対称行列の対角化

Shane Kelly

2026 年 1 月 4 日

概要

（実）対称行列が直交行列によって対角化できることの証明を 3 通り与える．

1

第 1 の証明は**中間値の定理**を用いる．また，**矢印行列**（arrowhead matrix）では行列式を明示的に計算できることを用いる．

定義 1. n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ が矢印行列であるとは，第 *1* 行・第 *1* 列・対角成分以外がすべて 0 であることをいう．すなわち，次の形である：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & & & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & & & & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここで空欄はすべて 0 である．

補題 2. 式 (1) の形の矢印行列 A をとる．$2 \le i \le n$ のすべてで $a_{ii} \neq 0$ と仮定する．このとき

$$\det A = \left(a_{11} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{nj}a_{jn}}{a_{jj}} \right) \left(\prod_{j=2}^{n} a_{jj} \right)$$

が成り立つ．

証明.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\det=1} = \begin{pmatrix} a_{11} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{nj}a_{jn}}{a_{jj}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

□

定理 3. $n \geq 1$ とし，A を n 次対称行列とする．次の *2* つの命題を考える．

(Eig.)$_n$ A は少なくとも *1* つの固有値をもつ．

(Diag.)$_n$ ある直交行列 P が存在して $P^{-1}AP$ は対角行列である．

すると，

(a) *(Eig.)$_n$* $\wedge$ *(Diag.)$_{n-1}$* $\implies$ *(Diag.)$_n$*，

(b) *(Diag.)$_n$* $\implies$ *(Eig.)$_{n+1}$*，特に，

(c) *(Diag.)$_n$* はすべての $n \geq 1$ で成り立つ．

注意 4. 0 次正方行列は（$1 \leq i \neq j \leq 0$ となる成分が存在しないので）対角行列とみなせる．したがって (Diag.)$_0$ は意味を持ち，真である．しかし，$\mathbb{R}^0 = \{0\}$ には零でないベクトルが存在しないので，0 次正方行列は固有値をもたない．よって (Eig.)$_0$ は偽である．(c) の帰納法ステップでは $n \geq 2$ なので，(a) の $n = 1$ の場合は無視してよい．

証明．*(a)* まず (Eig.)$_n$ $\wedge$ (Diag.)$_{n-1}$ $\implies$ (Diag.)$_n$ を示す．仮定 (Eig.)$_n$ より，固有値 λ をもつ固有ベクトル v を第 1 列にもつ直交行列 $Q = [v, x_2, \ldots, x_n]$ を取れる．すると，

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここで B は $(n{-}1)$ 次正方対称行列である．仮定 (Diag.)$_{n-1}$ より，$D = R^{-1}BR$ は対角行列である $(n{-}1)$ 次正方直交行列 R が存在する．2 つの直交行列の積 $P = Q\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right]$ も直交行列であり，

$$P^{-1}AP = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right]^{-1} Q^{-1}AQ \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right]$$

は対角行列なので，A について (Diag.)$_n$ が成り立つ．

(b) 次に (Diag.)$_n$ $\implies$ (Eig.)$_{n+1}$ を示す．A を $(n{+}1)$ 次正方対称行列とし，A の第 $(1,1)$ 小行列を A_1 として

$$A = \left[\begin{smallmatrix} d_0 & {}^t b \\ b & A_1 \end{smallmatrix}\right]$$

と書ける．ここで，b は列ベクトルである．仮定 (Diag.)$_n$ より A_1 は直交行列 Q_1 で対角化できる．次の直交行列を考える：

$$Q = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{smallmatrix}\right].$$

講義の定理 3.16 より[*1]，A の固有値と $Q^{-1}AQ$ の固有値は一致する．したがって A を $Q^{-1}AQ$ に

[*1] 次の等式が成り立つからである：$\det(A{-}tE) = 1 \cdot \det(A{-}tE) \cdot 1 = \det Q^{-1} \det(A{-}tE) \det Q = \det\left(Q^{-1}(A{-}tE)Q\right) = \det(Q^{-1}AQ{-}Q^{-1}tEQ) = \det(Q^{-1}AQ{-}tE)$.

