ORBIT EQUIVALENCE AND MEASURABLE GROUP THEORY

木田 良才 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

1. 序

2つの可算離散群による測度空間上の作用の間に定義される同値関係として軌道同値 (orbit equivalence, OE) というものがある. この概念の研究は, エルゴード理論や作用素環論との密接な関連を保ちながら, 共に今日まで発展してきた. この予稿では, 軌道同値に関する代表的な分類結果や剛性定理を紹介する. 以下, 2 節で, 問題の定式化に必要な概念を紹介する. 3 節では無限従順群 (例えば $\mathbb{Z}$) の作用の共役, 軌道同値による分類結果を述べる. 4 節では, 代表的な軌道同値に関する不変量であるコストについて述べる. 5 節では, 2 つの作用が軌道同値という仮定から, 実はその 2 つの作用が共役であるという剛性がいつ成立するかという問題について述べる. この分野の詳しい概説記事として [S] を挙げておく.

2. 定義

問題設定のための概念をいくつか紹介する. この予稿では, Γ, Λ, ... 等は可算で離散な群 (ほとんどの場合, 無限群) を表す. 可算で離散な群を単に離散群ともいう. また, (X,μ), (Y,ν), ... 等は有限正測度をもつ標準 Borel 空間を表す. 特に, 確率測度をもつ標準 Borel 空間を標準確率空間という. ここで, 標準 Borel 空間とは, 可分で完備な距離空間からできる Borel 空間を意味する. 以下では, 離散群による標準 Borel 空間上の様々な作用について論じるが, 作用は全て Borel 可測とする. さらに, 断らない限り, 標準 Borel 空間の部分集合としては可測なものしか考えない.

注意 2.1. 基本的な事実として, 濃度が等しい標準 Borel 空間は全て Borel 空間として同型であることが知られている. 特に, 連続濃度をもつ標準 Borel 空間は Borel 空間として単位区間に同型である. 標準 Borel 空間の基本性質に関する文献としては [Ke] がある.

定義 2.2. Borel 可測な作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ に対し,

(i) α が**保測** (**measure-preserving**) であるとは, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と Borel 部分集合 $A \subset X$ に対し, $\mu(\gamma A) = \mu(A)$ となることをいう.
(ii) α が**本質的に自由** (**essentially free**) であるとは, a.e. $x \in X$ に対し, その安定部分群 $\{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ が単位元のみからなるときをいう.
(iii) α が**エルゴード的** (**ergodic**) であるとは, Borel 部分集合 $A \subset X$ が Γ-不変, すなわち, $\gamma A = A$ が任意の $\gamma \in \Gamma$ について成り立つならば, $\mu(A) = 0$ または, $\mu(A) = \mu(X)$ が成り立つときをいう.
(iv) α が **e.f.m.p.** であるとは, α がエルゴード的, 本質的に自由, かつ, 保測であるときをいう.

この予稿では以下のような e.f.m.p. 作用が現れる. これらの作用が実際に e.f.m.p. であることの証明は引用文献を参照せよ.

例 2.3. $SL_n(\mathbb{Z})$ によるトーラス $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上の標準的な作用は e.f.m.p. である ([Z] の Example 2.1.5 と 97p を見よ).

例 2.4. G を $\mathbb{R}$-階数が 2 以上で中心が自明な連結単純 Lie 群とし, Γ をその格子部分群 (即ち, Γ は G の離散部分群で G 上の左 Haar 測度に関して余体積が有限) とする. (X,μ) を atom がない (つまり, $\mu(\{x\})>0$ となる $x\in X$ が存在しない) ような標準確率空間とする. このとき, 任意のエルゴード的保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ は本質的自由であることが知られている ([SZ, Corollary 4.4]). また, Γ, Λ を G の格子部分群とするとき, 作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$ はエルゴード的であることが知られている ([Z, Theorem 2.2.6]). 以上のことより, 作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$ は e.f.m.p. であることが分かる.

例 2.5. Γ を無限離散群とし, (X_0,μ_0) を標準確率空間とする. さらに, (X_0,μ_0) は非自明, つまり, $\mu_0(\{x\})=1$ なる $x\in X_0$ は存在しないとする. このとき, 積空間 $(X_0,\mu_0)^\Gamma=\prod_\Gamma(X_0,\mu_0)$ は標準確率空間となり, この上の Γ の作用が次のように定義される:

$$\gamma(x_g)_{g\in\Gamma}=(x_{\gamma^{-1}g})_{g\in\Gamma},\quad \gamma\in\Gamma,\ (x_g)_{g\in\Gamma}\in X_0^\Gamma.$$

この作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0,\mu_0)^\Gamma$ は e.f.m.p. である (例えば, [K3, Lemmas 2.4, 2.5] を見よ). このような作用を **Bernoulli 作用**と呼ぶ. このことから特に, 任意の無限離散群は e.f.m.p. 作用をもつことがわかる.

