①

$$ {}^t\begin{pmatrix} 7 & 7 & -4 & -7 \\ -8 & -2 & 6 & -8 \\ -7 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -7 \\ 7 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & -6 \\ -7 & -8 & -4 \end{pmatrix} $$

② a) $\operatorname{sgn}(2\ 3\ 1) = (-1)^2 = 1$

$2 < 3$
$2 > 1$
$3 > 1$

b) $\operatorname{sgn}(1\ 4\ 3\ 5\ 2) = (-1)^4 = 1$

$1 < 4$
$1 < 3$
$1 < 5$
$1 < 2$
$4 > 3$
$4 < 5$
$4 > 2$
$3 < 5$
$3 > 2$
$5 > 2$

c) $\operatorname{sgn}(4\ 2\ 3\ 6\ 1\ 7\ 5) = (-1)^8 = 1$

$4 > 2$
$4 > 3$
$4 < 6$
$4 > 1$
$4 < 7$
$4 < 5$
$2 < 3$
$2 < 6$
$2 > 1$
$2 < 7$
$2 < 5$
$3 < 6$
$3 > 1$
$3 < 7$
$3 < 5$
$6 > 1$
$6 < 7$
$6 > 5$
$1 < 7$
$1 < 5$
$7 > 5$

③ $\begin{pmatrix} \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -4 & 0 & \cancel{-5} & -5 \\ -5 & 1 & \cancel{4} & -3 \\ -3 & 2 & \cancel{-2} & -4 \end{pmatrix}$ の第(1, 3)小行列は $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 \\ -5 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

第(1, 3)小行列式は $(-4)\cdot 1\cdot(-4) + 0\cdot(-3)(-3) + (-5)(-5)(2)$

$- (-4)(-3)\cdot 2 - 0\cdot(-5)(-4) - (-5)\cdot 1\cdot(-3)$

$$\begin{aligned} &= 16 + 0 + 50 \\ &\quad - 24 - 0 - 15 \\ &= 66 - 39 \\ &= 27 \end{aligned}$$

第(1, 3)余因子は $(-1)^{1+3}\,27 = 27$

④ $\begin{cases} x - y - 2w = 2 \\ 2x - y - 3z - 3w = 1 \\ x - 3z - w = a \end{cases}$

の拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & a-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_1 + r_2 \\ \\ r_3 - r_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{a \neq -1}$ のとき階数は3で $\boxed{\text{解ない}}$。

$\boxed{a = -1}$ のとき階数は2で解は

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t - 1 \\ 3s - t - 3 \\ s \\ t \end{pmatrix}}$$

確認：

$$(3s + t - 1) - (3s - t - 3) - 2t = 2$$

$$2(3s + t - 1) - (3s - t - 3) - 3s - 3t = 1$$

$$3s + t - 1 - 3s - t = -1$$

⑤ $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r_1 \leftrightarrow r_2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -r_1 \\ r_2 + 4r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 + r_2 \\ \\ r_3 - r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ -r_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right)$$

確認：$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot1 + (-3)\cdot1 + 0\cdot1 & 4\cdot3 + (-3)\cdot4 + 0\cdot6 & 0\cdot(-1) \\ (-1)\cdot1 + 1\cdot1 + 0\cdot1 & (-1)\cdot3 + 1\cdot4 + 0\cdot6 & 0\cdot(-1) \\ (-2)\cdot1 + 3\cdot1 + (-1)\cdot1 & (-2)\cdot3 + 3\cdot4 + (-1)\cdot6 & (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑥ $\begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 \\ -2 & a+1 & -1 \\ -4 & -2 & a \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{=} \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 \\ -2 & a+1 & -1 \\ 0 & -2-2(a+1) & a-2(-1) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 \\ -2 & a+1 & -1 \\ 0 & -2a-4 & a+2 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-2a-4) \begin{vmatrix} a+4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (a+2) \begin{vmatrix} a+4 & 1 \\ -2 & a+1 \end{vmatrix}$

$= (2a+4)\big((a+4)(-1) - 1(-2)\big) + (a+2)\big((a+4)(a+1) - (1)(-2)\big)$

$= 2\cdot(a+2)(-a-2) + (a+2)(a^2+5a+4+2)$

$= (a+2)(-2a-4+a^2+5a+6)$

$= (a+2)(a^2+3a+2) \quad = (a+2)(a+2)(a+1)$

$\boxed{a \neq -2, -1}$ のとき $\begin{pmatrix} a+4 & 1 & 1 \\ -2 & a+1 & -1 \\ -4 & -2 & a \end{pmatrix}$ の行列式は0ではなくて、

