

ミラー対称性と K3 曲面

Mirror symmetry and K3 surfaces

大阪大学理学研究科 植田 一石
Kazushi Ueda
Graduate School of Science
Osaka University

ミラー対称性は超弦理論に由来する数学的な現象で、ある空間の複素幾何と別の空間のシンプレクティック幾何の間に様々な不思議な関係があることを指す。K3 曲面に対しては、Hodge 数に自由度がないことと、種数 0 の Gromov-Witten 不変量が消えることから、一見すると位相的および古典的ミラー対称性は自明に思われるが、実は豊かな内容を持っている。このことを、 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の対称 Hilbert モジュラー曲面に付随する K3 曲面の族の周期をミラー対称性の視点から詳しく調べた [HNU] に沿って紹介したい。

1 ミラー対称性

ミラー対称性に関わる予想の中には様々なものがあるが、代表的なものとしては

- 位相的ミラー対称性
- 古典的ミラー対称性
- ホモロジー的ミラー対称性
- Strominger-Yau-Zaslow 予想

が挙げられる。位相的ミラー対称性は任意の n 次元 Calabi-Yau 多様体 Y に対して別の n 次元 Calabi-Yau 多様体 \check{Y} が存在して、Hodge 数の間に

$$h^{i,j}(Y) = h^{i,n-j}(\check{Y}) \quad (1.1)$$

という関係があることを主張する。古典的ミラー対称性は Y の Gromov-Witten 不変量の母関数と \check{Y} の周期の間の不思議な関係を予言する。これは Gromov-Witten 不変量を

用いて Y の「Kähler 構造のモジュライ空間」の上に定まる Hodge 構造の変形 (A-VHS) と、 \check{Y} の複素構造のモジュライ空間の上に通常の方法で定まる Hodge 構造の変形 (B-VHS) の間の関係として定式化できるので、**Hodge 理論的ミラー対称性**と呼ばれることもある (例えば [CK99, Iri11] およびその参考文献を参照). ここで、「Kähler 構造のモジュライ空間」と括弧をつけた理由は、現時点ではまだ定義が確定していないからである. Y の「Kähler 構造の拡大モジュライ空間」の普遍被覆は Y 上の接続層の導来圏の Bridgeland の意味での安定性条件の空間になると期待されている. ここで「拡大モジュライ空間」とは、 $h^{1,1}(Y)$ だけでなく全ての代数的サイクルを考えることを指す. **ホモロジー的ミラー対称性**は Kontsevich によって 1994 年の国際数学会議で提唱された予想であり、三角圏の同値

$$D^b \text{Fuk} Y \cong D^b \text{coh } \check{Y} \quad (1.2)$$

の存在を主張する. **Strominger-Yau-Zaslow 予想**は、任意の Calabi-Yau 多様体 Y が特殊 Lagrange トーラスファイバー束 $Y \rightarrow B$ の構造を持ち、その双対トーラスファイバー束 $\check{Y} \rightarrow B$ の全空間としてミラー \check{Y} が得られる事を主張する. 難しさの度合いとしては

$$\begin{aligned} & \text{(位相的ミラー対称性)} \ll \text{(古典的ミラー対称性)} \\ & \ll \text{(ホモロジー的ミラー対称性)} \ll \text{(SYZ 予想)} \end{aligned}$$

であると考えられているが、与えられた空間に対してそのミラーを作るのは一般には難しく、位相的ミラー対称性ですら完全解決には程遠い. ミラーの構成に関しては

- オービフォールド構成 [GP90]
- 反射的多面体の極双対 [Bat94]
- 可逆多項式の転置 [BH93]
- トーリック退化と conifold 転移 [BCFKvS98]
- 特殊 Lagrange トーラスファイバー束 [SYZ96]

などの様々な方法が知られている.

2 K3 曲面に対するミラー対称性

Y を K3 曲面とする時、自由アーベル群 $H^*(Y; \mathbb{Z})$ に向井対合

$$((a_0, a_2, a_4), (b_0, b_2, b_4)) = (a_2, b_2) - (a_0, b_4) - (a_4, b_0)$$

を入れたものを**拡大 K3 格子**と呼ぶ. Y の複素構造は Hodge-Riemann の双線型関係式

$$(\Omega, \Omega) = 0, \quad (\Omega, \bar{\Omega}) > 0 \quad (2.1)$$

を満たす正則体積形式 $\Omega \in H^{2,0}(Y)$ の類 $[\Omega] \in \mathbb{P}(H^2(Y, \mathbb{C}))$ によって定まる.

Y の複素化された **Kähler 構造**とは, $H^*(Y, \mathbb{C})$ の元

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \exp(B + \sqrt{-1}\omega) \\ &= \left(1, B + \sqrt{-1}\omega, \frac{1}{2}(B + \sqrt{-1}\omega)^2\right) \\ &\in H^0(Y; \mathbb{C}) \oplus H^2(Y; \mathbb{C}) \oplus H^4(Y; \mathbb{C}) \end{aligned}$$

で,

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = 0, \quad (\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}) > 0, \quad (\mathcal{U}, \Omega) = 0, \quad (\mathcal{U}, \bar{\Omega}) = 0 \quad (2.2)$$

を満たすものを指す. $H^2(Y; \mathbb{R})$ の元 ω は Kähler 類の一般化であり, $\omega \in H^2(Y, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(Y)$ と $\omega \cdot \omega > 0$ を満たす. $H^2(Y, \mathbb{R})$ の元 B は **B 場**と呼ばれ, $B \in H^2(Y, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(Y)$ を満たす. ω と B は $[\mathcal{U}] \in \mathbb{P}(H^*(Y; \mathbb{C}))$ から一意的に定まることに注意せよ. K3 曲面 Y と $\mathbb{P}(H^*(Y; \mathbb{C}))$ の 2 つの元の組 $(Y, ([\Omega], [\mathcal{U}]))$ で上の条件をみたすものを, 複素化された Kähler 構造を持つ K3 曲面と呼ぶ.

定義 2.1 (Aspinwall-Morrison [AM97]). 複素化された Kähler 構造を持つ K3 曲面の組 $((Y, ([\Omega], [\mathcal{U}])), (\check{Y}, ([\check{\Omega}], [\check{\mathcal{U}}])))$ は, 拡大 K3 格子の同型 $\varphi : H^*(Y; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^*(\check{Y}; \mathbb{Z})$ で $(\varphi([\Omega]), \varphi([\mathcal{U}])) = ([\check{\mathcal{U}}], [\check{\Omega}])$ を満たすものが存在するとき, **Aspinwall-Morrison の意味でのミラー対**と呼ばれる.

3 Batyrev ミラー構成と Dolgachev 予想

X を滑らかなトーリック弱 Fano 多様体とする. ここで, 弱 Fano 多様体とは, 反正準因子がネフかつ巨大な多様体を指す. Y を X の滑らかな反正準超曲面とする. 反正準束の Newton 多面体を

$$\Delta = \text{Conv} \{m \in \mathbf{M} \mid x^m \in H^0(\mathcal{O}_X(-K_X))\} \quad (3.1)$$

とおく. ここで \mathbf{M} は X の稠密トーラスの指標群である:

$$\mathbb{T} = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{M}] \subset X. \quad (3.2)$$

Δ の極多面体 (polar polytope) を

$$\check{\Delta} = \{v \in \check{M} \mid \text{任意の } m \in \Delta \text{ に対し } \langle v, m \rangle \geq -1\} \quad (3.3)$$

で定義する. ここで, $\check{M} = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ は M の双対格子である. $\check{\Delta}$ が格子多面体になる時, Δ は反射的 (reflexive) であると言う. 扇 Σ に対し, その 1 次元錐の生成元の凸包を扇多面体 (fan polytope) と呼ぶ. Δ を扇多面体を持つ扇を適当に選び, それに付随したトーリック多様体を \check{X} と書く. \check{X} が滑らかな反正準超曲面 \check{Y} を持つとき, Y と \check{Y} は Batyrev ミラー対 (Batyrev mirror pair) と呼ばれる [Bat94].

さて, X を 3 次元と仮定して, 反正準線形系 $|-K_X|$ と $|-K_{\check{X}}|$ に属する非常に一般の因子 Y と \check{Y} を取る. 制限写像 $\iota^* : H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(Y; \mathbb{Z})$ の像で生成される $H^2(Y; \mathbb{Z})$ の原始的部分格子を M_Δ とおき, $M_{\check{\Delta}} \subset H^*(\check{Y}, \mathbb{Z})$ も同様に定義する.

予想 3.1 (Dolgachev [Dol96, Conjecture (8.6)]).