2 つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が与えられたとき, それらの間の, 以下のような 2 つの同値関係を考えたい. (X,μ) と (Y,ν) が測度空間として同型であるとは, 可測部分集合 $X'\subset X$, $Y'\subset Y$ で補集合が測度 0 になるものと, X' と Y' の間の Borel 同型写像 f で (正の定数倍を除いて) 測度を保つものがあるときをいう. そのような f を測度空間の間の同型写像という. 以下の 2 つの同値関係は測度 0 の集合を無視して定義されるものだから, 以後, 至る所で測度 0 の集合を除くといった類いの注意書きが必要になるが, 逐一述べることはしない.

定義 2.6. 2 つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が **共役 (conjugate)** であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu)\xrightarrow{\simeq}(Y,\nu)$ と同型 $F\colon \Gamma\xrightarrow{\simeq}\Lambda$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\gamma x)=F(\gamma)f(x)$$

が任意の $\gamma\in\Gamma$ と a.e. $x\in X$ に対して成り立つ.

定義 2.7. 2 つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が **軌道同値 (orbit equivalent, OE)** であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu)\xrightarrow{\simeq}(Y,\nu)$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\Gamma x)=\Lambda f(x)$$

が a.e. $x\in X$ に対して成り立つ.

注意 2.8. 定義から明らかに, 共役な作用は OE である. 2 つの作用が OE であるとは, その作用からできる軌道の空間が同型であるという言い方もできよう. 注意として, 無限離散群による e.f.m.p. 作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が与えられたとき, その基本領域で可測なものは取れない. つまり, 可測部分集合 $F\subset X$ で,

- $\mu(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F)=\mu(X)$,
- 任意の相異なる $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ に対し, $\mu(\gamma_1 F\triangle\gamma_2 F)=0$

が成り立つようなものは存在しない. 基本領域が取れない故, 2つの作用による軌道の空間が同型であるかどうかを判定するのは, 一般には容易ではない.

3. 無限従順群の作用の分類

$\mathbb{Z}$ のエルゴード的保測作用を共役に関して分類することは, エルゴード理論において古典的な問題である. そのような作用の重要な (共役に関する) 不変量としてエントロピーがある. これは $\mathbb{Z}$ のエルゴード的保測作用に対して定義される $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$-値不変量であって, Kolomogorov によって導入された. 例えば, 2つの Bernoulli 作用

$$\mathbb{Z} \curvearrowright \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \quad \mathbb{Z} \curvearrowright \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$$

が共役でないということが, エントロピーを用いて示すことができる. ここで, $\{0,1\}$ (resp. $\{0,1,2\}$) は各点が測度 1/2 (resp. 1/3) をもつ標準確率空間である. さらに, 任意の $\mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$ の元をエントロピーとして持つ Bernoulli 作用が構成できる. 実は, エントロピーは $\mathbb{Z}$ の Bernoulli 作用に関して完全不変量である, すなわち, エントロピーが等しい2つの $\mathbb{Z}$ の Bernoulli 作用は共役であることが知られている (Ornstein). この予稿では, これ以上エントロピーについては触れない.

一方 OE の研究においては, 次の Dye による結果が示されたことにより, $\mathbb{Z}$ の作用の OE に関する分類問題は解決された.

定理 3.1 ([D])**.** $\mathbb{Z}$ の任意の e.f.m.p. 作用は互いに OE である.

この後, もっと一般に, 従順群 (amenable groups) の作用に関する研究が行われ, 最終的に次の結果が得られた. これにより, 従順群の e.f.m.p. 作用の OE による分類は完了したことになる.

定理 3.2. $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を e.f.m.p. 作用とする.

(i) α と β が OE であって, Γ が従順ならば, Λ も従順である ([Z, Proposition 4.3.3]).

(ii) Γ と Λ が無限で従順ならば, α と β は OE である ([OW]).

(i) は, 群の従順性が OE によって保たれることを主張しており, (ii) は無限従順群の e.f.m.p. 作用は全て互いに OE であることを主張している. 言い換えると, 無限従順群の e.f.m.p. 作用によりできる軌道構造は, 作用する群の従順性以外の情報を覚えていないということになる.

4. OE に関する不変量: コスト

OE に関しての不変量はいくつか存在するが (例えば群の従順性は不変量である. 定理 3.2 (i) を見よ), この節ではコストという不変量を紹介する. コストは, 任意の e.f.m.p. 作用に対して定義される非負実数であり, Levitt [L] により導入され, Gaboriau [G] によりその重要性が認識されるようになった. コストの定義を与える前に, 群の作用からできる (測度論的) 同値関係という概念を紹介する.

$\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ を離散群 Γ の標準確率空間 (X,μ) 上の保測作用とする. このとき $X \times X$ の Borel 部分集合 $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ を次で定める:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X) = \{(\gamma x, x) \in X \times X : \gamma \in \Gamma,\ x \in X\}.$$

この $\mathcal{R}$ を作用 $\Gamma \curvearrowright X$ からできる (**測度論的**) **同値関係**という. この $\mathcal{R}$ は次の 3 つの性質を満たす:

- (反射律) 任意の $x \in X$ に対し, $(x, x) \in \mathcal{R}$;
- (対称律) 任意の $(x, y) \in \mathcal{R}$ に対し, $(y, x) \in \mathcal{R}$;
- (推移律) 任意の $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$ に対し, $(x, z) \in \mathcal{R}$.

