MEASURABLE RIGIDITY OF MAPPING CLASS GROUPS

木田 良才 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

1. 序

1950 年代, Dye [D] によって始められた軌道同値 (orbit equivalence, OE) の研究は, エルゴード理論や作用素環論との密接な関連を保ちながら, 共に今日まで発展してきた. 軌道同値とは, 可算離散群による測度空間上の２つの作用の間に定義される同値関係である. 近年になり, 幾何学的に定義されるような群の作用に関する OE の結果が多く見られるようになり, 様々な幾何学的手法の OE 理論への応用が期待されるようになった. 今回の講演では, これまでの OE 理論の歴史を知る上で重要な結果をいくつか紹介し, どのような問題が最近考えられているかを論じる. さらに, 筆者による写像類群に関する最近の結果 [K2], [K3] を紹介する. この予稿に現れる幾何学的な離散群としては, Lie 群の格子部分群や曲面の写像類群が挙げられるが, これらの群の深い性質にはあまり触れず, このような群の作用に対する OE の結果を導くための基本的かつ一般的なアイデアを紹介したい. また, これらの議論の応用として, 写像類群はどのような位相群の格子部分群として実現できるかという問題を考える.

2. 共役と OE

まず, 問題設定のための概念をいくつか紹介する. この予稿では, Γ, Λ, ... 等は可算で離散な群 (ほとんどの場合, 無限群) を表す. 可算で離散な群を単に離散群ともいう. また, (X,μ), (Y,ν), ... 等は有限正測度をもつ標準 Borel 空間を表す. 特に, 確率測度をもつ標準 Borel 空間を標準確率空間という. ここで, 標準 Borel 空間とは, 可分で完備な距離空間からできる Borel 空間を意味する. 基本的な事実として, 濃度が等しい標準 Borel 空間は全て Borel 空間として同型であることが知られている. 特に, 連続濃度をもつ標準 Borel 空間は Borel 空間として単位区間に同型である. 標準 Borel 空間の基本性質に関する文献としては [Ke] がある. 以下では, 離散群による標準 Borel 空間上の様々な作用について論じるが, 作用は全て可測とする. さらに, 断らない限り, 標準 Borel 空間の部分集合としては可測なものしか考えない.

定義 2.1. 可測な作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ に対し,

(i) α が**保測** (**measure-preserving**) であるとは, 任意の $\gamma\in\Gamma$ と $A\subset X$ に対し, $\mu(\gamma A)=\mu(A)$ となることをいう.
(ii) α が**本質的に自由** (**essentially free**) であるとは, a.e. $x\in X$ に対し, その安定部分群 $\{\gamma\in\Gamma : \gamma x = x\}$ が単位元のみからなるときをいう.
(iii) α が**エルゴード的** (**ergodic**) であるとは, 可測部分集合 $A\subset X$ が Γ-不変, すなわち, $\gamma A = A$ が任意の $\gamma\in\Gamma$ について成り立つならば, $\mu(A)=0$ または, $\mu(A)=\mu(X)$ が成り立つときをいう.

(iv) α が **e.f.m.p.** であるとは, α がエルゴード的, 本質的に自由, かつ, 保測であるときをいう.

この予稿では以下のような e.f.m.p. 作用が現れる. これらの作用が実際に e.f.m.p. であることの証明は様々な文献で紹介されている.

例 2.2. $SL(n,\mathbb{Z})$ によるトーラス $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上の標準的な作用は e.f.m.p. である ([Z] の Example 2.1.5 と 97p を見よ).

例 2.3. G を $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の非コンパクト型で, 中心のない連結単純 Lie 群とし, Γ をその格子部分群とする. (X,μ) を μ の台が連続濃度をもつ標準確率空間とする. このとき, 任意のエルゴード的保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ は本質的自由であることが知られている ([SZ] の Corollary 4.4 を見よ). また, Γ, Λ を G の格子部分群とするとき, 作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$ はエルゴード的であることが知られている ([Z] の Theorem 2.2.6 を見よ). 以上のことより, 作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$ は e.f.m.p. であることが分かる.