1. ある格子 \check{M}_Δ が存在して, M_Δ の $H^2(Y; \mathbb{Z})$ における直交補格子 M_Δ^\perp は $U \perp \check{M}_\Delta$ と直交分解される.
2. 原始的埋め込み $M_{\check{\Delta}} \subset \check{M}_\Delta$ が存在する.
3. 等号 $M_{\check{\Delta}} = \check{M}_\Delta$ が成立するための必要十分条件は $M_\Delta \cong \text{Pic } Y$ である.

4 格子偏極 K3 曲面

K3 曲面 Y の 2 次のコホモロジー群 $H^2(Y, \mathbb{Z})$ にカップ積で対合を入れたものを K3 格子と呼ぶ. K3 格子は階数が 22 で符号が $(3, 19)$ の偶ユニモジュラー格子であり, 抽象的な格子として $L = E_8 \perp E_8 \perp U \perp U \perp U$ と同型になる. K3 曲面 Y に対して

$$\Delta(Y) = \{\delta \in \text{Pic}(Y) \mid (\delta, \delta) = -2\} \quad (4.1)$$

とおく. $[\mathcal{L}] = \delta \in \Delta(Y)$ となるような直線束 \mathcal{L} に対して, Riemann-Roch の定理より

$$h^0(\mathcal{L}) + h^0(\mathcal{L}^\vee) \geq 2 + \frac{1}{2}(\delta, \delta) = 1 \quad (4.2)$$

となるので, \mathcal{L} または \mathcal{L}^\vee のどちらか一方は自明でない切断を持ち, 従って効果的になる;

$$\Delta(Y) = \Delta(Y)^+ \amalg \Delta(Y)^-, \quad (4.3)$$

$$\Delta(Y)^+ = \{\delta \in \Delta(Y) \mid \delta \text{ は効果的}\}, \quad (4.4)$$

$$\Delta(Y)^- = -\Delta(Y)^+. \quad (4.5)$$

$\Delta(Y)$ の元による競映で生成される格子の直交群 $O(L)$ の部分群 $W(L)$ は

$$V(Y) = \{x \in H^{1,1}(Y) \cap H^2(Y, \mathbb{R}) \mid (x, x) > 0\} \quad (4.6)$$

の Kähler 類を含む連結成分 V^+ に真性不連続に作用する. この作用の基本領域は

$$C(Y) = \{x \in V(Y)^+ \mid \text{任意の } \delta \in \Delta(Y)^+ \text{ に対して } (x, \delta) \geq 0\} \quad (4.7)$$

で与えられ, Kähler 錘は

$$C(Y)^+ = \{x \in V(Y)^+ \mid \text{任意の } \delta \in \Delta(Y)^+ \text{ に対して } (x, \delta) > 0\} \quad (4.8)$$

となる (例えば [BHPVdV04, Corollary VIII.3.9] を参照). Lefschetz の定理により

$$\text{Pic}(Y) = H^{1,1}(Y) \cap H^2(Y; \mathbb{Z}) \quad (4.9)$$

となることに注意して,

$$\text{Pic}(Y)^+ = C(Y) \cap H^2(Y; \mathbb{Z}), \quad (4.10)$$

$$\text{Pic}(Y)^{++} = C(Y)^+ \cap H^2(Y; \mathbb{Z}) \quad (4.11)$$

と定義する.

M を符号 $(1, t)$ の偶非退化格子とする.

$$V(M) = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid (x, x) > 0\} \quad (4.12)$$

の連結成分を一つ選んで $V(M)^+$ と呼ぶ.

$$\Delta(M) = \{\delta \in M \mid (\delta, \delta) = -2\} \quad (4.13)$$

の部分集合 $\Delta(M)^+$ を

1. $\Delta(M) = \Delta(M)^+ \amalg \Delta(M)^-$, ただし $\Delta(M)^- = \{-\delta \mid \delta \in \Delta(M)^+\}$
2. $\Delta(M)^+$ は加法で閉じている (が, 減法では閉じていない)

を満たす様を選び,

$$C(M)^+ = \{h \in V(M)^+ \cap M \mid \text{任意の } \delta \in \Delta(M)^+ \text{ に対して } (h, \delta) > 0\} \quad (4.14)$$

とおく.

定義 4.1 (Dolgachev [Dol96]). K3 曲面 Y と原始的な格子の埋め込み $j : M \hookrightarrow \text{Pic}(Y)$ の組 (Y, j) を M 偏極 K3 曲面と呼ぶ. K3 曲面の同型射 $f : Y \rightarrow Y'$ で $j = f^* \circ j'$ を満たすものを (Y, j) から (Y', j') への同型射と呼ぶ. M 偏極 K3 曲面は,

$$j(C(M)^+) \cap \text{Pic}(Y)^{++} \neq \emptyset. \quad (4.15)$$

を満たすとき**豊富 (ample)** であると言われる.

原始的な格子の埋め込み $i_M : M \hookrightarrow L$ を固定して, その直交補格子を T と呼ぶ. M 偏極 K3 曲面の周期領域

$$\mathcal{D} = \{[\Omega] \in \mathbb{P}(T_{\mathbb{C}}) \mid (\Omega, \Omega) = 0, (\Omega, \bar{\Omega}) > 0\} \quad (4.16)$$

は $T_{\mathbb{R}}$ の向き付けられた正定値平面のなす Grassmann 多様体 $O(2, 19 - t)/SO(2) \times O(19 - t)$ である. これは 2 つの連結成分 \mathcal{D}^+ および \mathcal{D}^- からなり, その各々は IV 型の有界 Hermite 対称領域である.

$$\Gamma(M) = \{\sigma \in O(L) \mid \text{任意の } m \in M \text{ に対して } \sigma(m) = m\} \quad (4.17)$$

とおき, その自然な単射 $\Gamma(M) \hookrightarrow O(T)$ による像を Γ とする. K3 曲面に対する大域的 Torelli の定理と周期写像の全射性より, 豊富な M 偏極 K3 曲面のモジュライ空間 \mathcal{M} は \mathcal{D}°/Γ と表される. ここで,

$$\mathcal{D}^\circ = \mathcal{D} \setminus \left(\bigcup_{\delta \in \Delta(T)} H_\delta \cap \mathcal{D} \right) \quad (4.18)$$

は競映面 $H_\delta = \{z \in T_{\mathbb{C}} \mid (z, \delta) = 0\}$ の補集合である. 周期領域のコンパクト双対

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{[\Omega] \in \mathbb{P}(T_{\mathbb{C}}) \mid (\Omega, \Omega) = 0\} \quad (4.19)$$

における周期領域の閉包を \mathcal{D}^* と書く. その位相境界は

$$\mathcal{D}^* \setminus \mathcal{D} = \bigcup_{I : M_{\mathbb{R}} \text{ の等方部分空間}} B(I) \quad (4.20)$$

である. ここで, $B(I) = \mathbb{P}(I_{\mathbb{C}}) \setminus \left(\bigcup_{J \subsetneq I} \mathbb{P}(J_{\mathbb{C}}) \right)$ である. M の符号が $(2, 19 - t)$ であるので, I の階数は 1 または 2 であり, $\mathbb{P}(I_{\mathbb{C}}) \cap \mathcal{D}^*$ は一点か上半平面になる. I が \mathbb{Q} 上定義されている時, $B(I)$ は**有理的**であると言う. M の**佐竹-Baily-Borel コンパクト化**は

$$\mathcal{M}^* = \left(\mathcal{D} \cup \bigcup_{I : \text{rational}} \mathbb{P}(I_{\mathbb{C}}) \cap \mathcal{D}^* \right) / \Gamma. \quad (4.21)$$

で定義される.

