λ を離散群とする. $\xi\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, $\zeta\colon \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ を e.f.m.p. 作用とし, $\xi \sim_{\mathrm{WOE}} \zeta$ とする. このとき, ξ と ζ はほとんど共役 (virtually conjugate) である. 特に, Γ と Λ はほとんど同型である.

2 つの離散群 Γ と Λ が**ほとんど同型 (virtually isomorphic)** であるとは, 群の短完全列

$$1 \to N \to \Gamma \to \Gamma_1 \to 1, \quad 1 \to M \to \Lambda \to \Lambda_1 \to 1$$

で N, M が有限なものと, 有限指数部分群 $\Gamma_2 < \Gamma_1$, $\Lambda_2 < \Lambda_1$ で $\Gamma_2 \simeq \Lambda_2$ となるものが存在するときをいう. ほとんど同型な 2 つの離散群が WOE となる作用をもつことを見るのは易しい. よって, 定理 4.1 は $\Gamma(M)^\diamond$ の作用と WOE になる作用をもつ離散群を特徴付けている.

定理 4.1 の証明は, コサイクル剛性定理 3.2 と, Furman [F1] による手法を用いる. この Furman による手法は, 同じ Γ の 2 つの作用の間の考察から, Γ と別の離散群 Λ の作用の間の WOE から Λ の Γ (または Γ より少し大きい群) への表現を構成する方法であり, 非常に一般的なものである. (Furman はこれを, $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の中心が自明な連結単純 Lie 群の格子部分群による作用の研究に応用した. 結果として, Zimmer によるコサイクル超剛性定理 [Z] を用いて, そのような格子部分群の作用について OE に関する剛性を示している. [F1], [F2] を参照のこと.) 定理 3.2 から定理 4.1 を導くプロセスについては [Ki2] または [Ki4] を参照してほしい.

References

[ADR] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Monogr. Enseign. Math., 36. Enseignement Math., Geneva, 2000.

[F1] A. Furman, Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[F2] A. Furman, Orbit equivalence rigidity, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1083–1108.

[I1] N. V. Ivanov, *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Transl. of Math. Monogr., 115. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[I2] N. V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Ke] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., 156. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Ki1] Y. Kida, The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory, preprint, to appear in *Mem. Amer. Math. Soc.*

[Ki2] Y. Kida, Measure equivalence rigidity of the mapping class groups, preprint, to appear in *Ann. of Math.*

[Ki3] Y. Kida, Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of the mapping class group, *Geom. Dedicata* **131** (2008), 99–109.

[Ki4] Y. Kida, Introduction to measurable rigidity of mapping class groups, preprint, to appear in *Handbook of Teichmüller theory* (A. Papadopoulos, ed.), Volume II.

[Kl] E. Klarreich, The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space, preprint, available at http://nasw.org/users/klarreich.

[OW] D. S. Ornstein and B. Weiss, Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), 161–164.

[S] Y. Shalom, Measurable group theory, in *European Congress of Mathematics*, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[Z] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monogr. Math., 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

Mathematical Institute, Tohoku University, 980-8578 Sendai, Japan
E-mail address: kida@math.tohoku.ac.jp