例 2.4. Γ を無限離散群とし, (X_0,μ_0) を標準確率空間とする. ここで, X_0 の濃度は連続とは限らないが, μ_0 の台の濃度は 2 以上であると仮定する. このとき, 積空間 $(X_0,\mu_0)^\Gamma = \prod_\Gamma (X_0,\mu_0)$ は標準確率空間となり, この上に Γ の作用が次のように定義される:

$$\gamma(x_g)_{g\in\Gamma} = (x_{\gamma^{-1}g})_{g\in\Gamma}, \quad \gamma\in\Gamma,\ (x_g)_{g\in\Gamma}\in X_0^\Gamma.$$

この作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0,\mu_0)^\Gamma$ は e.f.m.p. である (例えば, [K4] の Lemma 2.4 と Lemma 2.5 を見よ). このような作用を **Bernoulli 作用**と呼ぶ. このことから特に, 任意の無限離散群は e.f.m.p. 作用をもつことがわかる.

２つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が与えられたとき, それらの間の, 以下のような２つの同値関係を考えたい. (X,μ) と (Y,ν) が測度空間として同型であるとは, 可測部分集合 $X'\subset X$, $Y'\subset Y$ で補集合が測度 0 になるものと, X' と Y' の間の Borel 同型写像 f で測度を保つものがあるときをいう. そのような f を測度空間の間の同型写像という. 以下の２つの同値関係は測度 0 の集合を無視して定義されるものだから, 以後, 至る所で測度 0 の集合を除くといった類いの注意書きが必要になるが, 逐一述べることはしない.

定義 2.5. ２つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が **共役 (conjugate)** であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ と同型 $F\colon \Gamma \xrightarrow{\simeq} \Lambda$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\gamma x) = F(\gamma)f(x)$$

が任意の $\gamma\in\Gamma$ と a.e. $x\in X$ に対して成り立つ.

定義 2.6. ２つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が **軌道同値 (orbit equivalent, OE)** であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\Gamma x) = \Lambda f(x)$$

が a.e. $x\in X$ に対して成り立つ.

定義から明らかに, 共役な作用は OE である. 2つの作用が OE であるとは, その作用からできる軌道の空間が同型であるという言い方もできよう. 注意として, 無限離散群による e.f.m.p. 作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が与えられたとき, その基本領域で可測なものは取れない. つまり, 可測部分集合 $F \subset X$ で,

- $\mu(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma F) = \mu(X)$,
- 任意の相異なる $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対し, $\mu(\gamma_1 F \triangle \gamma_2 F) = 0$

が成り立つようなものは存在しない. 基本領域が取れない故, 2つの作用による軌道の空間が同型であるかどうかを判定するのは, 一般には容易ではない.
上記の2つの同値関係に関する基本的な問題としては, 次が考えられる.

問題 2.7. 種々の e.f.m.p. 作用を共役または OE に関して分類せよ.

$\mathbb{Z}$ のエルゴード的作用を共役に関して分類することは, エルゴード理論において古典的な問題である. そのような作用の重要な (共役に関する) 不変量としてエントロピーがある. これは $\mathbb{Z}$ のエルゴード的作用に対して定義される $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$-値不変量であって, Kolomogorov によって導入された. 例えば, 2つの Bernoulli 作用

$$\mathbb{Z} \curvearrowright \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \quad \mathbb{Z} \curvearrowright \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$$

が共役でないということが, エントロピーを用いて示すことができる. ここで, $\{0,1\}$ (resp. $\{0,1,2\}$) は各点が測度 1/2 (resp. 1/3) をもつ標準確率空間である. さらに, 任意の $\mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$ の元をエントロピーとして持つ Bernoulli 作用が構成できる. 実は, エントロピーは $\mathbb{Z}$ の Bernoulli 作用に関して完全不変量である, すなわち, エントロピーが等しい2つの $\mathbb{Z}$ の Bernoulli 作用は共役であることが知られている (Ornstein). この予稿では, これ以上エントロピーについては触れない.

一方, OE の研究は Dye によって始められた. その結果は, 上記の共役に関する結果とは非常に対照的なものであった.

定理 2.8 ([D])**.** $\mathbb{Z}$ の任意の e.f.m.p. 作用は互いに OE である.

この後, もっと一般に, 従順群 (amenable groups) の作用に関する研究が行われ, 最終的に次の結果が得られた. これにより, 従順群の e.f.m.p. 作用の OE による分類は完了したことになる.

定理 2.9. $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を e.f.m.p. 作用とする.

(i) α と β が OE であって, Γ が従順ならば, Λ も従順である ([Z]).
(ii) Γ と Λ が無限で従順ならば, α と β は OE である ([OW]).