一般に, $X \times X$ の Borel 可測部分集合で上の 3 つの性質を満たすものを X 上の (測度論的) 同値関係といい, それが $\mathcal{R}$ の部分集合であるならば, $\mathcal{R}$ の部分同値関係であるという. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ 上には, 次のようにして測度 $\tilde{\mu}$ が定義される: Borel 可測部分集合 $A \subset \mathcal{R}$ に対し,

$$\tilde{\mu}(A) = \int_X |A \cap (\{x\} \times X)| d\mu(x)$$

と定める.

注意 4.1. 2 つの保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が $f\colon (X, \mu) \xrightarrow{\simeq} (Y, \nu)$ により OE であるとする, 即ち, $f(\Gamma x) = \Lambda f(x)$ が a.e. $x \in X$ に対して成り立つとすると,

$$(\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X), \tilde{\mu}) \to (\mathcal{R}(\Lambda \curvearrowright Y), \tilde{\nu}), \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$$

は測度空間の間の同型となる. 故に, OE について調べることは, 作用からできる同値関係を調べることに対応する.

標準確率空間上の保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ からできる同値関係 $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ に対し, $[[\mathcal{R}]]$ で次のような φ 全体の集合を表す: $\varphi\colon A \to B$ は X の Borel 部分集合 A, B の間の Borel 同型写像で, a.e. $x \in A$ に対し, $(\varphi(x), x) \in \mathcal{R}$ を満たす. A を $\mathrm{dom}\varphi$ ともかく. Γ の各元は $[[\mathcal{R}]]$ の元と見なせることに注意する.

$[[\mathcal{R}]]$ の部分集合 Φ に対し, $\mathcal{R}$ の部分同値関係 $\mathcal{S}$ で次を満たすもので最小のものが存在する: 任意の $\varphi \in \Phi$ と a.e. $x \in \mathrm{dom}\varphi$ に対し, $(\varphi(x), x) \in \mathcal{S}$. この最小の $\mathcal{S}$ を Φ で生成される $\mathcal{R}$ の部分同値関係と呼ぶ. また, a.e. $(x, y) \in \mathcal{R}$ に対し, $(x, y) \in \mathcal{S}$ であるためには, $x = y$ または $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$ と $i_1, \ldots, i_n \in \{\pm 1\}$ が存在して, $\varphi_n^{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_1^{i_1}(x) = y$ となることが必要十分である.

同値関係 $\mathcal{R}$ に対して定義されるコストという量は, $\mathcal{R}$ を生成するためには, どのくらいの大きさの $[[\mathcal{R}]]$ の部分集合が必要であるかを測っている. 正確に定義すると次のようになる:

定義 4.2. 標準確率空間上の保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ からできる同値関係 $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ に対し, その**コスト**を

$$C(\Gamma \curvearrowright X) = \inf \left\{ \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(\mathrm{dom}\varphi) : \Phi \subset [[\mathcal{R}]] \text{ は } \mathcal{R} \text{ を生成する.} \right\}$$

で定める.

容易にわかる事実として次がある: (i) 2 つの保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が OE ならば, $C(\Gamma \curvearrowright X) = C(\Lambda \curvearrowright Y)$; (ii) $C(\Gamma \curvearrowright X)$ は Γ の生成元の個数以下である. さらに, 比較的容易に示せる事実として, (iii) Γ が無限群で, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が e.f.m.p. ならば, $C(\Gamma \curvearrowright X) \geq 1$ である. このことと, 定理 3.2 (ii) により次がわかる:

定理 4.3. Γ が無限従順群で, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が e.f.m.p. ならば, $C(\Gamma \curvearrowright X) = 1$.

Gaboriau [G] により次の性質が証明された:

定理 4.4 ([G, Théorme IV.15]). $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ を自由積分解とし, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を e.f.m.p. 作用とする. さらに, $C(\Gamma_1 \curvearrowright X)$ と $C(\Gamma_2 \curvearrowright X)$ は共に有限であるとする. このとき

$$C(\Gamma \curvearrowright X) = C(\Gamma_1 \curvearrowright X) + C(\Gamma_2 \curvearrowright X)$$

が成り立つ.

系 4.5. $\mathbb{F}_n$ を階数 n の非可換自由群とすると, 相異なる自然数 n, m に対し, $\mathbb{F}_n$ と $\mathbb{F}_m$ の e.f.m.p. 作用は互いに OE にはなり得ない.

定義からも推測できるように, 一般にコストは下からの評価を得るのが難しい. 実際, 定理 4.4 の証明では, 不等式 $C(\Gamma \curvearrowright X) \leq C(\Gamma_1 \curvearrowright X) + C(\Gamma_2 \curvearrowright X)$ を得るのは容易であるが, 逆の不等式を得ることが本質的である.

