Equivalence relations generated by the mapping class groups

木田 良才 (Yoshikata Kida)*
京都大学大学院理学研究科
Graduate School of Science, Kyoto University

1 序

以下では, (X,μ), (Y,ν) 等は有限正測度をもつ標準 Borel 空間を表し, 離散群とは可算かつ離散な群を意味するとする. 離散群を次のような同値関係で分類することを考える:

定義 1. 2つの離散群 Γ, Λ がそれぞれ (X,μ), (Y,ν) 上保測に作用していて, $\Gamma A = X$, $\Lambda B = Y$ を満たす測度正の Borel 部分集合 $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ と, その間の Borel 同型写像 $f\colon A \to Y$ で次を満たすものが存在するとする:

(i) 2つの B 上の測度 $f_*(\mu|_A)$, $\nu|_B$ は互いに絶対連続;

(ii) ほとんどすべての $x \in A$ について, $f(\Gamma x \cap A) = \Lambda x \cap B$.

このとき, 2つの作用は弱軌道同値 (weakly orbit equivalent or WOE) であるという. 特に, 上の A, B が full measure でとれるとき, 2つの作用は軌道同値 (orbit equivalent or OE) であるという. 2つの離散群に対し, それらが上のような WOE となる作用をもつとき, 測度同値 (measure equivalent or ME) であるという.

離散群の (X,μ) 上の作用から von Neumann 環がつくられることは, Murray-von Neumann の論文以来, よく知られていることである. OE とこの von Neumann 環の同型が関係していることから, OE は作用素環論においてもよく研究されてきた概念である. 無論, エルゴード理論の観点からの研究も多い. 上で述べた ME という概念で, 写像類群という離散群を考察してみることが今回の仕事の目的である.

ME が離散群の間の同値関係になることは, 簡単に確かめられる. また, ほとんど同型となる2つの離散群も ME となることもすぐわかる. ここで, 2つの離散群がほとんど同型であるとは, 有限指数の部分群をとる, もしくは, 有限正規部分群による商群をとるという2つの操作を除いて同型になるときをいう. 有限群全体は, 1つの ME の class を成していることも容易にわかる.

* *E-mail address*: `kida@math.kyoto-u.ac.jp`

例 2. Ornstein-Weiss [21] により, 次の事実が知られている: 無限 amenable 群の (X,μ) 上のエルゴード的で保測かつ本質的自由な作用は全て OE である. 特に, 全ての無限 amenable 群は $\mathbb{Z}$ に ME となる. 逆に, amenability は ME で保たれることも示せるので, $\mathbb{Z}$ と ME となる離散群の class は無限 amenable 群全体であることがわかる.

他にも Zimmer [22] や Furman [5] による, higher rank lattice (e.g., $SL(n,\mathbb{Z})$ $(n\geq 3)$) と ME となる離散群の決定という素敵な結果もある. ME に関する種々の結果については [6] や [8] を参照されたい.

2 主結果

今回の仕事の主結果を述べよう. $M=M_{g,p}$ を種数 g, 境界成分の個数が p となる, 連結コンパクトで向き付け可能な曲面とする. (以後, 曲面と言えば, 連結コンパクトで向き付け可能であることを仮定する.) このとき, M の写像類群 $\Gamma(M)$ を M 上の向きを保存する微分同相写像のイソトピー類からなる群で定義する. これは有限生成群となり, 特に離散群となる. まず, $\Gamma(M)$ と ME とならないタイプの群を挙げよう. 曲面 $M_{g,p}$ に対し, $\kappa(M)=3g+p-4$ とおく.

定理 3 ([15])**.** 曲面 M は $\kappa(M)\geq 0$ を満たすとする.

(i) 写像類群 $\Gamma(M)$ は次の形の離散群と ME でない:

  (a) Γ_1 と Γ_2 を無限群とし, Γ_1 または Γ_2 は無限 amenable 群を部分群として含むとしたときの直積 $\Gamma_1\times\Gamma_2$;

  (b) 無限 amenable 群を正規部分群として含むような離散群.