ある格子 N によって $T = U \perp N$ となると仮定し, 等方的な部分空間 $\mathbb{Z}e \subset T$ に付随する尖点の近傍を考える. U の基底 $\{e, f\}$ を $(e, e) = (f, f) = 0$ および $(e, f) = 1$ を満たすように取り, $O(T)$ における e の固定化部分群を Γ_e とおく. N の元 v に対し, T の等長写像 $\varphi_{e,v}$ を

$$\varphi_{e,v}(x) = x - \left(\frac{1}{2}(v, v)(e, x) + (v, x) \right) e + (e, x)v \quad (4.22)$$

で定義する. 任意の $w \in N$ に対し,

$$\varphi_{e,v} \circ \varphi_{e,w} = \varphi_{e,v+w}, \quad (4.23)$$

および

$$\varphi_{e,v}(e) = e, \quad \varphi_{e,v}(f) = -\frac{1}{2}(v, v)e + f + v, \quad \varphi_{e,v}(w) = -(v, w)e + w \quad (4.24)$$

が成り立つことが容易に分かり,

$$\varphi_{e,\bullet} : N \hookrightarrow O(T). \quad (4.25)$$

は群の単射を定める. Γ_e の任意の元 ϕ は $\phi(f) \equiv f + v \pmod{\mathbb{Z}e}$ を満たす $v \in N$ と適当な $\psi \in O(N)$ を用いて $\psi \circ \varphi_{e,v}$ と書けることから,

$$\Gamma_e = O(N) \rtimes N \quad (4.26)$$

が分かる. 写像

$$v \mapsto \Omega = -\frac{1}{2}(v, v)e + f + v \quad (4.27)$$

によって, 周期領域 (4.16) は管状領域

$$\{v = v_1 + \sqrt{-1}v_2 \in N_{\mathbb{C}} \mid (v_2, v_2) > 0\} \quad (4.28)$$

と同一視される. この同一視によって, $\varphi_{e,u} \in N \subset \Gamma_e$ の作用は平行移動 $v \mapsto v + u$ に移される. 従って, \mathcal{D}/Γ の尖点の近傍は局所的に

$$(N_{\mathbb{C}}/N)/O(N)^+ \cong N_{\mathbb{C}^\times}/O(N)^+ \quad (4.29)$$

と同型である. ここで, $O(N)^+$ は \mathcal{D}^+ の連結成分を保つ $O(N)$ の指数 2 の部分群である. $O(N)^+$ の作用で不変な N の扇 Σ に対し, Σ に付随するトーリック多様体 X_Σ は $O(N)^+$ の自然な作用を持つ. 尖点の近傍を商 $X_\Sigma/O(N)^+$ の原点の近傍で置き換えることで, \mathcal{D}/Γ のトロイダル部分コンパクト化が得られる.

5 2次スタック

Δ を $M_{\mathbb{R}}$ 内の反射的多面体, $A = \{v_0 = 0, v_1, \dots, v_{n+r}\}$ を Δ の格子点の集合として, 扇列 (fan sequence)

$$0 \rightarrow \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+r} \xrightarrow{\beta} \check{N} \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

を考える. ここで $\check{N} = M$ であり, \mathbb{L} は i 番目の座標ベクトル e_i を v_i に送る準同型 $P: \mathbb{Z}^{n+r} \rightarrow \check{N}$ の核である. \mathbb{L} の基底を $\{c^{(p)}\}_{p=1}^r$ と書く. ただし $c^{(p)} = (c_1^{(p)}, \dots, c_{n+r}^{(p)})$ である. $\tilde{v}_i = (v_i, 1) \in \check{N} \oplus \mathbb{Z}$ とおいて, 完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}^A \xrightarrow{\tilde{\beta}} \check{N} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

を得る. ここで写像 $\tilde{\beta}$ は e_i を \tilde{v}_i に送り, 写像 $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}^A$ は $c^{(p)} \in \mathbb{L}$ を

$$\tilde{c}^{(p)} = (-c_1^{(p)} - \dots - c_{n+r}^{(p)}, c_1^{(p)}, \dots, c_{n+r}^{(p)}) \in \mathbb{Z}^A \quad (5.3)$$

に送る. 扇列 (5.1) に双対な列

$$0 \rightarrow \check{M} \xrightarrow{\beta^\vee} \mathbb{Z}^{n+r} \rightarrow \mathbb{L}^\vee \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

を因子列 (divisor sequence) と呼ぶ.

Δ の多面体分割 $\underline{\Delta} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ に対し,

$$C(\underline{\Delta}) = \{\psi \in \mathbb{R}^A \mid \text{任意の } i = 1, \dots, k \text{ に対し, } g_\psi \text{ は } \Delta_i \text{ 上でアファイン線形}\}, \quad (5.5)$$

とおく. ここで $g_\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ は $\psi: A \rightarrow \mathbb{R}$ に付随する区分線形凸関数である. 錐 $C(\underline{\Delta})$ は $M_{\mathbb{R}}$ 上のアファイン線形関数のなす加法群 $\text{Aff}(M_{\mathbb{R}})$ の作用で不変であり, 商錐 $C(\underline{\Delta})/\text{Aff}(M_{\mathbb{R}})$ は $\mathbb{R}^A/\text{Aff}(M_{\mathbb{R}})$ 内の完備扇 $\mathcal{F}(A)$ を定める. この扇 $\mathcal{F}(A)$ を **2次扇 (secondary fan)** と呼ぶ [GKZ94]. 2次扇 $\mathcal{F}(A)$ の極大錐は Δ の **正則三角形分割 (coherent triangulation)** に対応する. A のアファイン従属な部分集合で, その任意の真部分集合がアファイン独立であるようなものを **回路 (circuit)** と呼ぶ [GKZ94, 7.1.B]. 隣接する正則三角形分割は, 回路に沿った変更で移り合う [GKZ94, Theorem 7.2.10].

完全列 (5.2) における写像 $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}^A$ の転置 $\mathbb{Z}^A \rightarrow \mathbb{L}^\vee$ による \mathbb{Z}^A の基底の像たちは $\mathcal{F}(A)$ の 1次元錐の生成元をなし, これによって $\mathcal{F}(A)$ にスタック的扇の構造が定まる. このスタック的扇から定まるトーリック Deligne-Mumford スタックを **2次スタック**

ク (**secondary stack**) と呼ぶ [DKK]. 2 次スタックの稠密トーラスは $\mathbb{L}_{\mathbb{C}^\times}$ と自然に同一視される. 2 次スタック $X_{\mathcal{F}(A)}$ の粗モジュライ空間は $\mathbb{P}(\mathbb{C}^A)$ の \mathbb{T} による **Chow 商 (Chow quotient)** である [KSZ91, KSZ92].

$\underline{\Delta}$ の面 (すなわち, どれかの Δ_i の面) Δ' に対し,

$$C(\underline{\Delta}, \Delta') = \{\psi \in C(\underline{\Delta}) \mid g_\psi \text{ は } \Delta' \text{ で最小値を取る}\}$$

とおく. 錐 $C(\underline{\Delta}, \Delta')$ は $\mathbb{R} \subset \text{Aff}(\mathbf{M}_{\mathbb{R}})$ の加法的な作用で不変である. 錐 $C(\underline{\Delta}, \Delta')/\mathbb{R}$ たちの集合は \mathbb{R}^A/\mathbb{R} の完備扇 $\tilde{\mathcal{F}}(A)$ をなすが, この扇を **Lafforgue 扇 (Lafforgue fan)** と呼び [Laf03, Hac], Lafforgue 扇に付随するトーリックスタックを **Lafforgue スタック (Lafforgue stack)** と呼ぶ [DKK]. 自然な準同型 $\mathbb{Z}^A/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^A/\text{Aff}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M})$ は扇の射 $\tilde{\mathcal{F}}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ を引き起こし, トーリックスタックの射 $\varphi_X: X_{\tilde{\mathcal{F}}(A)} \rightarrow X_{\mathcal{F}(A)}$ を定める. 2 次スタック $X_{\mathcal{F}(A)}$ のトーラス軌道は $\underline{\Delta}$ の正則多面体分割と対応しているが, その軌道上の φ_X のファイバーは, その多面体分割に対応したトーリック多様体の合併になる.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ と $a = (a_0, \dots, a_{n+r}) \in \mathbb{C}^A$ に対し, Laurent 多項式

$$W(x; a) = \sum_{i=0}^{n+r} a_i x_1^{v_{i1}} \cdots x_n^{v_{in}} \quad (5.6)$$

は $(\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^A$ 上の関数を定めるが, この関数は $(\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{T}$ の $(\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^A$ への作用

$$x_i \mapsto \alpha_i x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.7)$$

$$a_k \mapsto \alpha_1^{-v_{k1}} \cdots \alpha_n^{-v_{kn}} a_k, \quad k = 0, \dots, n+r \quad (5.8)$$

で不変であり, $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ の作用

$$x_i \mapsto x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.9)$$

$$a_k \mapsto \alpha a_k, \quad k = 0, \dots, n+r \quad (5.10)$$

で α 倍されるので, $W(-; a)^{-1}(0) \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ の同型類は $[a] \in \mathbb{C}^A/(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^\times)$ のみに依存する. 族 $W^{-1}(0) \subset (\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^A \rightarrow \mathbb{C}^A$ を $\mathbb{T} \times \mathbb{C}^\times$ による作用で割り, 底空間とファイバーを同時にコンパクト化することによって, 超曲面の族 $\varphi_Y: \mathfrak{Y}_A \rightarrow X_{\mathcal{F}(A)}$ を得る. 言い換えると, 族 $X_{\tilde{\mathcal{F}}(A)} \rightarrow X_{\mathcal{F}(A)}$ の各ファイバーに制限すると反正準束を与えるような Lafforgue スタック $X_{\tilde{\mathcal{F}}(A)}$ 上の自然な直線束 $\mathcal{O}_{X_{\tilde{\mathcal{F}}(A)}}(1)$ が存在して, W はその大域切断を与え, \mathfrak{Y}_A はその零点集合で, φ_Y は $X_{\mathcal{F}(A)}$ への射影である.