置き換えれば，A は式 (1) の形の矢印行列であると仮定してよい．あとは，対称矢印行列

$$\begin{pmatrix} d_0-t & b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & d_1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & \dots & d_n-t \end{pmatrix} \tag{2}$$

の行列式が, ある $t \in \mathbb{R}$ で 0 となることを示せばよい．$1 \leq i \leq n$ について d_i-t は $\mathbb{R}\setminus\{d_1,\dots,d_n\}$ 上で可逆なので，補題 2 よりそのような t では行列式は

$$\left((d_0-t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{d_i - t}\right)(d_1-t)(d_2-t)\dots(d_n-t) \tag{3}$$

となる．式 (3) が，ある $t \in \mathbb{R} \setminus \{d_1,\dots,d_n\}$ で 0 となることは，下記の式 (4) が，ある $t \in \mathbb{R} \setminus \{d_1,\dots,d_n\}$ で 0 となることと同値である：

$$f(t) = (d_0-t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{d_i-t} \tag{4}$$

式 (4) を観察すると

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} f(t) = -\infty \qquad \text{かつ} \qquad \lim\nolimits_{t\to d_m^+} f(t) = \infty$$

が分かる．ここで，$d_m = \max\{d_1,\dots,d_n\}$ とする．したがって中間値の定理より，連続関数 (4) は (d_m, ∞) のどこかで 0 となる．よって A は少なくとも 1 つの固有値をもつ．

(c) 最後に，$(\mathrm{Diag.})_1$ と $(\mathrm{Eig.})_1$ はいずれも真であることが気づく．以上より帰納法で，すべての $n \geq 1$ について $(\mathrm{Eig.})_n$ と $(\mathrm{Diag.})_n$ が成り立つ．具体的には,

$$(\mathrm{Eig.})_{n-1} \wedge (\mathrm{Diag.})_{n-1} \overset{(b)}{\Longrightarrow} (\mathrm{Eig.})_n \wedge (\mathrm{Diag.})_{n-1} \overset{(a)}{\Longrightarrow} (\mathrm{Eig.})_n \wedge (\mathrm{Diag.})_n.$$

□

2

第 2 の証明は**複素共役・三角化・代数学の基本定理**を用いる．

定理 5. A を n 次正方**実**対称行列とする．すなわち，A の成分がすべて実数である．このとき，n 次多項式 $\varphi_A(t) = \det(A - tE)$ の複素根はすべて実数である．特に，A は直交行列により対角化できる．

証明. $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\varphi_A(\lambda) = 0$ を満たすとする．このとき複素行列 $A - \lambda E$ の行列式は 0 なので，対応する $\mathbb{C}$-線形写像 $T_{A-\lambda E} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n;\ x \mapsto (A - \lambda E)x$ は非自明な核をもつ．すなわち，$Ax = \lambda x$

を満たす $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ が存在する．複素共役 ${}^t\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ を用いると，次の計算より $\lambda \in \mathbb{R}$ が従う：

$$\overline{\lambda}({}^t\overline{x}x) \overset{(*)}{=} \overline{\lambda({}^t\overline{x}x)} = \overline{{}^t\overline{x}\lambda x} = \overline{{}^t\overline{x}Ax} \overset{(**)}{=} {}^t xA\overline{x} = {}^t({}^t xA\overline{x}) \overset{(***)}{=} {}^t\overline{x}Ax = {}^t\overline{x}\lambda x = \lambda({}^t\overline{x}x)$$

ここで $(*)$ は ${}^t\overline{x}x$ が実数であること，$(**)$ は A が実行列であること，$(***)$ は A が対称であることによる．したがって，n 次多項式 $\varphi_A(t)$ の複素根はすべて実数である．

最後に，n 次正方行列 A は（重複度込みで）n 個の固有値をもつので，講義の定理 4.2 より直交行列 P が存在して ${}^tPAP$ は三角行列となる．さらに A が対称なので ${}^tPAP$ も対称であり，対称な三角行列は対角行列である． $\square$