(i) は, 群の従順性が OE によって保たれることを主張しており, (ii) は無限従順群の e.f.m.p. 作用は全て互いに OE であることを主張している. 言い換えると, 無限従順群の e.f.m.p. 作用によりできる軌道構造は, 作用する群の従順性以外の情報を覚えていないということになる. この結果が現れた後, 当然, 非従順群の作用を考えていくことになったのだが, この場合, 軌道構造が何も覚えていないという状況とは全く逆の状況が多々観察されていくことになる. このことを次の節で見ていく.

3. OE の意味で超剛的な作用たち

軌道構造が何も覚えていないという状況の逆とは, 軌道構造が作用に関する全ての情報を覚えているということである. このことを正確に定式化したい. $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ を e.f.m.p. 作用とする. この作用から新しい作用の作り方を２つ紹介する.

(1) N を Γ の有限正規部分群とする. このとき, Γ/N による商空間 $(X,\mu)/N$ 上の作用 β_1 は e.f.m.p. である.

(2) 離散群 Γ_1 は Γ を有限指数部分群として含んでいるとする. 作用 $\Gamma \times \Gamma_1 \curvearrowright X \times \Gamma_1$ を
$$(\gamma, \gamma_1)(x, \gamma_1') = (\gamma x, \gamma\gamma_1'\gamma_1^{-1})$$
で定義する. このとき誘導される作用 $\beta_2\colon \Gamma_1 \curvearrowright (X \times \Gamma_1)/\Gamma$ は e.f.m.p. である. このような作用を α から誘導される Γ_1 の作用と呼び, $\alpha \uparrow_{\Gamma}^{\Gamma_1}$ と書く.

OE の問題を考える上で, 上記の３つの作用 α, β_1, β_2 は互いにほぼ同一視してしまった方が都合がいい. これら３つの作用は, 一般には, 定義 2.5 の意味で共役ではなく, 定義 2.6 の意味で OE でもない. しかし, 無限群の作用を研究する立場からすると, α, β_1, β_2 は, 作用に関するほぼ同じ情報を持っていると言ってもあながち間違いではないだろう. そこで次の定義を与える.

定義 3.1. ２つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が**ほとんど共役** (**virtually conjugate**) であるとは, α と β が上記の (1), (2) の操作を除いて共役になるときをいう.

軌道構造が作用に関する全ての情報を覚えているという状況の定式化は以下のようになる.

定義 3.2. E.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が (OE の意味で) **超剛的** (**OE superrigid**) であるとは, 次が成り立つときをいう: $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を α と OE なる e.f.m.p. 作用とすると, α と β はほとんど共役である.

我々の問題は以下のように定式化される.

問題 3.3. どんな e.f.m.p. 作用が OE の意味で超剛的になるか?

現在までに発見されている超剛的な作用はそれほど多くはない. 以下に主要なものを挙げていく. 次の Alex Furman の定理により初めて, 超剛的な作用の存在が証明された. その証明では, Zimmer によるコサイクル超剛性定理が重要な役割を果たす. これについては, 後で少し触れる (注意 4.5 を見よ).

定理 3.4 ([F1], [F2])**.** $n \geq 3$ を整数としたとき, 標準的作用 $SL(n,\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ は超剛的である.

Furman は $SL(n,\mathbb{Z})$ ($n \geq 3$) だけでなく, もっと一般に, $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の非コンパクト型の連結単純 Lie 群の格子部分群の全ての e.f.m.p. 作用がある意味で剛的であることを示している. その中には, 超剛的なものもあれば, そうでないものもある. 上の定理における $SL(n,\mathbb{Z})$ の標準的な作用は, 超剛的な作用の１つの例に過ぎない.

さらに最近, Kazhdan の性質 (T) を満たす群の作用に関して, 次の結果が Sorin Popa により示された. Kazhdan の性質 (T) を満たす群は, (ある意味で) たくさん

存在することが知られているため, この定理は非常に一般的な仮定の下での主張と言えよう.

定理 3.5 ([P1], [P2])**.** Γ を Kazhdan の性質 (T) を満たす無限離散群とし, (X_0, μ_0) を標準確率空間とする. μ_0 の台の濃度は 2 以上とする. このとき, Bernoulli 作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^\Gamma$ は超剛的である.

Popa の論文 [P1], [P2] では, 作用素環論の枠組みでこの定理を証明している. (それ故に, Bernoulli 作用からできる von Neumann 環に関する, さらに強い主張が述べられている.) 最近, Furman がエルゴード理論の枠組みで Popa の定理の証明を与えている ([F4]).

他の超剛的な作用の例としては, Monod と Shalom による結果がある. これも, かなり一般的な作用が超剛的になるという主張である.

