第十三回

[定理] M を PID R 上有限生成加群とする。同型

$$M \cong R^{\oplus d} \oplus \bigoplus_{\substack{\text{素元} \\ p \in R}} \left(\left(\frac{R}{p}\right)^{\oplus e_{p1}} \oplus \left(\frac{R}{p^2}\right)^{\oplus e_{p2}} \oplus \left(\frac{R}{p^3}\right)^{\oplus e_{p3}} \oplus \cdots \right)$$

が存在する。ここに $d, e_{pi} \in \mathbb{N}$、有限個を除いて e_{pi} が 0である。
さらに、d、e_{pi} は一意に定まる。

証明。 M が有限生成加群とは全射 $\pi : R^{\oplus n} \to M$ が存在することである。命題によって、π の核が $R^{\oplus m}$ に同型である。 [R^nの部分加群だから]
すなわち、単射 $\iota : R^{\oplus m} \to R^{\oplus n}$ が存在して、

$$\underset{1}{0 \to} R^m \xrightarrow[2]{\iota} R^n \xrightarrow[3]{\pi} M \xrightarrow[4]{} 0$$

[$R^m \overset{\beta}{\cong}$ 核 $\overset{\alpha}{\subseteq} R^n$] $\iota = \alpha\beta$

が「完全系列」になる。

[定義] R加群準同型

$$M_{i_0} \to \cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{\phi_i} M_i \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots \to M_{i_n}$$

が完全系列であるとは、任意の i に対して、

$$\mathrm{im}(\phi_i) = \ker(\phi_{i+1})$$

が成立することである。

自由加群の準同型 ι に対応する $n \times m$ 行列 A を考えよう。

$$\iota : R^m \to R^n$$

$$(0,..,0,\underset{j}{1},0,...,0) \mapsto (a_{1j},\ldots,a_{nj})$$

$$b \longmapsto A \cdot b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

可逆行列 P, Q が存在して、

$$PAQ = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e_m \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

そうすると、行が完全系列である可換図式を得られる。

$$(b_1, \dots, b_m) = b \longmapsto (e_1 b_1, \dots, e_m b_m, 0, \dots, 0)$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^m \arrow[r, "PAQ"] & R^n \arrow[r] & \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \frac{R}{\langle e_i \rangle}\right) \oplus R^{n-m} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^m \arrow[r, "A"'] \arrow[u, "Q^{-1}"] & R^n \arrow[r] \arrow[u, "P", "\wr"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

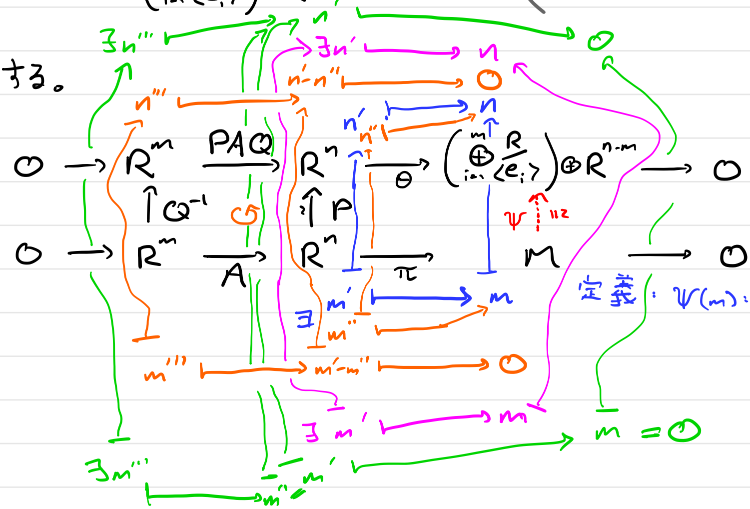
$$(b_1, \dots, b_m) = b \longmapsto A \cdot b$$

$$\left(PAQ = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e_m \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \right)$$

PとQが$\boxed{\text{同型}}$を誘導するから
「図式追跡」によって、同型
diagram chase

$$M \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \frac{R}{\langle e_i \rangle}\right) \oplus R^{n-m}$$