注意 4.6. 定理 4.4 は次の Grushko による定理の類似とも見ることができる: 離散群 Γ に対し, $r(\Gamma)$ を Γ の生成元の最小個数とすると,

$$r(\Gamma_1 * \Gamma_2) = r(\Gamma_1) + r(\Gamma_2)$$

が成り立つ.

5. 剛的な作用

この節では, 2つの作用が OE であるという仮定の下で, それらが共役であることがいつ従うかという剛性問題を考える. 近年, 様々な剛的な作用が得られているので, それらの中で代表的なものを挙げていく. 一つ目は, Furman によって証明された, $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の単純 Lie 群の格子部分群の作用に関する剛性である. 二つ目は, Popa によって証明された, Bernoulli 作用に関するコサイクル超剛性である. 最後に, 筆者による, 曲面の写像類群の作用に関する剛性について述べる. 剛的な作用に関する他の結果としては, [MS] がある.

5.1. **用語と一般論.** 剛的な作用に関する結果を述べる前に, いくつか基本的な用語を紹介する. $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を e.f.m.p. 作用とする. この作用から新しい作用の作り方を2つ紹介する.

(1) N を Γ の有限正規部分群とする. このとき, Γ/N による商空間 $(X, \mu)/N$ 上の作用 β_1 は e.f.m.p. である.
(2) 離散群 Γ_1 は Γ を有限指数部分群として含んでいるとする. 作用 $\Gamma \times \Gamma_1 \curvearrowright X \times \Gamma_1$ を

$$(\gamma, \gamma_1)(x, \gamma_1') = (\gamma x, \gamma\gamma_1'\gamma_1^{-1})$$

で定義する. このとき誘導される作用 $\beta_2\colon \Gamma_1 \curvearrowright (X \times \Gamma_1)/\Gamma$ は e.f.m.p. である. このような作用を α から誘導される Γ_1 の作用と呼び, $\alpha \uparrow_{\Gamma}^{\Gamma_1}$ と書く.

OE の剛性問題を考える上で, 上記の3つの作用 α, β_1, β_2 は互いにほぼ同一視してしまった方が都合がいい. これら3つの作用は, 一般には, 定義 2.6 の意味で共役ではなく, 定義 2.7 の意味で OE でもない. しかし, 無限群の作用を研究する立場からすると, α, β_1, β_2 は, 作用に関するほぼ同じ情報を持っていると言ってもよいだろう. そこで次の定義を与える.

定義 5.1. 2つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が**ほとんど共役** (**virtually conjugate**) であるとは, α と β が上記の (1), (2) の (有限回の) 操作を除いて共役になるときをいう.

この節の目的の一つは, 次のような性質を満たす作用を紹介することである:

定義 5.2. E.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が (OE の意味で) **超剛的** (**OE superrigid**) であるとは, 次が成り立つときをいう: $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を α と OE なる e.f.m.p. 作用とすると, α と β はほとんど共役である. (特に Γ と Λ はほとんど同型である.)

注意 5.3. 上記の (1), (2) の構成に加えて, もう一つ作用の構成法を与える. これは (2) の一般化とも見ることができる.

(3) G を局所コンパクトで第二可算公理を満たす位相群とし, Γ をその格子部分群 (即ち, Γ は G の離散部分群で G 上の左 Haar 測度に関して余体積が有限) とする. 作用 $\Gamma \times G \curvearrowright X \times G$ を

$$(\gamma, g)(x, g') = (\gamma x, \gamma g' g^{-1})$$

で定義する. このとき誘導される作用 $G \curvearrowright (X \times G)/\Gamma$ は e.f.m.p. である. このような作用を α から誘導される G の作用と呼び, $\alpha \uparrow_{\Gamma}^{G}$ と書く.

剛的な作用を探すには, 2つの OE なる e.f.m.p. 作用が与えられたときに, それらがほとんど共役であることを示すことが目標となる. そこで, 2つの作用が OE であることから何が言えるかについて考える. $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を e.f.m.p. 作用とし, それらが OE であるとする, すなわち, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ で $f(\Gamma x) = \Lambda f(x)$ が a.e. $x \in X$ に対して成り立つようなものが存在するとする. このとき, $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が本質的に自由であることを使うと, Borel 写像 $\rho\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ で, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ に対し,

$$f(\gamma x) = \rho(\gamma, x) f(x)$$

となるものが構成される. このような ρ を (f による) **OE コサイクル**といい, ρ は次のコサイクル恒等式を満たす: 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ に対し,

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2 x)\rho(\gamma_2, x) = \rho(\gamma_1\gamma_2, x). \tag{1}$$

この等式は以下のようにして容易に従う:

$$\rho(\gamma_1\gamma_2, x) f(x) = f(\gamma_1\gamma_2 x) = \rho(\gamma_1, \gamma_2 x) f(\gamma_2 x) = \rho(\gamma_1, \gamma_2 x)\rho(\gamma_2, x) f(x).$$

一般に, Γ を離散群, Λ を位相群とし, Γ が (X,μ) 上に保測で作用しているとき, Borel 写像 $\rho\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ が上記のコサイクル恒等式 (1) を満たすとき, ρ を**コサイクル**という. 2つの作用の間の OE について調べることは, それからできる OE コサイクルを調べることに直結する.