3

以下の資料（第 3 の証明・極値定理の付録）は
授業の範囲外で，参考用です。

第 3 の証明は**微積分**と**極値定理**を用いる．用いる形は，1 年次の数学で必ずしも扱われないことがあるので，後で自己完結的に説明する．証明では $V \subseteq \mathbb{R}^n$ の直交補

$$V^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid {}^t wv = 0 \ \forall v \in V\}$$

および v の張る部分空間

$$\langle v \rangle = \{av \mid a \in \mathbb{R}\}$$

を用いる．補題 7 より $(V^{\perp})^{\perp} = V$ である（$\mathbb{R}^n$ の次元は有限であるから）．

定理 6. *A を n 次正方対称行列とする．このとき A は少なくとも 1 つの実固有値をもつ．したがって任意の対称行列は直交行列により対角化できる．*

証明. 単位球面上で $f : x \mapsto {}^t xAx$ を考える．

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t xx = 1\}.$$

S^{n-1} はコンパクトであり（定理 10），また $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ は連続である（演習 13）から，最大値定理（定理 14）により f は最大値 M をとる．すなわち，ある $x \in S^{n-1}$ が存在して $f(x) = M$ である．

x に直交する任意の単位ベクトル $y \in S^{n-1} \cap \langle x \rangle^{\perp}$ を取る．$\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対し，下記の図のとおり，摂動したベクトル v_ε を

$$v_\varepsilon := \tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(x + \varepsilon y) \in S^{n-1}$$

で定める．y を固定すると，次の新しい関数が定まる：

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \varepsilon \mapsto g(\varepsilon) := f(v_\varepsilon).$$

この g は $v_\varepsilon = x$ のとき，すなわち $\varepsilon = 0$ のとき，最大値をとる．したがって $g'(0) = 0$ である．g を

$$g(\varepsilon) = \tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(x + \varepsilon y)^t \, A \, \tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(x + \varepsilon y) = \frac{c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$$

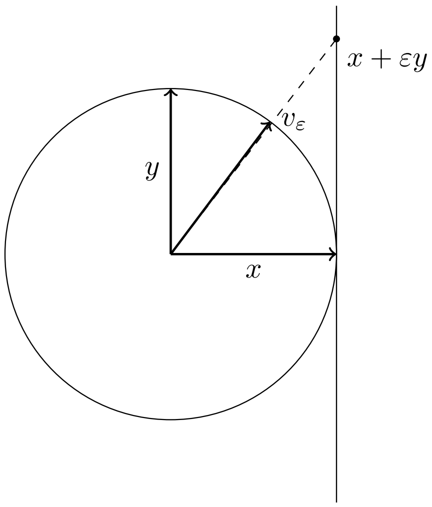
と書く．ここで $c_0 = {}^t xAx$, $c_1 = {}^t yAx + {}^t xAy$, $c_2 = {}^t yAy$ である．右端の式を微分すると

$$0 = g'(0) = c_1 = {}^t yAx + {}^t xAy \overset{A\text{ が対称}}{=} 2\,{}^t yAx$$

を得る．すなわち $Ax \in \langle 2y \rangle^{\perp} = \langle y \rangle^{\perp}$ である．これは任意の $y \in \langle x \rangle^{\perp}$ について成り立つので，

$$Ax \in \{\, y \mid y \in \langle x \rangle^{\perp} \,\}^{\perp} = (\langle x \rangle^{\perp})^{\perp} \overset{\text{Lemma 7}}{=} \langle x \rangle$$

図 1



$$v_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(x+\varepsilon y) \in S^{n-1}$$

と従う．よってある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $Ax = \lambda x$．言い換えると x は固有ベクトルである．

以上を用いて，最後の主張を証明する．A が対称であるとする．このとき A は少なくとも 1 つの固有ベクトル x_1（固有値 λ_1）をもつ．第一列が x_1 である直交行列[*2]

$$P_1 = [\, x_1\ v_2\ \dots\ v_n \,]$$

を取る．すると

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

となり，ここで A_1 は $n-1$ 次対称行列である．よって A_1 も固有ベクトル x_2（固有値 λ_2）をもつ．第一列が x_2 である直交行列

$$P_2 = [\, x_2\ w_2\ \dots\ w_{n-1} \,]$$

を取る．このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}^{-1} P_1^{-1}AP_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