Laurent 多項式 W の臨界点集合は, $(\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^A$ の上では

$$W = \frac{\partial W}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial W}{\partial x_n} = 0 \quad (5.11)$$

で定義されるが、その \mathbb{C}^A への射影の像の閉包 $\nabla_A \subset \mathbb{C}^A$ を判別式多様体 (**discriminantal variety**), ∇_A で消える既約な多項式 $\Delta_A \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_{n+r}]$ を A 判別式 (**A-discriminant**), Δ_A の Newton 多面体を A の **2 次多面体 (secondary polytope)** と呼ぶ. 2 次多面体の法扇は 2 次扇と一致することが知られている. $\nabla_A \cap (\mathbb{C}^\times)^A$ は $\mathbb{T} \times \mathbb{C}^\times$ の作用で不変なので, **簡約 A 判別式多様体 (reduced A-discriminantal variety)** と呼ばれる超曲面 $\overline{\nabla}_A \subset \mathbb{L}_{\mathbb{C}^\times} = (\mathbb{C}^\times)^A / (\mathbb{T} \times \mathbb{C}^\times)$ に落ちる.

$$\Phi_q(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{p=1}^r c_j^{(p)} \lambda_p \right)^{c_j^{(q)}} \quad (5.12)$$

とおくと, 有理写像 $h: \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{L}_{\mathbb{C}^\times}$, $\lambda = [\lambda_1 : \dots : \lambda_{r+1}] \mapsto (\Phi_1(\lambda_1), \dots, \Phi_r(\lambda))$ の像は簡約 A 判別式多様体を与えることが知られているが, これを簡約 A 判別式多様体の **Horn-Kapranov 一意化 (Horn-Kapranov uniformization)** と呼ぶ [Hor89, Kap91]. 族 φ_Y の判別式多様体の補集合 $X_{\mathcal{F}(A)}^{\text{reg}} = \mathbb{L}_{\mathbb{C}^\times} \setminus \nabla_A$ への制限を

$$\varphi_Y^{\text{reg}}: \mathfrak{Y}_A^{\text{reg}} \rightarrow X_{\mathcal{F}(A)}^{\text{reg}} \quad (5.13)$$

で表す.

6 ミラー対称性とモノドロミー

Hodge 理論によって, $X_{\mathcal{F}(A)}^{\text{reg}}$ 上の純偏極整 Hodge 構造の変形 $(H_{B,\mathbb{Z}}^{\text{vc}}, \nabla^B, \mathcal{F}_B^\bullet, Q_B)$ が定まる [Iri11, Definitions 6.5 and 6.7]. ここで $H_{B,\mathbb{Z}}^{\text{vc}}$ は点 $[a] \in X_{\mathcal{F}(A)}^{\text{reg}}$ の上のファイバーが消滅サイクルで生成される $H^{n-1}(Y_a, \mathbb{Z})$ の部分格子であるような $X_{\mathcal{F}(A)}^{\text{reg}}$ 上の局所系であり, ∇^B は $H_{B,\mathbb{Z}}^{\text{vc}} \otimes \mathcal{O}_{X_{\mathcal{F}(A)}^{\text{reg}}}$ 上の Gauss-Manin 接続, \mathcal{F}_B^\bullet は Hodge フィルトレーション, Q_B は偏極である. 一方, ミラー側においては,

$$H_{\text{amb}}^\bullet(\check{Y}; \mathbb{Z}) = \text{Im}(\iota^* : H^\bullet(\check{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^\bullet(\check{Y}; \mathbb{Z})) \quad (6.1)$$

を入れ物のトーリック多様体のコホモロジー群の制限として得られる $H^\bullet(\check{Y}; \mathbb{Z})$ の部分空間とするとき, $H_{\text{amb}}^2(\check{Y}; \mathbb{C})$ の適当な部分空間 U を底空間とし, $H^\bullet(\check{Y}; \mathbb{Z})$ をファイバーとするような局所系 $H_{A,\mathbb{Z}}^{\text{amb}}$ に, \check{Y} の Gromov-Witten 不変量を用いて定義される $\mathcal{H}_A = H_{\text{amb}}^\bullet(\check{Y}; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_U$ 上の Dubrovin 接続 ∇^A と Hodge フィルトレーション $\mathcal{F}_A^p = H_{\text{amb}}^{4-2p}(\check{Y}; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_U$ および Poincaré 対合 $Q_A: \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{O}_U$ を組み合わせることで, 純偏極整 Hodge 構造の変形 $(H_{A,\mathbb{Z}}^{\text{amb}}, \nabla^A, \mathcal{F}_A^\bullet, Q_A)$ を得ることが出来る [Iri11, Definition 6.2]. 局所系 $H_{A,\mathbb{Z}}^{\text{amb}}$ のファイバーは $\mathcal{N}(\check{X})$ からの引き戻しで生成される数値

的 Grothendieck 群 $\mathcal{N}(\check{Y})$ の部分群 $\mathcal{N}^{\text{amb}}(\check{Y})$ と同型になる. Riemann-Roch の定理により, $\mathcal{N}(\check{Y})$ は Grothendieck 群 $K(\check{Y})$ の写像

$$v : K(\check{Y}) \rightarrow H^*(\check{Y}, \mathbb{Q}), \quad \mathcal{E} \mapsto \text{ch}(\mathcal{E}) \cup \widehat{\Gamma}_{\check{Y}} \quad (6.2)$$

による像と同型になる. ここで, $\widehat{\Gamma}$ 類は Todd 類の平方根である [Iri09].

定理 6.1 (Iritani [Iri11, Theorem 6.9]). 純偏極整 Hodge 構造の変形の同型

$$\text{Mir}_Y : \zeta^*(H_{A,\mathbb{Z}}^{\text{amb}}, \nabla^A, \mathcal{F}_A^\bullet, Q_A) \xrightarrow{\sim} (H_{B,\mathbb{Z}}^{\text{vc}}, \nabla^B, \mathcal{F}_B^\bullet, Q_B) \quad (6.3)$$

が存在する.

定理 6.1 の証明の重要なステップは [Iri11, Theorem 5.7] であるが, その証明の過程で, 極大退化点の近傍における $\pi_1(\mathbb{L}_{\mathbb{C}^\times}^\vee) \cong \mathbb{L}^\vee$ の元 ℓ に沿った $H_{B,\mathbb{Z}}^{\text{vc}}$ のモノロドミーを同型 (6.3) で移したものは, $c_1(\mathcal{L}_i) = \ell \in \mathbb{L}^\vee \cong \text{Pic } \check{X}$ となる \check{X} 上の直線束 \mathcal{L}_i の双対束の制限によるテンソル積が引き起こす等長写像

$$(-) \otimes \iota^*(\mathcal{L}_i^\vee) : \mathcal{N}(\check{Y}) \rightarrow \mathcal{N}(\check{Y}) \quad (6.4)$$

で与えられることが示される. この作用は接続層の導来圏 $D^b \text{coh } \check{Y}$ の自己同値に持ち上がることに注意せよ. 周期写像のモノドロミーとミラーの接続層の導来圏の自己同値の関係は [Kon98, Hor05] に遡る.

\check{Y} が K3 曲面の時, 数値的 Grothendieck 群 $\mathcal{N}(\check{Y})$ は Picard 群 $\text{Pic}(\check{Y})$ と, 構造層および点層の類の生成する自由アーベル群の直和 $\mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\check{Y}}] \oplus \text{Pic}(\check{Y}) \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{O}_p]$ に分解する. ここで, Picard 群の数値的 Grothendieck 群への埋め込みは $[\mathcal{O}_{\check{Y}}(D)] \mapsto [\mathcal{O}_D]$ で与えられ, その上の対応は

$$(\mathcal{O}_{\check{Y}}, \mathcal{O}_{\check{Y}}) = -2, \quad (\mathcal{O}_{\check{Y}}, \mathcal{O}_D) = -\chi(\mathcal{O}_D), \quad (\mathcal{O}_{\check{Y}}, \mathcal{O}_p) = -1, \quad (6.5)$$

$$(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_E) = D \cdot E, \quad (\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_p) = -\chi(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) = 0 \quad (6.6)$$

で与えられる. ここで $\mathcal{O}_{\check{Y}}$ は構造層, \mathcal{O}_D は因子 D の構造層, そして \mathcal{O}_p は点の構造層である. 自己同値 $(-) \otimes \mathcal{O}_{\check{Y}}(-D) : K(\check{Y}) \rightarrow K(\check{Y})$ の作用は

$$[\mathcal{O}_{\check{Y}}] \mapsto [\mathcal{O}(-D)] = [\mathcal{O}_{\check{Y}}] - [\mathcal{O}_D], \quad (6.7)$$

$$[\mathcal{O}_E] \mapsto [\mathcal{O}_E(-D)] = [\mathcal{O}_E] - (D \cdot E)[\mathcal{O}_p], \quad (6.8)$$

$$[\mathcal{O}_p] \mapsto [\mathcal{O}_p] \quad (6.9)$$

で与えられる.