正則である。

他の計算のやりかた：

$$\begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 \\ -2 & a+1 & -1 \\ 0 & -2a-4 & a+2 \end{vmatrix}$$ は $a=-2$ のとき $$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

の形で、この行列式が 0 になる。

$a \neq -2$ のとき $\frac{1}{a+2} r_3$ という行基本変形できて、

$$\begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 \\ -2 & a+1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$ になる。

$r_1 - r_3$

$$\begin{vmatrix} a+4 & 3 & 0 \\ -2 & a+1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4 & 3 \\ -2 & a+1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} a+4 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+4)(a+1) - (3)(-2) + 2\big((a+4)(-1) - 0(-2)\big)$$

$$= a^2 + 5a + 4 + 6 - 2a - 8$$

$$= a^2 + 3a + 2$$

$$= (a+1)(a+2)$$

⑦ クラメルの公式により、

$$\begin{cases} 4x + y + z = -2 \\ -2x + y - z = 0 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

の解は… $\boxed{x = \frac{1}{2},\quad y = \frac{-3}{2},\quad z = \frac{-5}{2}}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$x = \frac{|\boldsymbol{d}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(0 + -1 + 0 - (-4) - 0 - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(2) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{d}\ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2 + r_1}{=} \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(2 - 8) = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

$$z = \frac{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 + 2r_3}{=} \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(-4 - 6) = \frac{-10}{4} = \boxed{\frac{-5}{2}}$$

確認：

$$\begin{cases} 4\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right) + \left(\frac{-5}{2}\right) = -2 & \checkmark \\ -2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{-3}{2} - \left(\frac{-5}{2}\right) = 0 & \checkmark \\ -4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{-3}{2}\right) = 1 & \checkmark \end{cases}$$

⑧

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2 \to \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \overset{1}{\downarrow} & & & & & & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -4 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -3 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-1)^{1+2} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \to \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & \overset{4}{\downarrow} & & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -3 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-1)^{1+2}(-1)^{1+4} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 7 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \overset{4}{\downarrow} & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -3 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-1)^{1+2}(-1)^{1+4}(-1)^{4+7} \begin{array}{c|cccccc|c} & & & & 4 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \leftarrow 1 \\ & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \\ & \cdot & -5 & \cdot & \cdot & -5 & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -3 & \cdot & \\ & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \\ & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

$$= (-1)^{1+2}(-1)^{1+4}(-1)^{4+7}(-1)^{1+4} \begin{array}{c|ccccc|} & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ & \cdot & -5 & \cdot & -5 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & -3 & \cdot \\ & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & -5 \\ 5 \rightarrow & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & 3 & & \end{array}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+2}(-1)^{1+4}(-1)^{4+7}(-1)^{1+4}(-1)^{5+3}}_{=1} \begin{vmatrix} -5 & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & -5 & -5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -3 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=} (-1) \begin{vmatrix} -5 & \cdot & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & \cdot & -5 \\ \cdot & \cdot & -3 & \cdot \\ \cdot & -5 & -5 & \cdot \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_4}{=} (-1)(-1) \begin{vmatrix} -5 & 2 & \cdot & \cdot \\ 2 & -5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & \cdot \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = (25-4)(15) = 21 \cdot 15$$

$$= \boxed{315}$$

(a)

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & & & \\ -1 & -1 & -2 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & -1 & -1 \end{vmatrix} = ? \qquad \boxed{3}$$

7×7

3重対角行列で $\boxed{D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}}$

$\boxed{D_0 = 1}$ $\boxed{D_{-1} = 0}$ をつかう。

ここで $a = -1$, $b \cdot c = 2$

$$\begin{aligned}
D_{-1} &= 0 \\
D_0 &= 1 \\
D_1 &= -D_0 - 2D_{-1} = -1 \\
D_2 &= -D_1 - 2D_0 = 1 - 2 = -1 \\
D_3 &= -D_2 - 2D_1 = 1 + 2 = 3 \\
D_4 &= -D_3 - 2D_2 = -3 + 2 = -1 \\
D_5 &= -D_4 - 2D_3 = 1 - 6 = -5 \\
D_6 &= -D_5 - 2D_4 = 5 + 2 = 7 \\
D_7 &= -D_6 - 2D_5 = -7 + 10 = 3
\end{aligned}$$

10

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \\ 7^2 & 5^2 & 8^2 & 4^2 \\ 7^3 & 5^3 & 8^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (5-7)(8-7)(4-7)(8-5)(4-5)(4-8)$$

$$= \underbrace{(-2)(1)(-3)}_{}\underbrace{(3)(-1)(-4)}_{}$$

$$= (6) \cdot (12)$$

$$= \boxed{72}$$

$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ をつかった