定理 3.6 ([MS])**.** Γ_1, Γ_2 を, 単位元以外の有限位数の元を持たない, 非初等的な双曲群 (e.g., 階数が 2 以上の非可換自由群) とし, $\alpha\colon \Gamma_1 \times \Gamma_2 \curvearrowright (X, \mu)$ を e.f.m.p. 作用とする. このとき, $\Gamma_1 \times \{e\} \curvearrowright (X, \mu)$ と $\{e\} \times \Gamma_2 \curvearrowright (X, \mu)$ がエルゴード的ならば, α は適当な意味で超剛的である. (適当な意味とは, 定義 3.2 の意味では, α は超剛的となるとは限らないが, 少し弱い意味で剛的であるということ.)

さて, 筆者の主結果について述べよう. これは, 曲面の写像類群の e.f.m.p. 作用に関する結果である. M をコンパクト, 向き付け可能な連結な曲面とする (境界があってもよい). 以下, 曲面と言えば, これらの条件を満たすものを指す. M の種数が g で, 境界の連結成分の個数が p のとき, M を $M_{g,p}$ と書くこともある. このとき, $\kappa(M) = 3g + p - 4$ とおく. M の写像類群 $\Gamma(M)^\diamond$ を M の自己微分同相写像のアイソトピー類全体からなる群で定義する. $\Gamma(M)^\diamond$ は有限生成群であることが知られている. 写像類群の基本的な性質については, [I] が詳しい. 以下では, 常に $\kappa(M) > 0$ を仮定する.

注意 3.7. $\kappa(M) \leq 0$ となる曲面 M については次が知られている. M が $M_{0,4}$, $M_{1,0}$, $M_{1,1}$ のいずれでもないとき, $\Gamma(M)^\diamond$ は有限である. M が $M_{0,4}$, $M_{1,0}$, $M_{1,1}$ のうちのいずれかならば, $\Gamma(M)^\diamond$ は $SL(2, \mathbb{Z})$ とほとんど同型となる. $SL(2, \mathbb{Z})$ やその有限指数部分群である非可換自由群の e.f.m.p. 作用に関しては, 超剛的とならない場合が確認されているが, まだまだわからないことが多い. しかし, 自由群の構造のシンプルさ故に, その作用についてわかることもたくさんある (例えば, [G]). 定理 3.6 でも非可換自由群を扱っているが, その定理では自由群の直積の作用を考えており, 状況は全く異なる.

以下の定理が主結果である.

定理 3.8 ([K3])**.** M を $\kappa(M) = 3g + p - 4 > 0$ なる曲面, Γ を $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群とする. このとき, Γ の任意の e.f.m.p. 作用は超剛的である.

この定理で強調したいことは, 任意の e.f.m.p. 作用を扱っているということである. 前述の定理 3.5 は, 非常に一般的なクラスの群の特別な作用 (Bernoulli 作用) に対する結果である. 一方, 定理 3.8 は, 非常に特別な群の全ての作用に対する結果である. この意味で, これら 2 つの定理は対照的であると言える.

4. 基本的なアイデア

この節では, 定理 3.4 や定理 3.8 に見られるような, 幾何学的に与えられた群の作用に対する剛性を示すための基本的かつ一般的なアイデアを紹介したい. 始めに述べたように, Lie 群の格子部分群や写像類群の深い性質については, ここでは論じない. もちろん, 定理 3.4, 定理 3.8 を示すためには, それらの群の深い性質を用いなければならず, 2つの定理の証明が似ているわけでもないが, 証明する上で共通した考え方が存在する. この考え方は, 将来, 他の幾何学的な群の作用の剛性を示そうとする上でも, (もし示せるならば) 非常に重要になるであろう考え方である. この節ではそれについて詳述したい.

まずは一般的なことから述べる. 粗く言うと, 我々は, 2つの OE なる e.f.m.p. 作用が与えられたときに, それらがほとんど共役であることを示したいのだから, 2つの作用が OE であることから何が言えるかについて考える. $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ を e.f.m.p. 作用とし, それらが OE であるとする, すなわち, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ で

$$f(\Gamma x) = \Lambda f(x)$$

が a.e. $x \in X$ に対して成り立つようなものが存在する. このとき, $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が本質的に自由であることを使うと, Borel 写像 $\rho\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ で, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ に対し,

$$f(\gamma x) = \rho(\gamma, x) f(x)$$

となるものが構成される. このような ρ を (f による) **OE コサイクル**といい, ρ は次のコサイクル恒等式を満たす: 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ に対し,

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2 x)\rho(\gamma_2, x) = \rho(\gamma_1\gamma_2, x). \tag{1}$$

証明は以下のように定義より容易に従う:

$$\rho(\gamma_1\gamma_2, x) f(x) = f(\gamma_1\gamma_2 x) = \rho(\gamma_1, \gamma_2 x) f(\gamma_2 x) = \rho(\gamma_1, \gamma_2 x)\rho(\gamma_2, x) f(x).$$

一般に, Γ, Λ を離散群とし, Γ が (X,μ) 上に保測で作用しているとき, Borel 写像 $\rho\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ が上記のコサイクル恒等式 (1) を満たすとき, ρ を**コサイクル**という.