を得る．ここで A_2 は $n-2$ 次対称行列である．この手順をさらに $n-3$ 回繰り返すと，A は直交行列の積によって対角化される．直交行列の積は直交行列なので，結局 A はある直交行列によって対角化される． □

補題 7. 任意の部分空間 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ について $(V^\perp)^\perp = V$ が成り立つ．

証明．$(-)^\perp$ の定義から $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ は自明なので，$\dim V = \dim(V^\perp)^\perp$ を示せばよい．V の基底を行ベクトルにもつ $k \times n$ 行列 A を取る．このとき

$$V^\perp = \ker(T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k; x \mapsto Ax).$$

[*2] 例えば，x_1 を $\mathbb{R}^n$ の基底に延長し，それに Gram–Schmidt の正規直交化を施せばよい．

A の行は独立なので，ある小行列式が 0 でない．したがって T_A は全射であり，

$$\begin{aligned}\dim V^\perp = \dim\ker T_A &= \dim\mathbb{R}^n - \dim\mathrm{im}\ T_A \\ &= n{-}k \\ &= \dim\mathbb{R}^n - \dim V.\end{aligned}$$

同様に，

$$\dim(V^\perp)^\perp = \dim\mathbb{R}^n - \dim V^\perp = n-(n-k) = k = \dim V$$

□

付録．極値定理

定義 8. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ を部分集合とする．X がコンパクトであるとは，任意の列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ が収束部分列をもつことをいう．すなわち，ある $i_0 < i_1 < i_2 < \cdots \in \mathbb{N}$ と $x \in X$ が存在して $\lim_{n\to\infty}||x - x_{i_n}|| = 0$ となること．

例 9. $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対し，$\{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$ はコンパクトではない．

定理 10.

1. 任意の $a < b \in \mathbb{R}$ について，$[a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$ はコンパクトである．
2. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ と $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ がコンパクトならば，$X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ もコンパクトである．
3. 単位球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ はコンパクトである．

証明.

1. 列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ を取る．$a_0 = a$，$b_0 = b$ と定める．$n > 0$ に対し，次を満たす a_n, b_n を帰納的に定める：
   (a) $a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1}$,
   (b) $|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|$,
   (c) 区間 $[a_n, b_n]$ は列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の項を無限個含む．
   $[a_n, b_n]$ がこれらの性質を満たすとして構成できたと仮定する．2 つの区間 $[a_n, \frac{b_n+a_n}{2}]$ と $[\frac{b_n+a_n}{2}, b_n]$ を考える．(c) より，少なくとも一方は $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の項を無限個含む．前者なら $a_{n+1} = a_n$，$b_{n+1} = \frac{b_n+a_n}{2}$ とし，後者なら $a_{n+1} = \frac{b_n+a_n}{2}$，$b_{n+1} = b_n$ とする．(a),(b) は構成から従う．さらに (b) より
   $$\lim_{n\to\infty}|b_n - a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{|b_0 - a_0|}{2^n} = |b_0 - a_0|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$
   (a) より列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加，$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少である．したがって，ある $c \in [a, b]$ が存在して $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}b_n = c$ となる．各区間 $[a_n, b_n]$ は (c) を満たすので，$x_{i_n} \in [a_n, b_n]$ となる $i_0 < i_1 < \cdots \in \mathbb{N}$ を取れる．このとき $\lim_{n\to\infty}x_{i_n} = c$ が従う．
2. 列 $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ を取る．X がコンパクトなので，ある $i_0 < i_1 < \cdots \in \mathbb{N}$ と $x \in X$ が存在して $\lim_{n\to\infty}||x - x_{i_n}|| = 0$ となる．$\{(x_i, y_i)\}$ を $\{(x_{i_n}, y_{i_n})\}$ で置き換えれば $i_n = n$ としてよいので，$\lim_{n\to\infty}||x - x_n|| = 0$ を仮定できる．さらに Y もコンパクトなので，ある $i_0 < i_1 < \dots$ と $y \in Y$ が存在して $\lim_{n\to\infty}||y - y_{i_n}|| = 0$ となる．再び部分列で置き換えて $i_n = n$ とすれば，$\lim_{n\to\infty}||x - x_n|| = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty}||y - y_n|| = 0$ を得る．すると
   $$\begin{aligned}0 \leq \lim_{n\to\infty}||(x, y) - (x_n, y_n)|| &= \lim_{n\to\infty}||(x - x_n, y - y_n)|| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}||x - x_n|| + \lim_{n\to\infty}||y - y_n|| = 0.\end{aligned}$$