命題 5.4. $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を e.f.m.p. 作用とし, それらが同型写像 $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ を通して OE であるとする. $\rho\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ を f による OE コサイクルとする. Borel 写像 $\varphi\colon X \to \Lambda$ と準同型 $F\colon \Gamma \to \Lambda$ で,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x) F(\gamma) \varphi(x)^{-1}$$

が全ての $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ について成り立つようなものが存在するとする. このとき, 次が成立する:

(i) Borel 写像

$$f_\varphi\colon X \to Y, \quad f_\varphi(x) = \varphi(x)^{-1} f(x), \ \ x \in X$$

は, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ に対し,

$$f_\varphi(\gamma x) = F(\gamma) f_\varphi(x)$$

を満たす.

(ii) $N = \ker F$ は有限であって, $[\Lambda : F(\Gamma)]$ も有限である.

(iii) α と β はほとんど共役である.

(i) の証明は簡単な計算による: $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$ に対し,

$$f_\varphi(\gamma x) = \varphi(\gamma x)^{-1} f(\gamma x) = \varphi(\gamma x)^{-1} \rho(\gamma, x) f(x) = F(\gamma)\varphi(x)^{-1} f(x) = F(\gamma) f_\varphi(x)$$

が成り立つ. (ii), (iii) の証明は省略する. (iii) についてもう少し正確に述べると次のようになる: (i) を用いると, Λ の作用に関して同変な Borel 写像 $Y \to \Lambda/F(\Gamma)$ が取れることがわかる. この写像の $eF(\Gamma) \in \Lambda/F(\Gamma)$ の逆像を Y_1 とすると, Y_1 は $F(\Gamma)$ に関して不変である. 作用 $F(\Gamma) \curvearrowright Y_1$ を β_1 とおく. β と $(\beta_1) \uparrow_{F(\Gamma)}^{\Lambda}$ は共役である. $\alpha_1\colon \Gamma/N \curvearrowright X_1 = X/N$ を α から誘導される作用とする. 再び (i) を用いると, α_1 と β_1 が, f_φ から誘導される Borel 写像と F から誘導される同型 $\Gamma/N \to F(\Gamma)$ により共役になることがわかる.

ゆえに, 与えられた OE コサイクルに対し, 上の命題の仮定を満たすような φ, F (または, それに近いもの) を探すことが我々の目標となる.

5.2. **Furman の剛性.** G を $\mathbb{R}$-階数が 2 以上で中心が自明な非コンパクト連結単純 Lie 群 とする. Γ を G の格子部分群とする. ここでは, Γ の e.f.m.p. 作用に関する剛性について述べる. この剛性は Furman によって証明されたが, その証明では Zimmer によるコサイクル超剛性が重要な役割を果たす. さらにそのコサイクル超剛性は, Margulis による超剛性の一般化と見ることができる. まずは Margulis による超剛性から見ていく. これは, Γ から代数群への準同型に関する定理であって, 像が Zariski 位相で稠密であるという仮定の下で, そのような準同型を決定するものである. 詳しい用語の定義については, [Z] の 3.1 節を参照せよ.

定理 5.5 (Margulis の超剛性, [Z, 5.1.2])**.** G を $\mathbb{R}$-階数が 2 以上で中心のない非コンパクト連結単純 Lie 群 とし, Γ を G の格子部分群とする. H を $\mathbb{R}$-単純な連結代数 $\mathbb{R}$-群で, その実点全体 $H_{\mathbb{R}}$ が非コンパクトとなるようなものとする. $\pi\colon \Gamma \to H_{\mathbb{R}}$ を準同型とし, その像 $\pi(\Gamma)$ は H で Zariski 位相に関して稠密であるとする. このとき, π は G から $H_{\mathbb{R}}$ への Lie 群としての準同型に拡張される.

この定理の帰結として, G は中心が自明で単純だから, 拡張された準同型 $\tilde{\pi}\colon G \to H_{\mathbb{R}}$ はその像への同型であることがわかり, その像は $H_{\mathbb{R}}$ の単位元を含む ($\mathbb{R}$ から誘導される位相での) 連結成分 $H_{\mathbb{R}}^0$ に一致する. $H_{\mathbb{R}}^0$ は $H_{\mathbb{R}}$ の有限指数の部分群である. 次に, この Margulis の超剛性の一般化として証明された Zimmer のコサイクル超剛性定理について述べる. これは, Γ の作用から H へのある仮定を満たすコサイクルを決定するものである.

