ダイマーと藻類

大阪大学大学院理学研究科　植田 一石 (Kazushi Ueda)
Graduate School of Science,
Osaka University

ダイマー (dimer) は化学における二量体を指す．ダイマーや極性のある分子の統計力学的な模型として 2 色グラフとその上のダイマー配置が長年にわたって研究され、様々な対象と関わりのある興味深い問題であることが知られている．詳しくは本講究録の高崎金久氏の解説や [14] を参照されたい．近年、ダイマー模型と超弦理論との関わりが見い出され、一部の理論物理学者の興味を引いている．その中で注目すべきなのは Okounkov らによる Gromov–Witten/Donaldson–Thomas 対応、および Hanany らによる AdS/CFT 対応の文脈での箙ゲージ理論 (quiver gauge theory) の研究であろう．一方、藻類 (alga) は理論物理学者の Feng, He, Kennaway および Vafa によって [4] で導入された概念であり、Gelfand, Kapranov および Zelevinsky によって [5] で導入されたアメーバ (amoeba) と密接に関係している．また、同じものが Passare や Tsikh らによってコアメーバ (coamoeba) と呼ばれ、Feng ら以前から研究されていたようである．今回はこれらの話題およびそれに関連した東京大学大学院理学研究科の山崎雅人氏と筆者の共同研究 [12, 13] について解説したい．

1　アメーバとトロピカル超曲面

アメーバは Gelfand, Kapranov および Zelevinsky によって [5] で導入された概念であり、代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ の部分多様体の対数写像

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Log}: & (\mathbb{C}^\times)^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & \cup & & \cup \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (\log|x_1|, \dots, \log|x_n|) \end{array}$$

による像を指す．ここで n は正の自然数である．彼らがアメーバを導入した動機は超幾何級数の研究への応用にあると思われるが、それ以外にも、Hilbert の第 16 問題を始めとする実代数幾何の問題や、近年注目を集めているトロピカル幾何、そして超弦理論やダイマーを始めとする数理物理などへの応用を持つ興味深い対象である．

トーラスの部分多様体としては、Laurent 多項式

$$W(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

の零点集合として定まる超曲面 $W^{-1}(0)$ が基本的である．上の Laurent 多項式 W に対しその **Newton 多面体（Newton polytope）**が、$a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0$ となるような $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ の集合の凸包として定義される．

例として、$n = 2$ で Newton 多角形が $(0, 1)$, $(1, 0)$ と $(-1, -1)$ の凸包（図 1 を見よ）で与えられるような Laurent 多項式の零点のアメーバを *Mathematica* を用いて計算したものを図 2 と

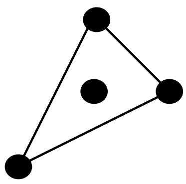
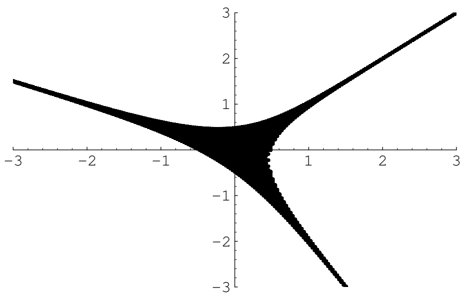


図 1: Newton 多角形



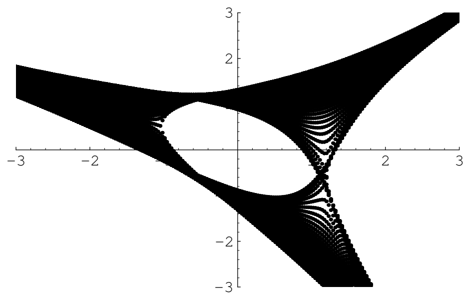


図 2: $W(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$ の零点のアメーバ 図 3: $W(x,y) = x+y+\frac{1}{xy}+3$ の零点のアメーバ

図 3 に示す． これらの図は $W^{-1}(0)$ の上の点を 10,000 個選び、それらの対数写像による像をプロットしたもので、図 3 において縞模様のようになっている部分はアメーバが実際に縞模様になっているのではなく、単にサンプルとして取った点の密度がその周辺で低くなっていることによる錯覚である．