(ii) $\kappa(M)>0$ ならば, $\Gamma(M)$ は (Gromov の意味での) 双曲群に ME でない.

注意 4. トーラスでない曲面 M が $\kappa(M)<0$ を満たすならば, その写像類群 $\Gamma(M)$ は有限である. また, 4つの群 $\Gamma(M_{0,4})$, $\Gamma(M_{1,0})$, $\Gamma(M_{1,1})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ はほとんど同型である. よって, この4つの群は全て非初等的な双曲群である. 双曲群については [9] を参照せよ.

注意 5. Adams [2] の手法により, 定理 3 (i) の写像類群の部分を非初等的な双曲群に取り替えた主張を示すことができる.

注意 6. 最近の Hamenstädt [11] の結果と Monod-Shalom [20] の結果を組み合わせると定理 3 (i) (a) における,「Γ_1 または Γ_2 は無限 amenable 群を部分群として含む」という仮定をはずした主張を示すことができる. (b) も示すことができる.

次に, 曲面 M に対し $n(M)=g+[(g+p-2)/2]$ とおく. ここで, 実数 a に対し, $[a]$ で a 以下の最大の整数を表すとする.

定理 7 ([15])**.** 曲面 M は $\kappa(M)\geq 0$ を満たすとする. 離散群 G は n 個の階数 2 の自由群の直積を部分群として含むとし, さらに, G は写像類群 $\Gamma(M)$ の無限部分群 Γ と ME であるとする. このとき, $n\leq n(M)$ が成り立つ.

$n(M)$ の幾何学的な意味 ([15, Chapter 1] を参照せよ) を考えると, $\Gamma(M)$ が $n(M)$ 個の階数 2 の自由群の直積を部分群として含むことが容易にわかるので, 上の定理における不等式は最良である.

注意 8. ME の観点から直積の factor の個数を数える定理は, 既に多く証明されている. 例えば, 次のような Gaboriau [7] による結果がある: 自然数 n に対し, $\mathbb{F}_n$ で階数 n の自由群を表すとする. $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_l$ をそれぞれ 2 以上の整数とする. $\mathbb{F}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{F}_{n_k}$ が $\mathbb{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{F}_{m_l}$ の部分群と ME ならば, $k \leq l$. (他の類似した結果としては, Monod-Shalom [20] の結果が特筆すべきである.)

一方, 定理 3 (i) (a) で見たように, 写像類群は (ME の観点から見て) 直積に分解しないので, $\mathbb{F}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{F}_{n_k}$ のタイプの群とは異なる性質をもつことがわかる.

最後に, 写像類群を ME で分類することを考える. 曲面 $M = M_{g,p}$ に対し, $g \leq 2$ のとき $g_0(M) = 2$, $g > 2$ のとき $g_0(M) = g$ と記す.

定理 9 ([15])**.** 2 つの曲面 M^1, M^2 は $\kappa(M^1), \kappa(M^2) \geq 0$ を満たすとする. もし, 2 つの写像類群 $\Gamma(M^1)$ と $\Gamma(M^2)$ が ME ならば, 等式 $\kappa(M^1) = \kappa(M^2)$ と $g_0(M^1) = g_0(M^2)$ が成り立つ.

よって, ほとんどの写像類群は互いに ME とならないことがわかる.

注意 10. $\Gamma(M_{0,6})$ と $\Gamma(M_{2,0})$ は, ほとんど同型である. しかし, この 2 つの曲面 $M_{0,6}$, $M_{2,0}$ と注意 4 で挙げた曲面以外の, 種数 2 以下の曲面の写像類群たちの ME による分類は完成していない.

注意 11. 定理 9 における等式 $\kappa(M^1) = \kappa(M^2)$ は, [15] とは別の手法でも得られる. このことについてコメントしておく. 詳しくは [15, Appendix D] を参照せよ.