定理 5.6 (Zimmer のコサイクル超剛性, [Z, 5.2.5, 9.4.14])**.** G, Γ, H は定理 5.5 と同じものとする. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を保測かつエルゴード的な作用とする. $\rho\colon \Gamma \times X \to H_{\mathbb{R}}$ をコサイクルとし, 任意の H より真に小さい代数 $\mathbb{R}$-部分群 L に対し, ρ は $L_{\mathbb{R}}$ に値

を持つコサイクルに同値でないとする．このとき, Borel 写像 $\varphi\colon X \to H_{\mathbb{R}}$ と Lie 群としての準同型 $\pi\colon G \to H_{\mathbb{R}}$ が存在して,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x)\pi(\gamma)\varphi(x)^{-1}$$

が任意の $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ について成立する．

ここで, 2つのコサイクル $\rho_1, \rho_2\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ が同値であるとは, Borel 写像 $\varphi\colon X \to \Lambda$ が存在して, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ について

$$\rho_1(\gamma, x) = \varphi(\gamma x)\rho_2(\gamma, x)\varphi(x)^{-1}$$

が成り立つときをいう．上の定理で, ρ が $L_{\mathbb{R}}$ に値を持つコサイクルに同値でないという仮定は, 定理 5.5 での $\pi(\Gamma)$ が H で Zariski 位相に関して稠密であるという仮定に対応している．また, (X, μ) が一点から成るときが, 定理 5.5 に対応している．このコサイクル超剛性定理と命題 5.4 での考え方を合わせると, 次の系が従う:

系 5.7. G_1, G_2 を $\mathbb{R}$-階数が 2 以上で中心が自明な非コンパクト連結単純 Lie 群とし, Γ_1, Γ_2 をそれぞれの格子部分群とする．$\alpha_1\colon \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\alpha_2\colon \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を OE なる e.f.m.p. 作用とする．このとき次が成り立つ:

(i) G_1 と G_2 は Lie 群として同型である．

(ii) $(\alpha_1) \uparrow_{\Gamma_1}^{G_1}$ と $(\alpha_2) \uparrow_{\Gamma_2}^{G_2}$ は共役である．

上の系で, 特に, G_1 と G_2 が同型でなければ, α_1 と α_2 は OE とならないことがわかる．Zimmer の定理を用いることにより, Furman は, 格子部分群の e.f.m.p. 作用に関する以下のような剛性を証明した:

定理 5.8 ([F2])**.** G を $\mathbb{R}$-階数が 2 以上で中心が自明な非コンパクト連結単純 Lie 群とし, Γ を G の格子部分群とする．Λ を離散群とし, $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ は OE なる e.f.m.p. 作用とする．このとき次が成り立つ:

(i) 群の短完全列 $1 \to N \to \Lambda \to \Lambda_1 \to 1$ で, N は有限であって, Λ_1 は $\mathrm{Aut}(G)$ の格子部分群と同型であるようなものが存在する．(G を $\mathrm{Aut}(G)$ の中の内部自己同型群と同一視すると, G は $\mathrm{Aut}(G)$ の有限指数部分群であることに注意せよ．つまり, $\mathrm{Out}(G)$ は有限群である.)

(ii) $\beta_1\colon \Lambda_1 \curvearrowright Y_1 = Y/N$ を β から誘導される作用とする．このとき, Λ_1 の作用に関して同変な Borel 写像 $Y_1 \to \mathrm{Out}(G)$ が存在する．この写像の $e \in \mathrm{Out}(G)$ の逆像を Y_2 とおくと, Y_2 は $\Lambda_2 = \Lambda_1 \cap G$ の作用に関して不変である．作用 $\Gamma_2 \curvearrowright Y_2$ を β_2 とおくと, β_1 と $(\beta_2) \uparrow_{\Lambda_2}^{\Lambda_1}$ は共役である．

(iii) $\alpha \uparrow_{\Gamma}^{G}$ と $(\beta_2) \uparrow_{\Lambda_2}^{G}$ は共役である．

特別な作用については以下の性質が示される:

定理 5.9 ([F2, Corollary B])**.** 整数 $n \geq 3$ に対し, 標準的な作用 $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ は超剛的である．

他の超剛的な作用については [F2] の Corollary B を参照せよ．

注意 5.10. OE より少し弱い同値関係として, 弱軌道同値が次のようにして定義される: 2つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が **弱軌道同値** (**weakly orbit equivalent**, **WOE**) であるとは, Borel 部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ とその間の測度空間としての同型写像 $f\colon (A, \mu|_A) \xrightarrow{\simeq} (B, \nu|_B)$ で次を満たすものがあるときをいう ($\mu|_A$ 等は μ の A への制限を表す):

(i) $\mu(X \setminus \Gamma A) = 0$, $\nu(Y \setminus \Lambda B) = 0$;

(ii) $f(\Gamma x \cap A) = \Lambda f(x) \cap B$ が a.e. $x \in A$ に対して成り立つ.

定理 5.8 は, 2 つの作用 α, β が WOE であるという仮定の下でも成立する. 典型的な WOE の例としては次がある: G を局所コンパクトで第二可算公理を満たす位相群とし, Γ, Λ をその格子部分群とする. このとき, 左かけ算による作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$ と $\Lambda \curvearrowright G/\Gamma$ は WOE である. G/Λ と G/Γ の余体積が等しいとき, その 2 つの作用は OE である. これ事実より, 定理 5.8 で扱っている Lie 群の格子部分群の e.f.m.p. 作用と WOE となる e.f.m.p. 作用を持つ離散群が完全に決定されたことになる.