さて, ここで非常に強い仮定をしてみる. コサイクル $\rho\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ が第 2 変数に関して独立であるとしてみる. すると, コサイクル恒等式 (1) は ρ が準同型 $\Gamma \to \Lambda$ を誘導することを意味する. さらに, $\rho\colon \Gamma \times X \to \Lambda$ が同じ仮定を満たす OE コサイクルとすると, ρ から誘導される準同型 $\Gamma \to \Lambda$ が同型であることが容易にわかる.

注意 4.1. ρ を $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ に関する OE コサイクルとすると, f^{-1} に対応する OE コサイクル $\sigma\colon \Gamma_2 \times X_2 \to \Gamma_1$ も構成できる. f^{-1} は f の逆だから, σ は, ある意味で ρ の "逆" と言えるものになるはずである. 擬群 (groupoid) の概念を用いると, このような見方が明快になる. 擬群とは, 群の一般化であるような, ある種の代数的構造である. 実は, $\Gamma_1 \times X_1$ と $\Gamma_2 \times X_2$ 上に擬群の構造を導入することができ,

$$\Gamma_1 \times X_1 \ni (\gamma, x) \mapsto (\rho(\gamma, x), f(x)) \in \Gamma_2 \times X_2$$

がその擬群の構造に関する同型写像となっている. 容易に分かるように,

$$\Gamma_2 \times X_2 \ni (\gamma, x) \mapsto (\sigma(\gamma, x), f^{-1}(x)) \in \Gamma_1 \times X_1$$

が上の同型写像の逆となっている. σ がある意味で ρ の逆であるとは, このようなことを意味する.

まとめると, 以下の図式で, 左側が右側の一般化になっているというこがわかる:

コサイクル	$\leftrightarrow$	群の間の準同型
OE コサイクル	$\leftrightarrow$	群の間の同型

つまり, 2つの作用の間の OE を調べるということは, その OE コサイクルを調べることに直結するが, そのためには群の間の同型を調べることが手助けになるということを強調したい. このことを考慮に入れて, 写像類群の作用の問題を考えてみる. M を $\kappa(M) > 0$ なる曲面とし, さらに簡単のため, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ とする. この条件は本質的なものではなく, 以下で述べる定理を簡潔に述べるためのものである. Γ_1, Γ_2 を $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群とする. Γ_1 と Γ_2 の間の同型については, 次の Ivanov による結果がある.

定理 4.2 ([I])**.** $\rho\colon \Gamma_1 \xrightarrow{\simeq} \Gamma_2$ を同型とすると, $g \in \Gamma(M)^\diamond$ で

$$\rho(\gamma) = g\gamma g^{-1}$$

が任意の $\gamma \in \Gamma_1$ について成り立つようなものが唯一存在する.

この定理において, 同型 ρ の代わりに OE コサイクルについて述べたものが次である.

定理 4.3 ([K2])**.** $\alpha_1\colon \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\alpha_2\colon \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を e.f.m.p. 作用とし, $f\colon (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\simeq} (X_2, \mu_2)$ は α_1 と α_2 の間の OE を導くものとする. $\rho\colon \Gamma_1 \times X_1 \to \Gamma_2$ を f から定義される OE コサイクルとする. このとき, Borel 写像 $\varphi\colon X_1 \to \Gamma(M)^\diamond$ で,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x)\gamma\varphi(x)^{-1}$$

が全ての $\gamma \in \Gamma_1$ と a.e. $x \in X_1$ に対して成り立つようなものが本質的に唯一存在する.