Gaboriau は [7] において, 次の意味で離散群の ℓ^2-Betti 数が ME に関する不変量になることを示した: 2 つの離散群 Γ_1 と Γ_2 が ME ならば, ある正数 c が存在して, $\beta_n(\Gamma_1) = c\beta_n(\Gamma_2)$ が任意の n について成り立つ. ここで, 離散群 Λ に対し, $\beta_n(\Lambda)$ で Λ の第 n 次 ℓ^2-Betti 数を表すものとする.

一方, Gromov の結果 [10] と McMullen の結果 [19] を合わせると, $\kappa(M) \geq 0$ となる曲面 M の写像類群 $\Gamma(M)$ の ℓ^2-Betti 数が次のようになることがわかる: $\beta_{\kappa(M)+1}(\Gamma(M)) > 0$ かつ, 任意の $n \neq \kappa(M) + 1$ に対し, $\beta_n(\Gamma(M)) = 0$.

これらの結果により, 定理 9 における等式 $\kappa(M^1) = \kappa(M^2)$ が得られる.

3 Adams のアイデア

写像類群と双曲群には類似した性質がいくつかある. そこで, Adams の双曲群に関する主張 (注意 5) の証明のアイデアにおける重要な部分を述べる. 以下の議論では, 「ほとんどすべて」という言葉を適宜補う必要があるが, 簡単のため省略する. 詳しくは [15, Chapter 4, Section 2] を参照せよ.

Γ を離散群とし, Γ は (X, μ) 上保測かつ本質的自由に作用しているとする. このとき,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\Gamma = \{(x, gx) \in X \times X : x \in X, g \in \Gamma\}$$

は, (X,μ) 上の同値関係 (equivalence relation) を定める. $\mathcal{R}$ は自然に (X,μ) 上の groupoid の構造をもつ.

2つの離散群 Γ, Λ がそれぞれ (X,μ), (Y,ν) 上保測かつ本質的自由に作用しているとする. (X,μ), (Y,ν) 上の relation $\mathcal{R}_\Gamma$, $\mathcal{R}_\Lambda$ がそれぞれ定義される. このとき, Γ と Λ の作用が OE であることと, $\mathcal{R}_\Gamma$ と $\mathcal{R}_\Lambda$ が groupoid として同型になることは同値である. このことにより, ME の問題を考えるときには, relation の groupoid としての性質を調べることが重要になる.

はじめに戻って, 離散群 Γ が (X,μ) 上保測かつ本質的自由に作用しているとし, $\mathcal{R}$ を上のように与える. このとき,

$$\rho\colon \mathcal{R}\to\Gamma,\quad (gx,x)\mapsto g$$

は cocycle を定める. つまり, $\mathcal{R}$ と Γ を groupoid と見なしたとき, ρ は準同型である.

いま, Γ が Borel 空間 K に作用しているとする. もし, この K が何らかの良い性質 (例えば, コンパクト性) を持っていれば, K の点 k とその stabilizer

$$\{\gamma\in\Gamma : gk=k\}$$

の関係を調べることにより Γ の性質を理解できることがある. 同様なことが relation についても言える. 今回の仕事ではこの精神を常に押し進めている. (このような考え方を導入し成功したのは, おそらく Zimmer [22] が最初であろう.) まず, $\mathcal{R}$ の K 上の作用と, $\mathcal{R}$ の subrelation $\mathcal{S}$ (つまり, subgroupoid) の作用に関する不動点に対応するものを導入する.

$\mathcal{R}$ の K 上の作用 (つまり, $\mathcal{R}$ から K の自己同型群への準同型) を, ρ と Γ の K 上の作用を合成したもので定義する. $\mathcal{R}$ の subrelation $\mathcal{S}$ に対し, Borel 写像

$$\varphi\colon X\to K$$

が, $\rho(x,y)\varphi(y)=\varphi(x)$ をほとんどすべての $(x,y)\in\mathcal{S}$ について満たすとき, φ は $\mathcal{S}$-不変であるという. この $\mathcal{S}$- 不変 Borel 写像が $\mathcal{S}$ の作用の不動点と呼べるものである. (実際にはもっと一般に, relation もしくは groupoid の作用やその不動点が定義される. 詳しくは [3] を参照せよ.)