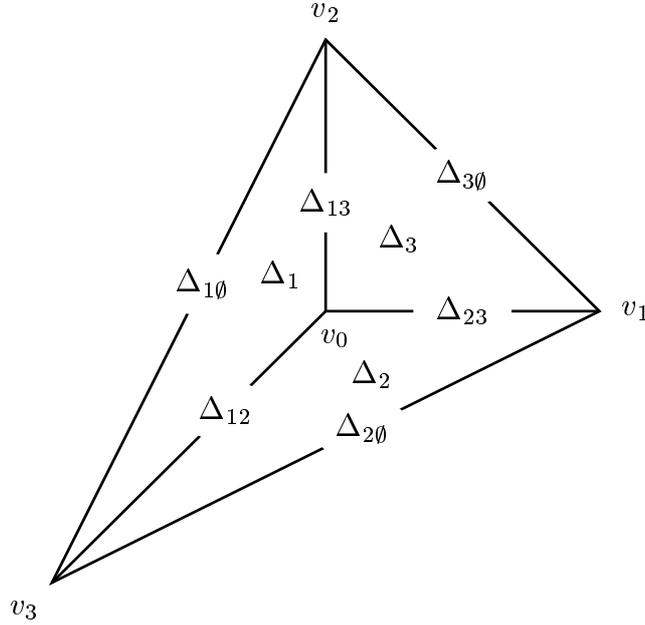


図 7.1 $\Delta = \text{Conv } A$ の多角形分割

7 モジュラー曲線 $X_0(3)$ 上の楕円曲線族

2 次スタックの例として, $A = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ で

$$(v_0 \ v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

の場合を考える. \mathbb{R}^A の元を, $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ なる関数たち $\{f_i\}_{i=0}^3$ と $(\lambda_i)_{i=0}^3 \in \mathbb{R}^4$ を用いて $f = \sum_{i=0}^3 \lambda_i f_i$ と書く. f によって引き起こされる Δ の多面体分割は

$$\underline{\Delta} = \begin{cases} \underline{\Delta}_- = \{\Delta\} & 3\lambda_0 \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \underline{\Delta}_+ = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} & 3\lambda_0 < \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{cases} \quad (7.2)$$

で与えられ, 2 次扇は 2 つの錐 $C(\{\Delta\}) = \{3\lambda_0 \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\}$ と $C(\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}) = \{3\lambda_0 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\}$ からなる. 多面体分割 $\underline{\Delta}_-$ は 1 つの面 $\{\Delta\}$, 3 つの辺 $\{\Delta_{10}, \Delta_{20}, \Delta_{30}\}$ および 3 つの頂点 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を持つ. \mathbb{R}^A/\mathbb{R} の座標を $\bar{\lambda}_i = \lambda_i - \lambda_0$, $i = 1, 2, 3$ とすると, Lafforgue 扇の錐は

$$\begin{aligned} C(\underline{\Delta}_-, \Delta) &= \{\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 \leq 0\}, \\ C(\underline{\Delta}_-, \Delta_{10}) &= \{\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 \leq \min\{\bar{\lambda}_1, 0\}, \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 \leq 0\}, \\ C(\underline{\Delta}_-, v_1) &= \{\bar{\lambda}_1 \leq \min\{\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, 0\}, \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 \leq 0\}, \end{aligned}$$

などで与えられる. 多面体分割 $\underline{\Delta}_+$ は 3 つの面 $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$, 6 つの辺 $\{\Delta_{12}, \dots, \Delta_{30}\}$ および 4 つの頂点 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ からなり, Lafforgue 扇の錘は

$$\begin{aligned} C(\underline{\Delta}_-, \Delta_1) &= \{\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = 0, \bar{\lambda}_1 \geq 0\}, \\ C(\underline{\Delta}_-, \Delta_{10}) &= \{\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 \leq 0, \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 \geq 0\}, \\ C(\underline{\Delta}_-, \Delta_{23}) &= \{\bar{\lambda}_1 = 0, \bar{\lambda}_2 \geq 0, \bar{\lambda}_3 \leq 0\}, \\ C(\underline{\Delta}_-, v_0) &= \{\min\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\} \leq 0\}, \\ C(\underline{\Delta}_-, v_1) &= \{\bar{\lambda}_1 \leq \min\{\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, 0\}, \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 \geq 0\}, \end{aligned}$$

などで与えられる. 全体として, Lafforgue 扇 $\tilde{\mathcal{F}}(A)$ は 7 つの 3 次元錐を持つ. そのうち 3 つは $\mathbb{P}^2/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ のトーラス固定点に, 4 つは 3 枚の \mathbb{P}^2 の合併のトーラス固定点に対応する. Laurent 多項式 (5.6) は

$$W = a_0 + a_1x + a_2y + \frac{a_3}{xy}, \quad (7.3)$$

で与えられ, その判別式は

$$\Delta = a_0^3 + 27a_1a_2a_3$$

である. 2 次多面体は

$$\Sigma(A) = \text{Conv}\{(3, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}$$

であり, その法扇は確かに 2 次扇 $\mathcal{F}(\Sigma)$ と一致している. 2 次スタックの稠密トーラスの座標は

$$\nu = \frac{a_1a_2a_3}{a_0^3}, \quad (7.4)$$

で与えられる.

3 次曲線の Hesse 鉛筆は

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + \mu XYZ = 0 \quad (7.5)$$

で与えられる. この鉛筆の基点は 9 点の変曲点からなり, ここで爆発することによって塩田の楕円モジュラー曲面 $S(3) \rightarrow X(3)$ を得る [Shi72]. ここで, $X(3)$ は $\mathbb{H}/\Gamma(3)$ に 4 つの尖点を付け加えることによって得られるモジュラー曲線であり, それぞれの尖点の上には I_3 型の特異ファイバーが乗る. 9 本の例外曲線は 9 本の切断を与え, これが各ファイバー上で位数 3 の捩点を与える. **Hesse 群 (Hessian group)** $G_{216} \cong SL_2(\mathbb{F}_3) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ は

$S(3) \rightarrow X(3)$ に同変に作用する. ここで, $SL_2(\mathbb{F}_3) = SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(3)$ かつ $PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$ である. $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ を 1 の原始 3 乗根とし,

$$([X : Y : Z], \mu) \mapsto ([\omega X : \omega^2 Y : Z], \mu), \quad (7.6)$$

$$([X : Y : Z], \mu) \mapsto ([X : Y : \omega Z], \omega\mu), \quad (7.7)$$

で生成される G_{216} の部分群を考える. 各 μ に対し, (7.3) の特殊化で得られる楕円曲線

$$x^2y + xy^2 + z^3 + \mu xyz = 0 \quad (7.8)$$

は (7.5) の (7.6) による商である:

$$x = \frac{X^2}{Y}, \quad y = \frac{Y^2}{X}, \quad z = Z, \quad \nu = \frac{1}{\mu^3}. \quad (7.9)$$

この写像によって, 各ファイバー上で部分群 $E[3]$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と同型な $E/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の部分群に移る. 底空間上の 2 点 μ と $\omega\mu$ は $\Gamma_0(3)$ 構造付き楕円曲線として同型になり, この作用による商をとることによって楕円モジュラー曲面 $S_0(3) \rightarrow X_0(3)$ を得る. モジュラー曲線 $X_0(3)$ は 2 つの尖点と, 位数 3 の固定化部分群を持つ点を 1 つ持つ.