この定理において, ρ, φ は定理 4.2 の ρ, g にそれぞれ対応していることを見ていただきたい. このようにして, OE コサイクル $\rho\colon \Gamma_1 \times X_1 \to \Gamma_2$ が同型 $\Gamma_1 \xrightarrow{\simeq} \Gamma_2$ であるかのような見方をしていくことが重要である. 定理 4.3 の証明は, このような見方の下で, 定理 4.2 の証明の筋を追っていくことになる. ただ, 定理 4.2 の証明では現れない, 技術的な困難ももちろんあるが, その点を述べるには多くの概念を導入する必要があるので, ここではこれ以上, 定理 4.3 の証明については触れないことにする. ([K1] で示されたことが多く用いられる.)

さて, 定理 4.3 から帰結されることを述べる. 簡単のため, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma(M)^\diamond$ としてみよう. $f\colon (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\simeq} (X_2, \mu_2)$ を $\varphi\colon X_1 \to \Gamma(M)^\diamond$ を用いて次のように摂動する: $f'\colon X_1 \to X_2$ を $f'(x) = \varphi(x)^{-1}f(x)$, $x \in X_1$ で定める. このとき, $\gamma \in \Gamma(M)^\diamond$, $x \in X_1$ に対し,

$$f'(\gamma x) = \varphi(\gamma x)^{-1}f(\gamma x) = \varphi(\gamma x)^{-1}\rho(\gamma, x)f(x) = \gamma\varphi(x)^{-1}f(x) = \gamma f'(x).$$

ゆえに, f' は $\Gamma(M)^\diamond$ の作用に関して同変となる. このことから, f' が測度空間の間の同型を定めることを見るのは易しい. よって次の系を得た.

系 4.4. $\Gamma(M)^\diamond$ による 2 つの e.f.m.p. 作用が OE ならば, それらは共役である.

今は簡単のため, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma(M)^\diamond$ としたが, 一般に Γ_1, Γ_2 が $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群である場合, 定理 4.3 を用いると, $\alpha_1\colon \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$ と $\alpha_2\colon \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ が OE ならば, $\alpha_1 \uparrow_{\Gamma_1}^{\Gamma(M)^\diamond}$ と $\alpha_2 \uparrow_{\Gamma_2}^{\Gamma(M)^\diamond}$ が共役になるということが示される. ゆえに, α_1 と α_2 はほとんど共役である.

上の議論では, 2 つの写像類群の e.f.m.p. 作用が OE であることから, それらが共役であることを示していったわけだが, 主結果である定理 3.8 を示すためには, 写像類群の e.f.m.p. 作用と他の離散群の e.f.m.p. 作用が OE であることから, それらが共役であることを示さなければならない. その証明においても定理 4.3 を使うのだが, ここでは省略する.

注意 4.5. 定理 3.4 の証明において Zimmer のコサイクル超剛性と呼ばれる定理が重要な役割を果たすと述べたが, これは Margulis の超剛性定理と呼ばれる, $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の非コンパクト型の連結単純 Lie 群の格子部分群からある種の Lie 群への準同型に関する主張の一般化である. Zimmer は Margulis の定理の準同型をコサイクルに言い換えた主張を示したのである. Furman はこれを用いて定理 3.4 を示した. この Zimmer の定理は OE コサイクルとは限らない一般のコサイクルも扱っているため, 応用範囲が広く, 格子部分群の様々な多様体上の作用に関する剛性を示す上でも重要な役割を果たしている. Zimmer の定理については [Z] を参照せよ.

5. 写像類群の格子部分群としての実現

この節では, 前節の議論の応用を 1 つ与える. 考えたい状況は次である. M は $\kappa(M) > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ なる曲面とする. 簡単のため, 断らない限り, この節では $\Gamma = \Gamma(M)^\diamond$ としよう.

問題 5.1. G を局所コンパクトかつ第二可算公理を満たす位相群とし, Γ は G の格子部分群であるとする, すなわち, Γ は G の離散部分群で, G 上の Haar 測度に関して有限の余測度をもつとする. このとき, G はどんな群だろうか?

$\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ とおく. $\Gamma_1 \curvearrowright G$ を左かけ算で, $\Gamma_2 \curvearrowright G$ を右かけ算で定義する:

$$(\gamma_1, g) \mapsto \gamma_1 g, \quad (\gamma_2, g) \mapsto g\gamma_2^{-1}, \quad \gamma_1 \in \Gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma_2,\ g \in G.$$

G が格子部分群をもつことから, G 上の Haar 測度 m は左, 右かけ算の両方に関して不変であることが従う. $X \subset G$ を $\Gamma_2 \curvearrowright G$ に関する基本領域とする: $X \subset G$ は可測部分集合で,