離散群の amenability は, その群の Banach 空間上の等長同型作用とその双対作用の不動点の言葉で記述できる. 同様にして relation の amenability も定義でき, 次の両立性が成り立つ:

命題 12 ([22, Proposition 4.3.3])**.** Γ が amenable であることと $\mathcal{R}$ が amenable であることは同値である.

Adams が証明したことについて述べよう. Γ を双曲群とする. Γ は自然にそのコンパクトな境界 $\partial\Gamma$ に作用していることに注意せよ. Γ は (X,μ) 上保測かつ本質的に自由に作用しているとする. $\mathcal{R}$, $\rho\colon\mathcal{R}\to\Gamma$ を上で定義したものとする. $M(\partial\Gamma)$ は $\partial\Gamma$ 上の (正則) 確率測度全体の空間を意味するものとする. (以後, Borel 集合 S に対し, $M(S)$ で S 上の確率測度全体の集合を表すとする.) 一般に, (Y,ν) 上の relation $\mathcal{S}$ と Y の Borel 部分集合 Z に対し, Z 上に制限された relation を

$$(\mathcal{S})_Z=\{(x,y)\in\mathcal{S} : x,y\in Z\}$$

と記す.

命題 13 ([2])**.** A を X の測度正の Borel 部分集合とし, $\mathcal{S}$ を $(\mathcal{R})_A$ の subrelation で A 上 aperiodic (つまり, ほとんどすべての同値類が無限集合) とする. このとき,

(i) $\mathcal{S}$ が amenable ならば, $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $A \to M(\partial\Gamma)$ が存在する.

(ii) 逆に, $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $A \to M(\partial\Gamma)$ が存在するならば, $\mathcal{S}$ は amenable である.

(i) の主張は amenability の定義から従う. また [2] では, $\mathcal{S} = \mathcal{R}$ のときにしか示されていないが, 同じ手法で一般の $\mathcal{S}$ についてもしめすことができる [15]. (ii) の証明では, Γ の $\partial\Gamma$ 上の作用が amenable であること [1] や Γ の双曲性が crucial に用いられることだけを記しておく. 作用の amenability については [3] または [15, Appendix A] を参照せよ.

命題 13 で大事なことは, 不変 Borel 写像が存在するか否かによって, subrelation の amenability が判定できるということである. 命題 13 は, 群のレベルでは既に知られていることである. つまり, Γ の無限部分群 Γ' に対し, Γ' の $M(\partial\Gamma)$ 上の作用が不動点を持つことと, Γ' の amenability は同値である. このように, 群のレベルでの主張を relation のレベルでも証明できるかどうかが鍵となる.

4　写像類群の場合

命題 13 の証明では, 双曲性という幾何学的性質が本質的に用いられている. 写像類群と双曲群の間の類似点を１つ述べよう.

定義 14 ([13])**.** $\kappa(M) > 0$ を満たす曲面 M に対し, curve complex $C = C(M)$ を次のような単体複体で定義する: 頂点集合 $V(C)$ は M 上の, 境界にも一点にもイソトピックでない単純閉曲線のイソトピー類全体とする. $V(C)$ の空でない有限部分集合 F が単体を成すのは, F の元の代表となる曲線たちで, M 上互いに交わらないように実現できるときと定める.

実は, $\kappa(M) = 0$ となる曲面 M に対しても curve complex $C = C(M)$ を (少し違った方法で) 定義することができる. 単体複体は自然な距離を持つので, その距離で C を距離空間と見なすことにする. $\Gamma(M)$ は C に自然に作用していて, C の単体複体としての次元は $\max\{\kappa(M), 1\}$ に等しい. C は次のような著しい性質を持っている:

定理 15 ([17])**.** C は連結で (Gromov の意味で) 双曲的であって, 直径が無限大である.