が存在する。



定義: $\psi(m) := \theta P(m')$

well defined ✓ i.e., $\pi(m') = \pi(m'') \Rightarrow \theta P(m') = \theta P(m'')$
全射 ✓ i.e., $\forall n,\ \exists m,\ \psi(m) = n$
単射 ✓ i.e., $\psi(m) = 0 \Rightarrow m = 0$

もしくは準同型定理によって、Pが同型のおかげで、誘導される準同型

$$\frac{R^{\oplus n}}{\iota(R^{\oplus m})} \xrightarrow[\sim]{P} \frac{R^{\oplus n}}{\Phi(R^{\oplus m})}$$

$$\begin{tikzcd} R^m \arrow[r, "\Phi"] & R^n \\ R^m \arrow[u, "Q^{-1}"] \arrow[r, "\iota"] & R^n \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

$(\Phi : b \mapsto PAQb)$

は同型である。ここに、ιはAに対応する準同型で、ΦはPAQに対応する準同型である。
最後に、各e_iを素元の積 $e_i = p_1^{j_1} \cdots p_r^{j_r}$ として書けば、
中国の剰余定理によって、同型

$$\frac{R}{\langle e_i \rangle} \cong \frac{R}{\langle p_1^{j_1} \rangle} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{\langle p_r^{j_r} \rangle}$$

となる。

d, e_{p_j}の一意性を証明するために同型

$$\begin{array}{ccc} R^d \oplus \bigoplus_{\substack{\text{素元} \\ p \in R}} \bigoplus_{j \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{e_{p_j}} \dfrac{R}{\langle p^j \rangle} & \cong & M \\ & & \wr\wr \\ R^{d'} \oplus \bigoplus_{\substack{\text{素元} \\ p \in R}} \bigoplus_{j \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{e'_{p_j}} \dfrac{R}{\langle p^j \rangle} & \cong & M' \end{array}$$

$d, e_{p,j}$の一意性を証明するために同型

$$\boxed{R^{d} \oplus \bigoplus_{\substack{\text{素元} \\ p \in R}} \bigoplus_{j \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{e_{p,j}} \frac{R}{\langle p^j \rangle} \cong M}$$

$$\wr\wr$$

$$R^{d'} \oplus \bigoplus_{\substack{\text{素元} \\ p \in R}} \bigoplus_{j \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{e'_{p,j}} \frac{R}{\langle p^j \rangle} \cong M'$$

とし、素元 p において $R/\langle p \rangle$ ベクトル空間 $p^n M / p^{n+1} M$ を考えよう。

$$\left(p^n M = \{ p^n m \mid m \in M \} \subseteq M \right)$$

$p \neq q$: $\quad p^n \frac{R}{\langle q^j \rangle} \Big/ p^{n+1} \frac{R}{\langle q^j \rangle} = 0 \quad$ ① $\quad \left(p \in \left(\frac{R}{q}\right)^{*} \right)$

$n \geq j$: $\quad p^n \frac{R}{\langle p^j \rangle} \Big/ p^{n+1} \frac{R}{\langle p^j \rangle} = 0 \quad$ ②

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{p^n} : M \to M \\ \quad m \longmapsto p^n m \end{array}\right\} \quad \Phi_{p^n} : R/\langle p \rangle \xrightarrow{\cong} \frac{p^n R}{p^{n+1} R} \quad ③$$

$n < j$: $\quad \Phi_{p^n} : R/\langle p \rangle \xrightarrow{\cong} p^n \frac{R}{\langle p^j \rangle} \Big/ p^{n+1} \frac{R}{\langle p^j \rangle} \quad$ ④

①②③④ $\Rightarrow$ $R/\langle p \rangle$ ベクトル空間同型

$$p^n M / p^{n+1} M \cong \left(\frac{R}{\langle p \rangle} \right)^{d} \oplus \bigoplus_{j > n} \left(\frac{R}{\langle p \rangle} \right)^{\oplus e_{p,j}}$$

$$\wr\wr$$

$$p^n M' / p^{n+1} M' \cong \left(\frac{R}{\langle p \rangle} \right)^{d'} \oplus \bigoplus_{j > n} \left(\frac{R}{\langle p \rangle} \right)^{\oplus e'_{p,j}}$$