- $m(G \triangle \bigcup_{\gamma \in \Gamma_2} X\gamma_2^{-1}) = 0$,
- 任意の相異なる $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2$ に対し, $m(X\gamma_1^{-1} \triangle X\gamma_2^{-1}) = 0$

を満たす. X は G/Γ_2 と Borel 空間として自然に同一視できる. さらに, X 上に G/Γ_2 上の有限測度から決まる測度を定めることができる. これらの同一視によって, 保測作用 $\Gamma_1 \curvearrowright X$ を定義できる. この作用と $\Gamma_1 \curvearrowright G$ を区別するために, $\Gamma_1 \curvearrowright X$ の場合は, $\gamma \cdot x$ という風に, ドットを使って記す. このとき,

$$\rho\colon \Gamma_1 \times X \to \Gamma_2, \quad \gamma x \rho(\gamma, x)^{-1} \in X$$

で定義される写像 ρ はコサイクル恒等式を満たす: 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_1$ と a.e. $x \in X$ に対し,

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2 \cdot x)\rho(\gamma_2, x) = \rho(\gamma_1\gamma_2, x).$$

さらに,

$$\gamma \cdot x = \gamma x \rho(\gamma, x)^{-1}, \quad \gamma \in \Gamma_1,\ x \in X$$

である. Γ_1 と Γ_2 の役割は対称的故, $Y \subset G$ を $\Gamma_1 \curvearrowright G$ に関する基本領域とすると, コサイクル $\Gamma_2 \times Y \to \Gamma_1$ を同様にして構成できる. このコサイクルはある意味で, ρ の "逆" であるといえる. よって, このコサイクルについても前節の議論が適用でき, 定理 4.3 と同様な主張が示せる. いくつかの点で, このコサイクルは OE コサイクルと異なっている. $\Gamma_1 \curvearrowright X$ は一般にはエルゴード的でもないし, 本質的に自由でもない. しかし重要なことは, "逆" をもつコサイクルを構成できるということである. このことから, この ρ に関しても定理 4.3 と同様な主張が示せる. ゆえに, Borel 写像 $\varphi\colon X \to \Gamma$ で, 任意の $\gamma \in \Gamma_1$ と a.e. $x \in X$ に対し,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma \cdot x)\gamma\varphi(x)^{-1}$$

となるものが存在する. $\Phi\colon G \to \Gamma$ を

$$\Phi(x\gamma_2^{-1}) = \varphi(x)^{-1}\gamma_2^{-1}, \quad x \in X,\ \gamma_2 \in \Gamma_2$$

で定義する. このとき, $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $x \in X$ に対し,

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma_1 x\gamma_2^{-1}) &= \Phi(\gamma_1 x\rho(\gamma_1, x)^{-1}\rho(\gamma_1, x)\gamma_2^{-1}) = \varphi(\gamma_1 \cdot x)^{-1}\rho(\gamma_1, x)\gamma_2^{-1} \\ &= \gamma_1\varphi(x)^{-1}\gamma_2^{-1} = \gamma_1\Phi(x)\gamma_2^{-1}.\end{aligned}$$

よって次の補題を得る.

補題 5.2. Borel 写像 $\Phi\colon G \to \Gamma$ で, 任意の $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$ と a.e. $g \in G$ に対し,

$$\Phi(\gamma_1 g\gamma_2^{-1}) = \gamma_1\Phi(g)\gamma_2^{-1}$$

となるものが存在する.

この Φ はさらに次のような性質をもつことが示される.

定理 5.3 ([K2])**.** 連続な準同型 $\Phi_0\colon G \to \Gamma$ で次を満たすようなものが存在する.

(i) G 上の a.e. の点上で $\Phi_0 = \Phi$.
(ii) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し, $\Phi_0(\gamma) = \gamma$.
(iii) $K = \ker(\Phi_0)$ とおくと, K はコンパクトである. 作用 $\Gamma \curvearrowright K$ を共役により定義すると, これから決まる自然な準同型 $p\colon \Gamma \ltimes K \to G$ は同型である.

(ii) に関しては, 補題 5.2 の等式において, $g = \gamma_2 = e$ とおくと成り立ちそうに見えるが, この等式は a.e. $g \in G$ に対してしか成立していないため, (ii) を示すにはもう少し注意が必要である. (iii) は問題 5.1 に対する答えを与えている. つまり, G は, コンパクト群 K と K 上の自己同型による作用 $\Gamma \curvearrowright K$ からできる半直積 $\Gamma \ltimes K$ と同型になる. このことは, 写像類群の格子部分群としての実現で興味あるものが存在しないことを意味する. (このような格子部分群としての実現は任意の離散群に対して可能だからである.) 次の系は容易に従う.