8 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の対称 Hilbert モジュラー曲面に付随する K3 曲面

3 次元の反射的多面体は 4319 個あり, その中で頂点の個数が 5 のもの (すなわち, 対応する K3 曲面の族のパラメーターの個数が 2 になるもの) は 5 つある. [HNU] ではこのうちの 2 つを, 2 次スタックとトロイダルコンパクト化の観点から詳しく調べた. これらの族の一方は \mathbb{P}^1 上の \mathbb{P}^2 束 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ の反正準超曲面のミラーであり, もう一方は Picard 数が 1 で通常 2 重点を 1 つ持つトーリック Fano 多様体の小さな特異点解消の反正準超曲面のミラーである. これらの族の非常に一般のファイバーの Picard 格子と超越格子はそれぞれ

$$M = E_8 \perp E_8 \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T = U \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

および

$$M = E_8 \perp E_8 \perp \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = U \perp \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

である [Nag12]. 対応する格子偏極 K3 曲面のモジュライ空間 \mathcal{M} は, 前者では $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に付随した対称 Hilbert モジュラー曲面になり, 後者ではモジュラー曲線の直積を適当な

群で割ったものになる．2次スタックは族のパラメーター空間のコンパクト化を与えるが，これとモジュライ空間のトロイダルコンパクト化の関係が [HNU] の主定理であり，Hilbert モジュラー曲面の場合は次のようになる．

定理 8.1 ([HNU, Theorem 1.1]). 周期写像は Deligne-Mumford スタックの同型

$$\tilde{\Pi} : \tilde{X}_{\mathcal{F}(A)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\Sigma} \quad (8.3)$$

を与える．ここで， $\tilde{X}_{\mathcal{F}(A)} \rightarrow X_{\mathcal{F}(A)}$ は $X_{\mathcal{F}(A)}$ 上の一点で重み $(1, 3)$ の重み付き爆発を行った後，判別式にそって位数 2 のルート構成を行ったものである．また， \mathcal{M}_{Σ} は，周期写像のモノドロミーで定まる扇 Σ による \mathcal{M} のトロイダルコンパクト化に自然な軌道体の構造を入れたものである．

ここで，**ルート構成 (root construction)** は因子にそって固定化部分群を導入する手法である [AGV08, Cad07]．佐竹-Baily-Borel コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_0$ のただ一つの尖点の逆像は 2 つのトーリック因子の合併であり，その交点は**極大退化点 (maximally unipotent monodromy point)** である．これらの因子の周りでのモノドロミー対数 N は $N^2 \neq 0$ および $N^3 = 0$ を満たし，K3 曲面が III 型の退化をしていることが分かる．周期写像の有理写像としての記述は [Nag12] で得られているが，定理 8.1 ではさらに

- 2次スタック [Laf03, Hac, DKK] を用いてパラメーター空間をコンパクト化し，
- [Iri11] を用いて周期写像のモノドロミーをミラーの接続層の導来圏の自己同値の言葉で記述し，
- そのモノドロミーを用いてモジュライ空間のトロイダルコンパクト化を行い，
- 周期写像をコンパクトなスタックの間の写像として記述した．

定理 8.1 の動機は，対数幾何を用いた K3 曲面のモジュライ空間のコンパクト化 [Ols04] や対数的 Hodge 理論 [KU09] と，日増しに高まるミラー対称性における対数幾何の重要性 (例えば [ACG⁺, Gro] やこの講究録における臼井氏の論説を参照) にある．

8.1 2次スタック

図 8.1 にある 5 頂点の反射的多面体を $\Delta = \text{Conv}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ とおくと，

$$\beta = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

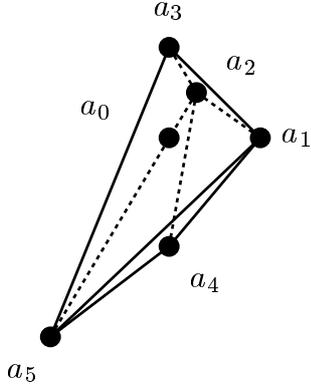


図 8.1 5 頂点の反射的多面体 Δ

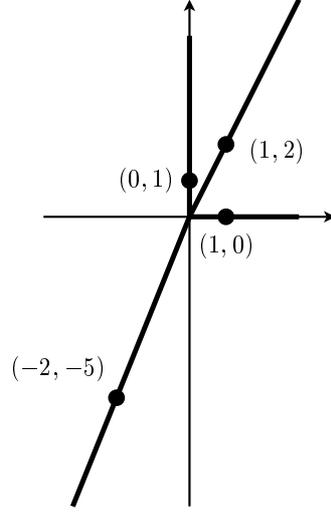


図 8.2 2 次扇 $\mathcal{F}(A)$

である．因子列 (5.4) に表れる準同型 $\mathbb{Z}^{n+r} \rightarrow \mathbb{L}^V$ を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

となり，2 次扇は図 8.2 のようになる．Laurent 多項式の空間は

$$\mathbb{C}^{A_0} = \left\{ W = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + \frac{a_4}{z} + \frac{a_5}{xyz^2} \right\} \quad (8.6)$$

で与えられる．2 次スタック $X_{\mathcal{F}(A_0)}$ の稠密トーラス $\mathbb{L}_{\mathbb{C}^\times}^V$ は

$$\lambda = \frac{a_3a_4}{a_0^2}, \quad (8.7)$$

$$\mu = \frac{a_1a_2a_3^2a_5}{a_0^5} \quad (8.8)$$

を用いて $\text{Spec } \mathbb{C}[\lambda^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}]$ と書ける．2 次スタック $X_{\mathcal{F}(A)}$ は $\mathbb{P}(1, 2, 5)$ を重み付き爆発することによって得られ，爆発する前の $\mathbb{P}(1, 2, 5)$ の斉次座標は

$$[\nu : \lambda : \mu] = [a_0 : a_3a_4 : a_1a_2a_3^2a_5] \quad (8.9)$$

で与えられる．判別式は

$$\begin{aligned} \Delta = & a_4^2a_0^6 + 4a_1a_2a_5a_0^5 - 12a_3a_4^3a_0^4 - 50a_1a_2a_3a_4a_5a_0^3 \\ & + 48a_3^2a_4^4a_0^2 + 1000a_1a_2a_3^2a_4^2a_5a_0 - 64a_3^3a_4^5 + 3125a_1^2a_2^2a_3^2a_5^2. \end{aligned} \quad (8.10)$$

であり，これは斉次座標では

$$\lambda^2\nu^6 + 4\mu\nu^5 - 12\lambda^3\nu^4 - 50\lambda\mu\nu^3 + 48\lambda^4\nu^2 + 1000\lambda^2\mu\nu - 64\lambda^5 + 3125\mu^2 \quad (8.11)$$

と書ける．判別式 ∇ の Horn-Kapranov 一意化 $h : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{L} \otimes \mathbb{C}^\times, [\lambda_1 : \lambda_2] \mapsto (\lambda, \mu)$ は

$$\lambda = \frac{\lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{(2\lambda_1 + 5\lambda_2)^2}, \quad (8.12)$$

$$\mu = -\frac{\lambda_2^3(\lambda_1 + 2\lambda_2)^2}{(2\lambda_1 + 5\lambda_2)^5} \quad (8.13)$$

で与えられる．

8.2 周期領域

M を (8.1) で与えられた格子とするととき， M 偏極 K3 曲面のモジュライ空間は対称 Hilbert モジュラー曲面と次のようにして同一視される．実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数環を \mathcal{O} とおく．Hilbert モジュラー群 $PSL_2(\mathcal{O})$ は上半平面 2 つの直積 $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ に

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}, \frac{\alpha' z_1 + \beta'}{\gamma' z_1 + \delta'} \right), \quad (8.14)$$

で作用する．ここで， $(-)'$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ における共役である．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = WUW^T, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon^{-1} & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = (1 + \sqrt{5})/2 \quad (8.15)$$

なので，

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{D}^+, \quad (z_1, z_2) \mapsto (I_2 \oplus (W^T)^{-1}) \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ -1 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

は双正則写像を与える．この同一視の下で，格子の直交群 $PO^+(T)$ は Hilbert モジュラー群 $PSL_2(\mathcal{O})$ と置換

$$\tau : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \quad (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1) \quad (8.17)$$

で生成される．対称 Hilbert モジュラー曲面 $\mathbb{H} \times \mathbb{H} / \langle PSL_2(\mathcal{O}), \tau \rangle$ は Hirzebruch [Hir77] によって詳しく調べられた ([KKN89] も参照)．対称 Hilbert モジュラー形式のなす次数

付き環 $\mathfrak{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ は、重みが 2, 6, 10, 15 の元 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ で生成され、その関係式は重みが 30 の式

$$\mathfrak{M} = \mathbb{C}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}] / (144\mathfrak{D}^2 - \Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})), \quad (8.18)$$

$$\Delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = -1728\mathfrak{B}^5 + 720\mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} - 80\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + 64\mathfrak{A}^3(5\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}\mathfrak{C})^2 + \mathfrak{C}^3 \quad (8.19)$$