この双曲性を用いて, 双曲群の Cayley グラフと C を似たものだと思って, Adams の議論を適用することを試みる. しかし, 簡単にわかることだが, C は局所無限, つまり, １つの頂点に無限個の辺がつながっている. さらに, C の (Gromov の意味での) 境界 ∂C はコンパクトでない. よって, Adams の議論をそのまま適用しようとすると, 命題 13 (i) に対応する主張が証明できない. よって, 次に述べる Thurston 境界を紹介する必要がある.

$$i\colon V(C) \times V(C) \to \mathbb{N}$$

を幾何的な交叉数とする. つまり, ２つの曲線のイソトピー類 $\alpha, \beta \in V(C)$ に対し, その幾何的な交叉数 $i(\alpha, \beta)$ とは α, β を代表する２つの曲線が交わる点の個数の最小数である. 例えば, 任意の $\alpha \in V(C)$ に対して $i(\alpha, \alpha) = 0$ が成り立つ.

$V(C)$ から 0 以上の実数全体 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像全体の空間 $\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)}$ に積位相を入れる. $\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)} \setminus \{0\}$ には, 正の実数全体の群 $\mathbb{R}_{>0}$ が掛け算で作用している. この作用に関する商空間を $P\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)}$ と記す. 次のような事実が知られている: 各 $\alpha \in V(C)$ に対し, $V(C) \ni \beta \mapsto i(\alpha, \beta)$ によって α を $\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)}$ の元と見なすと, $V(C)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)}$ へ埋め込まれる. さらに, $V(C)$ は $P\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)}$ へも埋め込まれる. そこで, 次のように定義する.

$$\mathcal{MF} = \overline{\mathbb{R}_{>0} \cdot V(C)} \ \text{ in } \mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)},$$

$$\mathcal{PMF} = \overline{V(C)} \ \text{ in } P\mathbb{R}_{\geq 0}^{V(C)}.$$

$\overline{A}$ は A の閉包を意味する. $\mathcal{PMF}$ が Thurston 境界と呼ばれるものである. 実際に, $\mathcal{PMF}$ は Teichmüller 空間の境界として実現される. $\mathcal{PMF}$ は $(6g-7+2p)$ 次元の球面と同相である. さらに, $i\colon V(C) \times V(C) \to \mathbb{N}$ は連続かつ $\mathbb{R}_{>0}$-同次に

$$i\colon \mathcal{MF} \times \mathcal{MF} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

へ拡張できる. $\mathbb{R}_{>0}$-同次ゆえ, $\mathcal{PMF}$ の 2 つの元についても, 交叉数が 0 であるか否かについては意味があることに注意する. そこで,

$$\mathcal{MIN} = \{F \in \mathcal{PMF} : i(\alpha, F) \neq 0\}$$

と定義する. $\mathcal{MIN}$ は $\mathcal{PMF}$ の $\Gamma(M)$-不変な Borel 部分集合である. Lebesgue の意味でほとんどすべての $\mathcal{PMF}$ の元は $\mathcal{MIN}$ に属することが知られている. これらの事実については [15, Chapter 3, Section 1] で挙げた参考文献を参照して頂きたい. 実は, Thurston 境界と curve complex C の境界 ∂C の間には, 次のような関係がある:

命題 16. (i) ([16]) $\Gamma(M)$-同変な連続写像

$$\pi\colon \mathcal{MIN} \to \partial C$$

が存在する.

(ii) ([14]) $\Gamma(M)$-同変な Borel 写像

$$H\colon \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN} \to S(M)$$

が存在する. ここで, $S(M)$ は C の単体全体の集合である.