系 5.4. G において Γ は余コンパクトであって, G は無限個の連結成分をもつ.

注意 5.5. Furman [F3] によって, 写像類群の代わりに, $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の非コンパクト型の連結単純 Lie 群の格子部分群に対する問題 5.1 が考えられていた. 以上の議論は, その Furman の議論に負うところが大きい.

一方で, 写像類群が半単純 Lie 群の格子部分群と同型かどうか, また, その間の準同型としてはどのようなものが存在するかという問題がよく考えられてきている. 写像類群の研究において, そのような格子部分群の研究と似たアプローチがよく行われるからである. このような問題に対する解答としては次のようなものが挙げられる. M は $\kappa(M) > 0$ を満たす曲面とする.

- $\Gamma(M)^{\diamond}$ の有限指数部分群は連結半単純 Lie 群の格子部分群と同型にならない ([KM]).
- $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の非コンパクト型の連結半単純 Lie 群の既約格子部分群から $\Gamma(M)^{\diamond}$ への準同型の像は有限である ([FM], [BF]).

Γ が $\Gamma(M)^{\diamond}$ の有限指数部分群であって, G が Γ を格子部分群として含む場合も, 定理 5.3 の類似や系 5.4 は証明できるので, 上の１つ目の主張はこの系からも従う.

6. 終わりに

いくつか文献を挙げる. OE の研究の現況については [S] に詳しく書かれている. この文献では, OE と作用素環論との関わりも少し触れられている. また, OE と 群の ℓ^2-Betti 数との関わりについても触れられている. [S] の文献表では, 豊富な文献が挙げられている. [V] では, 最近の Popa による剛性定理が詳しく解説されている. ただし, これは作用素環論の立場から述べられている. [K5] では, 筆者による写像類群に関する結果についての, この予稿より詳しい概説が与えられている. この予稿で述べられなかった部分 (例えば, 定理 4.3 の証明) についても説明されている.

References

[BF] M. Bestvina and K. Fujiwara, Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups, *Geom. Topol.* **6** (2002), 69–89.

[D] H. A. Dye, On groups of measure preserving transformation. I, II, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 119–159; ibid. **85** (1963), 551–576.

[FM] B. Farb and H. Masur, Superrigidity and mapping class groups, *Topology* **37** (1998), 1169–1176.

[F1] A. Furman, Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[F2] A. Furman, Orbit equivalence rigidity, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1083–1108.

[F3] A. Furman, Mostow-Margulis rigidity with locally compact targets, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), 30–59.

[F4] A. Furman, On Popa's cocycle superrigidity theorem, preprint, `math.DS/0608364`.

[G] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.* **139** (2000), 41–98.

[I] N. V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[KM] V. A. Kaimanovich and H. Masur, The Poisson boundary of the mapping class group, *Invent. Math.* **125** (1996), 221–264.

[Ke] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., 156. Springer-Verlag, New York, 1995.

[K1] Y. Kida, The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory, preprint, to appear in *Mem. Amer. Math. Soc.*

[K2] Y. Kida, Measure equivalence rigidity of the mapping class groups, preprint, to appear in *Ann. of Math.*

[K3] Y. Kida, Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of the mapping class group, preprint.

[K4] Y. Kida, Classification of certain generalized Bernoulli actions of mapping class groups, preprint.

[K5] Y. Kida, Introduction to measurable rigidity of mapping class groups, in preparation.

[MS] N. Monod and Y. Shalom, Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology, *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), 825–878.

[OW] D. S. Ornstein and B. Weiss, Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), 161–164.

[P1] S. Popa, Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w-rigid groups, II, *Invent. Math.* **165** (2006), 409–451.

[P2] S. Popa, Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of w-rigid groups, preprint, `math.GR/0512646`, to appear in *Invent. Math.*

[S] Y. Shalom, Measurable group theory, in *European Congress of Mathematics*, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[SZ] G. Stuck and R. J. Zimmer, Stabilizers for ergodic actions of higher rank semisimple groups, *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), 723–747.

[V] S. Vaes, Rigidity results for Bernoulli actions and their von Neumann algebras (after Sorin Popa), preprint, `math.OA/0603434`, to appear in *Séminaire Bourbaki*, exposé 961, Astérisque.

[Z] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monogr. Math., 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

Mathematical Institute, Tohoku University, 980-8578 Sendai, Japan

E-mail address: `kida@math.tohoku.ac.jp`