で生成される。従って、スタック $\overline{\mathcal{M}} = \text{Proj } \mathfrak{M} = [(\text{Spec } \mathfrak{M} \setminus \mathbf{0}) / \mathbb{C}^\times]$ は重み付き射影空間 $\mathbb{P}(2, 6, 10, 15)$ の 30 次超曲面になる。この超曲面は、重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1, 3, 5) = \text{Proj } \mathbb{C}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ から、 Δ で定義される因子に沿った 2 次のルート構成で得られ、尖点は唯一つの点 $[\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}] = [1 : 0 : 0]$ からなる。

M 偏極 K3 曲面の族の Weierstrass モデルは

$$z^2 = x^3 - 4(4y^3 - 5\mathfrak{A}y^2)x^2 + 20\mathfrak{B}xy^3 + \mathfrak{C}y^4 \quad (8.20)$$

で与えられる [Nag13]。この族の 2 つのファイバーが M 偏極 K3 曲面として同型であるための必要十分条件は、ある $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ に対して $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}') = (\alpha\mathfrak{A}, \alpha^3\mathfrak{B}, \alpha^5\mathfrak{C})$ となることである。

8.3 周期写像

周期写像 $X_{\mathcal{F}(A_0)} \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 3, 5)$ を、2 次スタック $X_{\mathcal{F}(A_0)}$ を重み付き収縮して得られる $\mathbb{P}(1, 2, 5)$ から \mathcal{M}^* の粗モジュライ空間である $\mathbb{P}(1, 3, 5)$ への有理写像

$$\mathbb{P}(1, 2, 5) \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 3, 5) \quad (8.21)$$

として書くと

$$[\nu : \lambda : \mu] \mapsto [\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}] = \left[\lambda - \frac{\nu^2}{4} : \frac{25}{2}\nu\mu : -3125\mu^2 \right] \quad (8.22)$$

となる [Nag12, Theorem 6.2]。この有理写像は $[\nu : \lambda : \mu] = [1 : 1/4 : 0]$ を不確定点に持つ。この不確定点はイデアル $(\lambda - \nu^2/4, \mu)$ に沿った重み (1, 3) の重み付き爆発によって除去され、その結果として、因子 $\{\mu = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 2, 5)$ の厳密変換を尖点 $[1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}(1, 3, 5)$ に潰す重み (1, 2) の重み付き収縮を得る。この様子を図 8.3 に表す。周期写像 (8.22) によって (8.19) と (8.11) が一致する事が直接計算によって容易に確かめられる。一方、重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1, 3, 5)$ の自己同型は

$$[x : y : z] \mapsto [ax : by + cx^3 : dz + exy + fx^5] \quad (8.23)$$

の形の重み付き射影変換たちからなるが、この中で判別式多様体を判別式多様体に移すものは恒等写像しか無いことも容易に分かる。

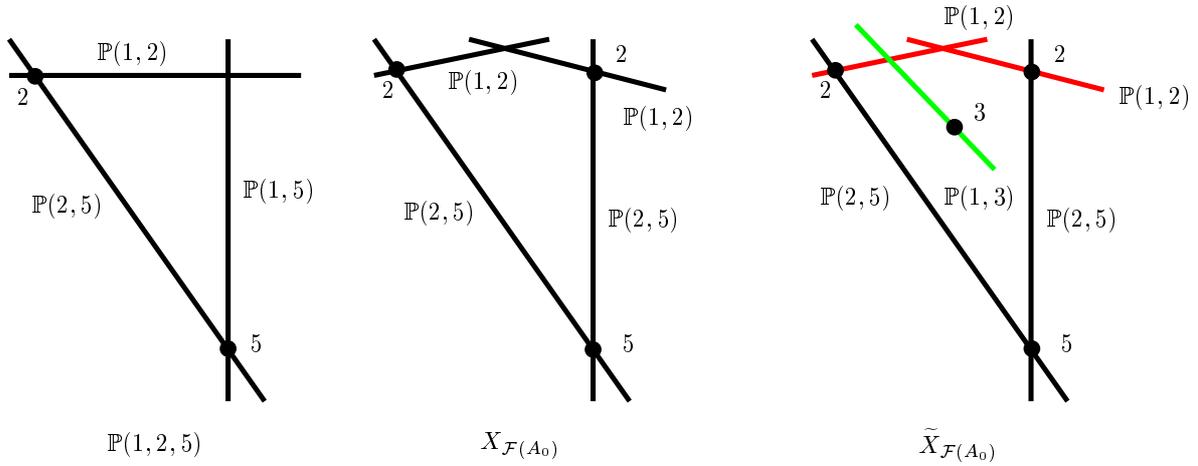


図 8.3 パラメーター空間の双有理変換

8.4 ミラー対称性とモノドロミー

Δ の極多面体は

$$\check{\Delta} = \text{Conv} \{(0, -1, 1), (4, -1, -1), (-1, -1, -1), (-1, -1, 1), ((-1, 4, -1), (-1, 0, 1)\}$$

で与えられる. トーリック多様体 \check{X} は \mathbb{P}^2 上の \mathbb{P}^1 束 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ となる Fano 多様体である. ミラー族 $\check{\mathfrak{Y}}$ の非常に一般のファイバーの Picard 格子は次の Noether-Lefschetz 型定理により容易に求まる:

定理 8.2 ([Moi67, Theorem 7.5]). V を滑らかな 3 次元射影多様体とし, $\iota: E \hookrightarrow V$ を非常に一般の超平面切断とする. この時, $\iota^*: \text{Pic}(E) \rightarrow \text{Pic}(V)$ が全射であるための必要十分条件は, 次のいずれかが成り立つことである:

1. Betti 数が $b_2(V) = b_2(E)$ を満たす.
2. Hodge 数が $h^{2,0}(E) > h^{2,0}(V)$ を満たす.

ここから

$$M_{\Delta_0} = \text{Pic } Y_0 = E_8 \perp E_8 \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

$$M_{\Delta_0}^\perp = U \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (8.25)$$

$$M_{\check{\Delta}_0} = \text{Pic } \check{Y}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

$$M_{\check{\Delta}_0}^\perp = U \perp E_8 \perp E_8 \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

となり、予想 3.1 がこの場合に成り立つことが分かる。

\check{X} のネフ錐は $2D_1 + D_4$ と D_1 で生成されている。ここで、 D_1 と D_4 はそれぞれ v_1 と v_4 で生成される 1 次元錐に対応するトーリック因子である。 $2D_1 + D_4$ と D_1 の \check{Y} への制限を E_1 および E_2 とおく。対応する $H_{\text{amb}}^2(\check{Y}, \mathbb{C}^\times)$ の巨大体積極限の近傍での座標 (q_1, q_2) は 2 次スタックの稠密トーラス $\mathbb{L}_{\mathbb{C}^\times}^\vee \subset X_{\mathcal{F}(A_0)}$ の座標 (λ, μ) と

$$q_1 = \lambda, \quad (8.28)$$

$$q_2 = \frac{\mu}{\lambda^2} \quad (8.29)$$

によって同一視される。 \check{Y} の代数格子は $\mathcal{N}(\check{Y}) \cong U \perp N$ と書かれる。ここで、双曲平面 $U = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}f$ は $e = [\mathcal{O}_p]$ と $f = -[\mathcal{O}_{\check{Y}}] - [\mathcal{O}_{E_1}] + 3[\mathcal{O}_{E_2}]$ で生成されている。直交補空間 $N \cong \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ は $e_1 = [\mathcal{O}_{E_1}]$ と $e_2 = [\mathcal{O}_{E_2}]$ で生成されており、Picard 格子 $\text{NS}(\check{Y})$ と同型になる。 N の直交群は 2 つの元で生成されている：

$$O^+(N) = \langle g_1, g_2 \rangle, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.30)$$

2 つのループ $(q_1, q_2) \mapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}}q_1, q_2)$ と $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, e^{2\pi\sqrt{-1}}q_2)$ に沿ったモノドロミー T_1 と T_2 は (6.4) によってそれぞれ $\mathcal{O}(-E_1) \otimes (-)$ と $\mathcal{O}(-E_2) \otimes (-)$ で与えられる。 $\varphi_{e, \bullet}: N \hookrightarrow O(\mathcal{N}(\check{Y}))$ を (4.25) で与えられる埋め込みとした時、

$$T_1 = \varphi_{e, e_1}, \quad (8.31)$$

$$T_2 = \varphi_{e, e_2}, \quad (8.32)$$

となることが直接計算によって容易に確かめられる。

図 8.4 にあるように、 e_1 と e_2 を $O^+(N)$ 作用で移して得られる元たちが生成する半直線を 1 次元錐とするような $N_{\mathbb{R}}$ 内の扇を Σ とおく。対応するトーリック多様体 X_Σ は、