この事実を用いて $\Gamma(M)$ からできる relation の性質を調べる. $\Gamma(M)$ が (X, μ) 上保測かつ本質的自由に作用しているとし, $\mathcal{R}$, $\rho\colon \mathcal{R} \to \Gamma(M)$ を Section 3 と同様に定義する. Adams の議論において重要だったのは, $\mathcal{R}$ の subrelation $\mathcal{S}$ が不変 Borel 写像を持つとき, $\mathcal{S}$ がどんな性質を満たすかを調べることだったことを思い出そう. 次を示すことができる:

定理 17 ([15])**.** A を X の測度正の Borel 部分集合, $\mathcal{S}$ を A 上 aperiodic な $(\mathcal{R})_A$ の subrelation とする. さらに, $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{PMF})$ が存在するとする. このとき, A の分割 $A = A_1 \sqcup A_2$ で次を満たすものが存在する:

$$\varphi(x)(\mathcal{MIN}) = 1 \ \text{ for a.e. } x \in A_1,$$

$$\varphi(x)(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}) = 1 \ \text{ for a.e. } x \in A_2.$$

このとき, A_1, A_2 は $\mathcal{S}$-不変, つまり, $x \in A_i$ かつ $(x, y) \in \mathcal{S}$ ならば, $y \in A_i$ $(i = 1, 2)$ であることがすぐわかる. またこの定理より, すぐに次の系が導かれる:

系 18 ([15])**.** 定理 17 の記号で, B を A の測度正の Borel 部分集合とし, $(\mathcal{S})_B$-不変 Borel 写像 $\psi\colon B \to M(\mathcal{PMF})$ が存在したとする. このとき,

$$\psi(x)(\mathcal{MIN}) = 1 \quad \text{for a.e. } x \in B \cap A_1,$$
$$\psi(x)(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}) = 1 \quad \text{for a.e. } x \in B \cap A_2.$$

この系により, 次のように $\mathcal{R}$ の subrelation を分けることができる:

定義 19 ([15])**.** A を X の測度正の Borel 部分集合, $\mathcal{S}$ を A 上 aperiodic な $(\mathcal{R})_A$ の subrelation とする. $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{PMF})$ がほとんどすべての $x \in A$ について

$$\varphi(x)(\mathcal{MIN}) = 1 \quad (\text{resp. } \varphi(x)(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}) = 1)$$

を満たすとき, $\mathcal{S}$ は irreducible and amenable (resp. reducible) であるという.

この名前の由来は次の通りである: $\mathcal{S}$ が irreducible and amenable ならば, $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{PMF})$ でほとんどすべての $x \in A$ に対し, $\varphi(x)(\mathcal{MIN}) = 1$ となるものがあるが, これと命題 16 (i) の $\pi\colon \mathcal{MIN} \to \partial C$ から誘導される写像を合成することで, $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $A \to M(\partial C)$ を得ることができる. ここで, ∂C は局所コンパクトでないが, $M(\partial C)$ には適当な Borel 構造を入れることができる. すると命題 13 (ii) における Adams の主張に対応する次の定理が得られる:

定理 20 ([15])**.** $\mathcal{S}$ が irreducible and amenable ならば, $\mathcal{S}$ は (relation として) amenable である.

ただし, この定理の証明においてはただ単に Adams の議論を適用してもうまくいかない. (Curve complex の局所無限性がいつも邪魔をする.) Curve complex の双曲性以外の幾何学的性質を用いる必要があることを記しておく. Adams の議論では双曲群のその境界上の作用が amenable であることを用いていたが, 定理 20 の証明では次の事実を用いる:

定理 21 ([15])**.** (i) ∂C は 標準 Borel 空間である.

(ii) μ を ∂C 上の $\Gamma(M)$ の作用に関して非特異な確率測度とすると, $\Gamma(M)$ の 測度付き Borel 空間 $(\partial C, \mu)$ 上の作用は amenable である.