3. 列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S^n$ を取る．$S^n \subseteq [-1,1]^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ であり，$[-1,1]^{n+1}$ はコンパクトなので，ある $i_0 < i_1 < \cdots \in \mathbb{N}$ と $x \in [-1,1]^{n+1}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}||x - x_{i_n}|| = 0$ となる．$x \in S^n$ を示せばよい．逆三角不等式より

$$0 \leq \Big|||x|| - ||x_{i_n}||\Big| \leq ||x - x_{i_n}||$$

したがって

$$0 = \lim_{n\to\infty}||x|| - ||x_{i_n}|| = \lim_{n\to\infty}||x|| - 1 = ||x|| - 1$$

すなわち，$x \in S^n$ である．

□

注意 11. S^n のコンパクト性は次のように直接示すこともできる． 立方体 $[-1,1]^{n+1}$ を，等しい大きさ 1 の 2^{n+1} 個の部分立方体に分割せよ．S^n 上の任意の列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は，そのうち 1 つの小立方体に無限個の項をもつ．その小立方体をさらに等しい大きさ $\frac{1}{2^{n+1}}$ の 2^{n+1} 個に分割し，同様に無限個含むものを選ぶ．これを繰り返すと，$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \cdots$ で各 C_i が $\{x_i\}$ の項を無限個含み，かつ C_i の大きさが $(\frac{1}{2^{n+1}})^{i-1}$ であるような小立方体列を得る．したがって $x_{i_j} \in C_j$ となる部分列を取り，$\cap_{i\in\mathbb{N}} C_i$ の唯一の点に収束させられる．（ここには多少の作業があり，詳細は演習とする．）

定義 12. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ と $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ を部分集合とする．写像 $f : X \to Y$ が連続であるとは，収束列を収束列に送ることをいう．すなわち，$x_1, x_2, \dots \in X$ と $x \in X$ が $\lim_{n\to\infty}||x - x_n|| = 0$ を満たすとき，$\lim_{n\to\infty}||f(x) - f(x_n)|| = 0$ が成り立つこと．

演習 13.

1. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$ は任意の $1 \leq k \leq n$ で連続である．
2. $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続ならば，$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ と $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ も連続である．
3. A を任意の n 次正方行列とするとき，$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ x \mapsto {}^t x A x$ は連続である．
4. $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$ とし，$f : Y \to \mathbb{R}$ が連続ならば，合成 $X \to Y \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ も連続である．

定理 14 (最大値定理)**.** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ がコンパクトで $f : X \to \mathbb{R}$ が連続ならば，f は最大値をとる．すなわち，ある $x_{\max} \in X$ が存在して任意の $x \in X$ について $f(x) \leq f(x_{\max})$ である．

証明. 背理法で示す．最大値が存在しないと仮定する．すると帰納的に $x_0, x_1, x_2, \dots \in X$ を構成して $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2) < \dots$ かつ

$$f(x) < \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ が任意の } x \in X \text{ に対して成り立つ．} \qquad (*)$$

ここで, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ となる場合も許す．X はコンパクトなので, ある $i_0 < i_1 < \cdots \in \mathbb{N}$ と $x \in X$ が存在して $\lim_{n\to\infty}||x - x_{i_n}|| = 0$ となる．f は連続なので $\lim_{n\to\infty}||f(x) - f(x_{i_n})|| = 0$, すなわち $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{i_n})$ である．これは $(*)$ に反する． □