5.3. **Popa の剛性.** 最近, Bernoulli 作用に関して次の結果が Popa により示された:

定理 5.11 ([P1], [P2], [F3])**.** Γ を次のどちらかの条件を満たす群とする:

(i) Γ は Kazhdan の性質 (T) を満たす無限群である; または

(ii) 非従順群 Γ_1 と無限群 Γ_2 を用いて, $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ とかける.

(X_0, μ_0) を非自明な標準確率空間とし, Bernoulli 作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^\Gamma$ を考える. Λ を任意の離散群またはコンパクト位相群とし, $\rho\colon \Gamma \times X_0^\Gamma \to \Lambda$ を任意のコサイクルとする. このとき, Borel 写像 $\varphi\colon X_0^\Gamma \to \Lambda$ と準同型 $F\colon \Gamma \to \Lambda$ で,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x) F(\gamma) \varphi(x)^{-1}$$

が全ての $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X_0^\Gamma$ について成り立つものが存在する.

この定理で強調すべきことは, コサイクルの値域になる群が任意であることと, さらにコサイクルも任意のものを扱っていることである.

系 5.12. 定理 5.11 における Bernoulli 作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^\Gamma$ は超剛的である.

5.4. **曲面の写像類群の作用に関する剛性.** 最後に, 曲面の写像類群の e.f.m.p. 作用に関する剛性について述べる. M を向き付け可能でコンパクトかつ連結な曲面とする (境界があってもよい). 以下, 曲面と言えば, これらの条件を満たすものを指す. M の種数が g で, 境界の連結成分の個数が p のとき, M を $M_{g,p}$ と書くこともある. このとき, $\kappa(M) = 3g + p - 4$ とおく. M の写像類群 $\Gamma(M)^\diamond$ を M の自己微分同相写像のアイソトピー類全体からなる群で定義する. $\Gamma(M)^\diamond$ は有限生成群であることが知られている. 写像類群の基本的な性質については, [I] が詳しい. 以下では, 常に $\kappa(M) > 0$ を仮定する.

定理 5.13 ([K2])**.** M を $\kappa(M) > 0$ なる曲面, Γ を $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群とする. このとき, Γ の任意の e.f.m.p. 作用は超剛的である.

注意 5.14. $\kappa(M) \leq 0$ となる曲面 M については次が知られている: M が $M_{0,4}$, $M_{1,0}$, $M_{1,1}$ のいずれでもないとき, $\Gamma(M)^\diamond$ は有限である. M が $M_{0,4}$, $M_{1,0}$, $M_{1,1}$ のうちのいずれかならば, $\Gamma(M)^\diamond$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ とほとんど同型となる. $SL_2(\mathbb{Z})$ やその有限指数部分群である非可換自由群の e.f.m.p. 作用に関しては, 定理 5.13 のような結果は期待できない. 例えば, A, B を無限従順群とすると, 自由積 $A * B$ の作用と $\mathbb{F}_2$ の作用で OE となるものが構成できることが知られている ([MS, Theorem 2.27]).

5.1 節でも述べたように, 2 つの作用の間の OE を調べるということは, その OE コサイクルを調べることに直結する. そのためには, 5.2 節でも見たように, 群の間の (準) 同型を調べることが手助けになるということを強調したい. このことを考慮に入れて, 写像類群の作用の問題を考えてみる. M を $\kappa(M) > 0$ なる曲面とし, さ

らに簡単のため, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ とする. この条件は本質的なものではなく, 以下で述べる定理を簡潔に述べるためのものである. Γ_1, Γ_2 を $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群とする. Γ_1 と Γ_2 の間の同型については, 次の Ivanov による結果がある.

定理 5.15 ([I, Theorem 8.5.A])**.** $\rho\colon \Gamma_1 \xrightarrow{\simeq} \Gamma_2$ を同型とすると, $g \in \Gamma(M)^\diamond$ で

$$\rho(\gamma) = g\gamma g^{-1}$$

が任意の $\gamma \in \Gamma_1$ について成り立つようなものが唯一存在する.

この定理において, 同型 ρ の代わりに OE コサイクルについて述べたものが次である:

定理 5.16 ([K1])**.** $\alpha_1\colon \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\alpha_2\colon \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を e.f.m.p. 作用とし, $f\colon (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\simeq} (X_2, \mu_2)$ は α_1 と α_2 の間の OE を導くものとする. $\rho\colon \Gamma_1 \times X_1 \to \Gamma_2$ を f から定義される OE コサイクルとする. このとき, Borel 写像 $\varphi\colon X_1 \to \Gamma(M)^\diamond$ で,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x)\gamma\varphi(x)^{-1}$$

が全ての $\gamma \in \Gamma_1$ と a.e. $x \in X_1$ に対して成り立つようなものが存在する.