これで, "irreducible and amenable" という名前の "amenable" の部分の由来が説明できた. "irreducible" の部分はただ単に reducible でないということによる. "Reducible" という名前の由来は次の通り: $\mathcal{S}$ が reducible であるとする. このとき, $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $\varphi\colon A \to M(\mathcal{PMF})$ でほとんどすべての $x \in A$ に対し, $\varphi(x)(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}) = 1$ となるものがある. これと命題 16 (ii) の $H\colon \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN} \to S(M)$ から誘導される写像を合成することで, $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像 $A \to M(S(M))$ を得ることができる. $S(M)$ が可算集合であることより, $M(S(M))$ から $S(M)$ の空でない有限部分集合全体の空間 $\mathcal{F}(S(M))$ への $\Gamma(M)$-同変 Borel 写像が容易に作れる. ゆえに $\mathcal{S}$-不変 Borel 写像

$$\psi\colon A \to \mathcal{F}(S(M))$$

を得ることができる. $\mathcal{F}(S(M))$ が可算集合であることから

$$S = \{F \in \mathcal{F}(S(M)) : \mu(\psi^{-1}(F)) > 0\}$$

とおくと, $A = \bigsqcup_{F \in S} \psi^{-1}(F)$ (up to null sets) と書ける. $F \in S$, $(x, y) \in (\mathcal{S})_{\psi^{-1}(F)}$ に対し,

$$\rho(x, y)F = \rho(x, y)\psi(y) = \psi(x) = F$$

となることにより, 次がわかる:

定理 22 ([15])**.** $\mathcal{S}$ が reducible ならば, $S \subseteq \mathcal{F}(S(M))$ と A の (本質的な) 分割

$$A = \bigsqcup_{F \in S} A_F, \quad \mu(A_F) > 0$$

が存在して, 次が成り立つ: 任意の $F \in S$ について

$$\rho((\mathcal{S})_{A_F}) \subseteq \{g \in \Gamma(M) : gF = F\}.$$

実は, $\Gamma(M)$ の無限部分群 Γ の分類で次のようなものがある [18]:

(i) $\sigma \in S(M)$ で, 任意の $g \in \Gamma$ に対し $g\sigma = \sigma$ となるものが存在するとき, Γ は reducible であるという;

(ii) Γ に対し, (i) のような $\sigma \in S(M)$ が存在しないとき, Γ は irreducible であるという.

(ii) のときはさらに, $\mathcal{PMF}$ 上に不動点が存在するとき, Γ は amenable であって, そうでないときは Γ は $\mathbb{F}_2$ を部分群として含むことがわかっている. また, Γ が $\mathcal{F}(S(M))$ 上不動点を持つときは Γ は reducible であることもわかる. これらのことが “reducible subrelation” の名前の由来である.

ここで注意しておきたいことは, ($\kappa(M) > 0$ のとき) reducible な部分群で non-amenable なものが存在することである. 例えば, $\alpha, \beta, \gamma \in V(C)$ で $i(\alpha, \beta) = i(\alpha, \gamma) = 0$, $i(\beta, \gamma) \neq 0$ となるものをとれば, β と γ の Dehn twist で生成される部分群は, α を固定するが $\mathbb{F}_2$ を含んでいる. よって, 定理 20 のようなことは reducible subrelation については期待できない. しかし, reducible な部分群に対して, それが固定する $S(M)$ の元で自然なもの (canonical reduction system と呼ばれる) が存在する. これを reducible subrelation についても定義して同様な性質を持つことを証明することが重要になってくる. 詳細は長くなるので, ここでは述べないことにする.

もう一言述べておくと, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Gamma(M)}$ 自体は irreducible and amenable でも reducible でもないことがわかる. これらのことや Feldman-Sutherland-Zimmer [4] による normal subrelation の概念を用いると, 定理 3 を証明することができる. 定理 7, 9 の証明では, reducible subrelation のさらに細かい性質についての議論を要する.

無論, これまで紹介した relation に関する定理は, 群のレベルでは既知の事実から証明できることばかりである. Section 3 でも述べたが, 群のレベルの主張を如何にして relation のレベルで証明するかが鍵となる. (群のレベルでの証明が, そのまま relation のレベルで通用する場合は極めて少ない.) 詳細は [15] を参照して頂きたい.