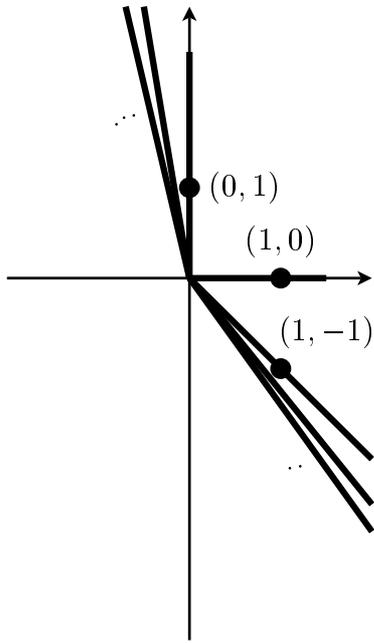


図 8.4 扇 Σ

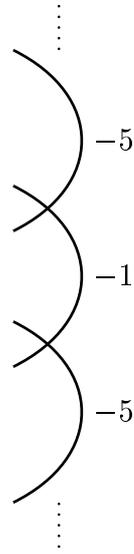


図 8.5 トーリック多様体 X_Σ

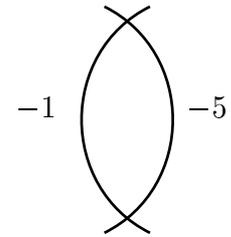


図 8.6 商多様体 X_Σ/C_1

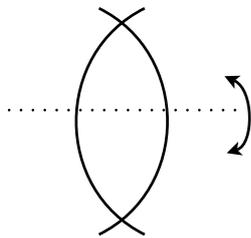


図 8.7 C_2 の作用

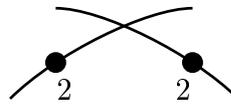


図 8.8 商多様体 $X_\Sigma/O^+(N)$

図 8.5 にある (-1) 直線と (-5) 直線が交互に並んだ長さが無限の鎖を $(\mathbb{C}^\times)^2$ の境界に付け加えて得られる。周期領域のトロイダルコンパクト化は尖点の近傍を X_Σ の境界の近傍に取り替えることによって得られる。 X_Σ には $O^+(N)$ が自然に作用するが、商空間 $X_\Sigma/O^+(N)$ は、 X_Σ を g_1 で生成される無限巡回群 $C_1 \triangleleft O^+(N)$ で割り、次に $[g_2]$ で生成される位数 2 の巡回群 $C_2 = O^+(N)/C_1$ で割ることによって得られる。 g_1 の Σ への作用は 1 次元錐をその 2 つ隣の 1 次元錐に移すので、トーリック多様体 X_Σ をこの作用で割ったものの境界は、 (-1) 曲線と (-5) 曲線を図 8.6 にあるように輪のように繋げたものになる。商群 C_2 の X_Σ/C_1 への作用は、この輪を水平線にそって図 8.7 のようにひっくり返すので、これによる商は図 8.8 にあるような重み付き射影直線 $\mathbb{P}(1, 2)$ の鎖になる。これらの射影直線の法束は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2)}(-1)$ および $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2)}(-5)$ となる。これらを順番に潰す

ことによって、滑らかな点を得られるが、これがちょうど佐竹-Baily-Borel コンパクト化 $\mathbb{P}(1, 3, 5)$ の尖点 $[1 : 0 : 0]$ になっている。

参考文献

- [ACG⁺] Dan Abramovich, Qile Chen, Danny Gillam, Yuhao Huang, Martin Olsson, Matthew Satriano, and Shenghao Sun, *Logarithmic geometry and moduli*, arXiv:1006.5870.
- [AGV08] Dan Abramovich, Tom Graber, and Angelo Vistoli, *Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 5, 1337–1398. MR 2450211 (2009k:14108)
- [AM97] Paul S. Aspinwall and David R. Morrison, *String theory on K3 surfaces*, Mirror symmetry, II, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 703–716. MR 1416354 (97i:81128)
- [Bat94] Victor V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535. MR MR1269718 (95c:14046)
- [BCFKvS98] Victor V. Batyrev, Ionuț Ciocan-Fontanine, Bumsig Kim, and Duco van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmannians*, Nuclear Phys. B **514** (1998), no. 3, 640–666. MR MR1619529 (99m:14074)
- [BH93] Per Berglund and Tristan Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Phys. B **393** (1993), no. 1-2, 377–391. MR MR1214325 (94k:14031)
- [BHPVdV04] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven, *Compact complex surfaces*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2030225 (2004m:14070)
- [Cad07] Charles Cadman, *Using stacks to impose tangency conditions on curves*, Amer. J. Math. **129** (2007), no. 2, 405–427. MR 2306040 (2008g:14016)
- [CK99] David A. Cox and Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geom-*

- etry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR MR1677117 (2000d:14048)
- [DKK] Colin Diemer, Ludmil Katzarkov, and Gabriel Kerr, *Symplectomorphism group relations and degenerations of Landau-Ginzburg models*, arXiv:1204.2233.
- [Dol96] I. V. Dolgachev, *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, J. Math. Sci. **81** (1996), no. 3, 2599–2630, Algebraic geometry, 4. MR 1420220 (97i:14024)
- [GKZ94] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994. MR MR1264417 (95e:14045)
- [GP90] B. R. Greene and M. R. Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nuclear Phys. B **338** (1990), no. 1, 15–37. MR MR1059831 (91h:32018)
- [Gro] Mark Gross, *Mirror symmetry and the Strominger-Yau-Zaslow conjecture*, arXiv:1212.4220.
- [Hac] Paul Hacking, *Compact moduli of hyperplane arrangements*, arXiv:math/0310479.
- [Hir77] F. Hirzebruch, *The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields in small discriminant*, Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), Springer, Berlin, 1977, pp. 287–323. Lecture Notes in Math., Vol. 627. MR 0480355 (58 #523)
- [HNU] Kenji Hashimoto, Atsuhira Nagano, and Kazushi Ueda, *Modular surfaces associated with toric K3 hypersurfaces*, arXiv:1403.5818.
- [Hor89] J. Horn, *Ueber die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen*, Math. Ann. **34** (1889), no. 4, 544–600. MR 1510591
- [Hor05] R. Paul Horja, *Derived category automorphisms from mirror symmetry*, Duke Math. J. **127** (2005), no. 1, 1–34. MR 2126495 (2006a:14023)
- [Iri09] Hiroshi Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds*, Adv. Math. **222** (2009), no. 3, 1016–1079. MR 2553377 (2010j:53182)

- [Iri11] ———, *Quantum cohomology and periods*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 7, 2909–2958. MR 3112512
- [Kap91] M. M. Kapranov, *A characterization of A -discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map*, Math. Ann. **290** (1991), no. 2, 277–285. MR 1109634 (92j:14066)
- [KKN89] Ryoichi Kobayashi, Keiko Kushibiki, and Isao Naruki, *Polygons and Hilbert modular groups*, Tohoku Math. J. (2) **41** (1989), no. 4, 633–646. MR 1025329 (91f:11035)
- [Kon98] Maxim Kontsevich, *Lectures at ENS Paris, spring 1998*, set of notes taken by J. Bellaïche, J.-F. Dat, I. Martin, G. Rachinet and H. Randriambololona, 1998.
- [KSZ91] M. M. Kapranov, B. Sturmfels, and A. V. Zelevinsky, *Quotients of toric varieties*, Math. Ann. **290** (1991), no. 4, 643–655. MR 1119943 (92g:14050)
- [KSZ92] ———, *Chow polytopes and general resultants*, Duke Math. J. **67** (1992), no. 1, 189–218. MR 1174606 (93e:14062)
- [KU09] Kazuya Kato and Sampei Usui, *Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures*, Annals of Mathematics Studies, vol. 169, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2465224 (2009m:14012)
- [Laf03] L. Lafforgue, *Chirurgie des grassmanniennes*, CRM Monograph Series, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 1976905 (2004k:14085)
- [Moï67] B. G. Moïšezon, *Algebraic homology classes on algebraic varieties*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 225–268. MR 0213351 (35 #4215)
- [Nag12] Atsuhira Nagano, *Period differential equations for the families of $K3$ surfaces with two parameters derived from the reflexive polytopes*, Kyushu J. Math. **66** (2012), no. 1, 193–244. MR 2962398
- [Nag13] ———, *A theta expression of the Hilbert modular functions for $\sqrt{5}$ via the periods of $K3$ surfaces*, Kyoto J. Math. **53** (2013), no. 4, 815–843. MR 3160602
- [Ols04] Martin C. Olsson, *Semistable degenerations and period spaces for po-*

- larized K3 surfaces*, Duke Math. J. **125** (2004), no. 1, 121–203. MR 2097359 (2005j:14056)
- [Shi72] Tetsuji Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 20–59. MR 0429918 (55 #2927)
- [SYZ96] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1-2, 243–259. MR MR1429831 (97j:32022)