この定理において, ρ, φ は定理 5.15 の ρ, g にそれぞれ対応している. このようにして, OE コサイクル $\rho\colon \Gamma_1 \times X_1 \to \Gamma_2$ が同型 $\Gamma_1 \xrightarrow{\simeq} \Gamma_2$ であるかのような見方をし, 定理 5.15 の証明の筋を追いながら, 定理 5.16 を証明していく. ただ, 定理 5.15 の証明では現れない, 技術的な困難がもちろんあるが, その点を述べるには多くの概念を導入する必要があるので, ここではこれ以上, 定理 5.16 の証明については触れないことにする. 次の系は, 命題 5.4 と $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群は非自明な有限正規部分群を持たないことに注意することで示される:

系 5.17. 定理 5.16 の仮定の下で, $\alpha_1 \uparrow_{\Gamma_1}^{\Gamma(M)^\diamond}$ と $\alpha_2 \uparrow_{\Gamma_2}^{\Gamma(M)^\diamond}$ は共役である. よって, α_1 と α_2 はほとんど共役である.

上の議論では, 2つの写像類群の e.f.m.p. 作用が (W) OE であることから, それらが共役であることを示したわけだが, 定理 5.13 を示すためには, 写像類群の e.f.m.p. 作用と他の離散群の e.f.m.p. 作用が OE であることから, それらがほとんど共役であることを示さなければならない. その証明においては定理 5.16 を使うのだが, ここでは省略する. この部分は, Furman [F1], [F2] の証明に負うところが大きい. 定理 5.13, 5.16 については, [K4] で詳しい概説がなされている.

5.5. **問題.** 今まで, 剛的な作用を持つ離散群をいくつか紹介してきたが, 以下の群は剛的な作用を持つだろうか？または, 定理 5.13 のように全ての作用が超剛的となるだろうか？

(i) $SL_2(\mathbb{R})$ 以外の $\mathbb{R}$-階数が 1 の連結単純 Lie 群の格子部分群.
(ii) $SL_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$ $(n \geq 2)$.
(iii) $\mathbb{F}_n$ の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ $(n \geq 3)$.

(i) の群については Mostow の剛性が成り立つので, 定理 5.16 のような形で OE コサイクルに関する性質を期待させる. (ii) に関しては, 3 節と 5.2 節で見たように, $n \geq 3$ のときは, $SL_n(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}^n$ の作用に関してはよくわかっていると言ってもよいが, それが組み合わされたときにどうなるかが問題である. $n = 2$ のときは, 一般に $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は剛的とならないが, このように半直積にすると剛的になるかもしれ

ない. (iii) の群 $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ は, 曲面の写像類群と似た性質を共有することが知られており, (球面でない) 閉曲面 M に対し, $\Gamma(M)^\diamond$ と $\mathrm{Out}(\pi_1(M))$ は自然に同型であることが知られている ([I, Theorem 2.9.A]). また, $n \geq 4$ のとき $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ に対し, 定理 5.15 の類似が証明されている ([FH]).

References

[D] H. A. Dye, On groups of measure preserving transformation. I, II, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 119–159; ibid. **85** (1963), 551–576.

[FH] B. Farb and M. Handel, Commensurators of $\mathrm{Out}(F_n)$, preprint, arXiv:math/0607556, to appear in *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*

[F1] A. Furman, Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[F2] A. Furman, Orbit equivalence rigidity, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1083–1108.

[F3] A. Furman, On Popa's cocycle superrigidity theorem, preprint, arXiv:math/0608364, to appear in *Int. Math. Res. Not. IMRN.*

[G] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.* **139** (2000), 41–98.

[I] N. V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Ke] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., 156. Springer-Verlag, New York, 1995.

[K1] Y. Kida, Measure equivalence rigidity of the mapping class groups, preprint, to appear in *Ann. of Math.*

[K2] Y. Kida, Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of the mapping class group, preprint, to appear in *Geom. Dedicata.*

[K3] Y. Kida, Classification of certain generalized Bernoulli actions of mapping class groups, preprint.

[K4] Y. Kida, Introduction to measurable rigidity of mapping class groups, preprint, to appear in *Handbook of Teichmüller theory* (A. Papadopoulos, ed.), Volume II.

[L] G. Levitt, On the cost of generating an equivalence relation, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15** (1995), 1173–1181.

[MS] N. Monod and Y. Shalom, Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology, *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), 825–878.

[OW] D. S. Ornstein and B. Weiss, Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), 161–164.

[P1] S. Popa, Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of w-rigid groups, *Invent. Math.* **170** (2007), 243–295.

[P2] S. Popa, On the superrigidity of malleable actions with spectral gap, preprint, arXiv:math/0608429, to appear in *J. Amer. Math. Soc.*

[S] Y. Shalom, Measurable group theory, in *European Congress of Mathematics*, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[SZ] G. Stuck and R. J. Zimmer, Stabilizers for ergodic actions of higher rank semisimple groups, *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), 723–747.

[Z] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monogr. Math., 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

Mathematical Institute, Tohoku University, 980-8578 Sendai, Japan
E-mail address: kida@math.tohoku.ac.jp