最後に, 写像類群の exactness について触れておく.

定義 23. 離散群が exact であるとは, それがあるコンパクトハウスドルフ空間上, (topological な意味で) amenable に作用するときをいう.

いくつかの幾何学的な予想 (e.g., Novikov 予想) が, exact な離散群について正しいことが確認されている. このことから, 与えられた離散群が exact かどうかを調べることは重要である. また, 次のような exactness の特徴付けがある:

定理 24 ([3, Theorem 3.3.7])**.** 離散群 Γ が コンパクトハウスドルフ空間 X に連続に作用しているとする. このとき, この作用が (topological な意味で) amenable であることと, X 上のこの作用に関して非特異な任意の確率測度 μ に対し, Γ の測度付き Borel 空間 (X, μ) 上の作用が amenable であることは同値である.

定理 21 (ii) とこの事実から, 写像類群は exact になりそうである. しかし既に述べたように, ∂C はコンパクトでない. 一方, 残念ながら Thurston 境界上の作用は (topological な意味で) amenable でないことがすぐわかってしまう. 講演では, 写像類群の exactness については未解決であると述べた. しかし, 研究集会直後の, 林倫弘氏を幹事とする関数解析研究会 (ジュニア) において, 小沢登高氏の指摘により exact であることが証明できた. お二人には, この場を借りて感謝の念を表したい. 証明の詳細は [15, Appendix C] に記してある. また, 最近, このことについて Hamenstädt による別証明が与えられた [12].

参考文献

[1] S. Adams. Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups. *Topology* **33** (1994), 765–783.

[2] S. Adams. Indecomposability of equivalence relations generated by word hyperbolic groups. *Topology* **33** (1994), 785–798.

[3] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids.* Monogr. Enseign. Math., 36. Enseignement Math., Geneva, 2000.

[4] J. Feldman, C. E. Sutherland and R. J. Zimmer. Subrelations of ergodic equivalence relations. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), 239–269.

[5] A. Furman. Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[6] D. Gaboriau. On orbit equivalence of measure preserving actions. In *Rigidity in dynamics and geometry* (Cambridge, 2000), 167–186, Springer, Berlin, 2002.

[7] D. Gaboriau. Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* No. **95** (2002), 93–150.

[8] D. Gaboriau. Examples of groups that are measure equivalent to the free group. Preprint 2005. math.DS/0503181. To appear in *Ergodic Theory Dynam. Systems.*

[9] É. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov.* Progr. in Math., 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

[10] M. Gromov. Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory. *J. Differential Geom.* **33** (1991), 263–292.

[11] U. Hamenstädt. Bounded cohomology and isometry groups of hyperbolic spaces. Preprint 2005. math.GR/0507097.

[12] U. Hamenstädt. Geometry of the mapping class groups I: Boundary amenability. Preprint 2005. math.GR/0510116.

[13] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group. In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, 245–251, Ann. of Math. Stud., 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.

[14] N. V. Ivanov. *Subgroups of Teichmüller modular groups.* Transl. of Math. Monogr., 115. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[15] Y. Kida. The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory. Preprint 2005. Available at `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/preprint/preprint2005.html`

[16] E. Klarreich. The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space. Preprint 1999. Available at `http://nasw.org/users/klarreich`

[17] H. A. Masur and Y. N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.* **138** (1999), 103–149.

[18] J. McCarthy and A. Papadopoulos. Dynamics on Thurston's sphere of projective measured foliations. *Comment. Math. Helv.* **64** (1989), 133–166.

[19] C. T. McMullen. The moduli space of Riemann surfaces is Kähler hyperbolic. *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), 327–357.

[20] N. Monod and Y. Shalom. Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology. Preprint 2002. To appear in *Ann. of Math.* Available at `http://www.math.uchicago.edu/~monod`

[21] D. S. Ornstein and B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), 161–164.

[22] R. J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups.* Monogr. in Math., 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.