$\Rightarrow \quad d + e_{p,n+1} + e_{p,n+2} + \cdots = d' + e'_{p,n+1} + e'_{p,n+2} + \cdots \qquad \forall p, n$

$\Rightarrow \quad d = d' \qquad e_{p,j} = e'_{p,j} \qquad \forall p, j$

$\square$

Jordan 標準形

[定理] Vを代数閉体k上の有限次元ベクトル空間とし、$\Phi: V \to V$を線型写像とする。同伴な行列が次の形になる基底が存在する。

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{pmatrix}$$

ここに、空白は0をあらわし、あるλ_iに対し、

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

証明。スカラー倍

$$k[T] \times V \longrightarrow V$$
$$\left(\sum a_i T^i, v\right) \longmapsto \sum a_i \Phi^i(v)$$

$\Phi(v) = T \cdot v$

を定義すると、Vは$k[T]$加群になる。

$$\Phi^i(v) = \underbrace{\Phi(\Phi(\Phi(\cdots\Phi(v))\cdots))}_{i}$$

$\dim_k V < \infty \Rightarrow k[T]$加群で有限生成

$$\Rightarrow \quad V \cong k[T]^d \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{k=1}^{e_{i,j}} \frac{k[T]}{\langle p_i(T) \rangle^j} \right)$$

$\exists\ p_i(T)$既約元, $e_{i,j}$, $n, m \in \mathbb{N}$

k代数閉 $\Rightarrow p_i(T) = T - \lambda_i \quad \exists\ \lambda_i \in k$.

$\dim_k V < \infty \Rightarrow d = 0 \qquad (\dim_k k[T] = \infty$ だから$)$

$$\dim V = \dim\left(k[T]^d \oplus \bigoplus_{i,j,k} \frac{k[T]}{\langle p_i \rangle^j}\right)$$

$$= d \cdot \dim k[T] + \sum_{i,j,k} \dim \frac{k[T]}{\langle p_i \rangle^j}$$

$$= d \cdot \infty + \sum_{i,j,k} j$$

[可換図式]:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[d, mapsto] & V \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \displaystyle\bigoplus_{i, j_i} \frac{k[T]}{(T-\lambda_i)^{j_i}} \arrow[d, "\Phi_T"] & m \arrow[d, mapsto] \\ \Phi(v) = Tv & V \arrow[r, "\cong"] & \displaystyle\bigoplus_{i, j_i} \frac{k[T]}{(T-\lambda_i)^{j_i}} & Tm \end{tikzcd}$$

Φ_T の行列が $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$

$$J : \frac{k[T]}{(T-\lambda)^j} \longrightarrow \frac{k[T]}{(T-\lambda)^j} \; ; \; \overline{f(T)} \longmapsto \overline{Tf(T)}$$

k-ベクトル空間基底

$$\underset{e_1}{\overline{(T-\lambda)^{j-1}}}, \; \underset{e_2}{\overline{(T-\lambda)^{j-2}}}, \; \underset{\cdots}{\cdots}, \; \underset{e_{j-1}}{\overline{T-\lambda}}, \; \underset{e_j}{\overline{1}} \in \frac{k[T]}{(T-\lambda)^j}$$

の同伴な行列

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

である。

□

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \overline{1} &\longmapsto \overline{T} = \overline{(T-\lambda)} + \lambda\overline{1} \\ \overline{T-\lambda} &\longmapsto \overline{T^2 - T\lambda} = \overline{(T-\lambda)^2} + \lambda\overline{(T-\lambda)} \\ \overline{(T-\lambda)^2} &\longmapsto \overline{T(T-\lambda)^2} = \overline{(T-\lambda)^3} + \lambda\overline{(T-\lambda)^2} \\ &\;\;\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \overline{(T-\lambda)^{j-1}} &\longmapsto \overline{T(T-\lambda)^{j-1}} = \lambda\overline{(T-\lambda)^{j-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_j &\longmapsto e_{j-1} + \lambda e_j \\ e_{j-1} &\longmapsto e_{j-2} + \lambda e_{j-1} \\ &\;\;\vdots \\ e_2 &\longmapsto e_1 + \lambda e_2 \\ e_1 &\longmapsto \lambda e_1 \end{aligned}$$

$$\overline{(T-\lambda)(T-\lambda)^{j-1}} = 0$$

有限生成 : $\exists\, m_1, \dots, m_n$, $M = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \mid x_i \in R \}$

$$\Updownarrow$$

$\exists$ $R^n \to M$ 全射

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

$$(0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \longmapsto m_j$$

---

① $p \neq q$ 素元 , R PID

$(p, q) = R$ $(p), (q)$ maximal ideals

$\Rightarrow 1 = ap + bq \quad \exists\, a, b \in R$

$\Rightarrow ap \equiv 1 \mod (q)$

$\Rightarrow p \in (R/q)^*$, $p^n, p^{n+1} \in (R/q)^*$

$\Rightarrow R/q = pR/q = p^2 R/q = p^3 R/q = \dots$

$\Rightarrow p^n R/q = p^{n+1} R/q$

$\Rightarrow p^n R/q \big/ p^{n+1} R/q = 0$

② $n \geq j \Rightarrow p^n = p^j p^{n-j} \Rightarrow p^n \in p^j R$

$\Rightarrow p^n \equiv 0 \mod R/p^j$

$\Rightarrow p^n R/p^j = 0$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{p^n} : M &\to M\\ m &\mapsto p^n m\end{aligned}\right\} \qquad \Phi_{p^n} : R/\langle p\rangle \xrightarrow{\cong} p^n R / p^{n+1} R \qquad ③$$

全：
$$p^n R / p^{n+1} R = \{ p^n a + p^{n+1} R \mid a \in R \}$$

$$p^n a + p^{n+1} R = \Phi_{p^n}(a + pR)$$

単：
$$\begin{aligned}\Phi_{p^n}(a+pR) = 0 &\iff p^n a + p^{n+1} R = 0\\ &\iff p^n a \in p^{n+1} R\\ &\iff a = pb \quad \exists\, b\\ &\iff a + pR = 0\end{aligned}$$

同じ　④

$$M = M_1 \oplus M_2 \Rightarrow p^n M = p^n M_1 \oplus p^n M_2$$
$$\Rightarrow p^n M / p^{n+1} M = p^n M_1 / p^{n+1} M_1 \oplus p^n M_2 / p^{n+1} M_2$$

$$M = R^d \oplus \bigoplus_{\substack{\text{素元}\\ q \in R}} \bigoplus_{j \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{e_{q,j}} \frac{R}{\langle q^j \rangle}$$

$$\Rightarrow p^n M / p^{n+1} M = \left(p^n R / p^{n+1} R \right)^d \oplus \underbrace{\bigoplus_{\substack{\text{素元}\\ q \in R}} \bigoplus_{j \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{e_{q,j}} \left(p^n \frac{R}{\langle q^j \rangle} \Big/ p^{n+1} \frac{R}{\langle q^j \rangle} \right)}_{\cong\ ①}$$

$$\cong ③ \quad (R/pR)^d \oplus \underbrace{\bigoplus_{j \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{e_{q,j}} \left(p^n \frac{R}{\langle p^j \rangle} \Big/ p^{n+1} \frac{R}{\langle p^j \rangle} \right)}_{\cong\ ②}$$

$$(R/pR)^d \oplus \underbrace{\bigoplus_{j > n} \bigoplus_{i=1}^{e_{q,j}} \left(p^n \frac{R}{\langle q^j \rangle} \Big/ p^{n+1} \frac{R}{\langle q^j \rangle} \right)}_{\cong\ ④}$$

$$(R/pR)^d \oplus \bigoplus_{j > n} \bigoplus_{i=1}^{e_{q,j}} R/pR$$