さて、これらの図を見て気付くことが 2 つある．1 つは、アメーバのトポロジーは Newton 多角形のみからは定まらず、$W(x,y)$ の具体的な形に依存すること、そしてもう 1 つは、アメーバの「触手」は $W(x,y)$ の具体的な形に依らず、Newton 多角形の辺の外向き法線ベクトルの向きに伸びていることである．これは一般的な現象で、Laurent 多項式を与えたときにそのアメーバのトポロジーを決定することは非常に難しい問題であるが、触手の漸近的な振る舞いはその Newton 多角形のみから定まる簡単な記述を持つ．アメーバのトポロジーに関しては、例えば次のような予想があると筆者は August Tsikh 氏から聞いた：Laurent 多項式に対し、その Newton 多角形の頂点以外に対応する項の係数が全て零であれば、そのアメーバは単連結になる．

アメーバは生物（なまもの）であるが、これを熱帯に持って行って乾燥させることにより、その骨格 (spine) を取り出すことができる．熱帯というと湿度が高そうなイメージがあるが、日差しが強いので、日向に置いておけばアメーバはたちまち乾燥するのである．これをトロピカル曲線 (tropical curve) と言い、数学的には対数写像の底として e ではなく正の実数 t を取って、超離散的極限 $t \to \infty$ を考えることによって得られる．[1]

もう少し詳しく説明しよう．$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}((t^{1/n}))$ を $\mathbb{C}((t))$ の代数閉包とする．K の元 $g = \sum_{a \in \mathbb{Q}} g_a t^a$ に対し、

$$|g| = \exp(-\min\{a \in \mathbb{Q} \mid g_a \neq 0\})$$

[1] こんなことをすると多様体愛護協会 (http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜kawazumi/spcm.html) からお叱りを受けそうだが、私はこれまで多様体を、変形したり爆発したりといった虐待行為によって調べてきた経緯もあり、そんなことは気にならないのである．

とおくと、$|\cdot|$ は次の公理を満たす：

$$\begin{aligned} |g| &= 0 \quad \text{if and only if } g = 0, && (1) \\ |gh| &= |g||h|, && (2) \\ |g+h| &\leq \max\{|g|, |h|\}. && (3) \end{aligned}$$

これらの公理を満たす写像 $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ を K の**非アルキメデス的ノルム**と言う．K 係数の Laurent 多項式 $W(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ に対し、$W^{-1}(0) \subset (K^\times)^n$ の

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Log}: & (K^\times)^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & \cup & & \cup \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (\log|x_1|, \ldots, \log|x_n|) \end{array}$$

による像を $W^{-1}(0)$ の**非アルキメデス的アメーバ (non-Archimedean amoeba)** と呼ぶ．

一方、トロピカル曲線は次のようにして定義される．まず、$\mathbb{R}$ にトロピカル加法 $\oplus$ とトロピカル乗法 $\odot$ を

$$\begin{aligned} a \oplus b &:= \max\{a, b\}, \\ a \odot b &:= a + b \end{aligned}$$

で導入したものをトロピカル半環（または max-plus 代数）という．上で与えられた Laurent 多項式 W に対し、対応するトロピカル多項式を

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{trop}}(x_1, \ldots, x_n) &= \bigoplus_{i_1, \ldots, i_n} \log|a_{i_1, \ldots, i_n}| \odot x_1^{\odot i_1} \odot \cdots \odot x_n^{\odot i_n} \\ &= \max_{i_1, \ldots, i_n} \{\log|a_{i_1, \ldots, i_n}| + i_1 x_1 + \cdots + i_n x_n\} \end{aligned}$$

で定義する．W_{trop} は $\mathbb{R}^n$ 上の区分線形関数を定めるが、この関数が微分不可能な点の集合の $\mathbb{R}^n$ における閉包を W_{trop}（または W）の定める**トロピカル超曲面**と呼ぶ．次の定理は Einsiedler、Kapranov および Lind による：

定理 1 ([2, Theorem 2.1.1]). $W \neq 0$ の時、W の定める非アルキメデス的アメーバとトロピカル超曲面は一致する．

例として、$W(x, y) = x + y + \frac{1}{xy} + 3 = 0$ と $W(x, y) = x + y + \frac{1}{xy} + t = 0$ に対するトロピカル曲線を図 4 と図 5 に与える．例えば図 5 は $\max\{x, y, -x-y, 1\}$ という関数が微分不可能な点を表している．

さて、アメーバとトロピカル曲線の関係は次のようなものである：正の実数 t が与えられたとき、実数の集合 $\mathbb{R}$ に新しい加法 $\oplus_t$ と乗法 $\odot_t$ を

$$\begin{aligned} x \oplus_t y &= \log_t(t^x + t^y) \\ x \odot_t y &= x + y \end{aligned}$$

で定義すると、正の実数でパラメトライズされた半環の族ができる．しかも、任意の t に対しこの半環は $x \mapsto t^x$ によって正の実数のなす半環 $\mathbb{R}_+$ と同型であるが、$t \to \infty$ において

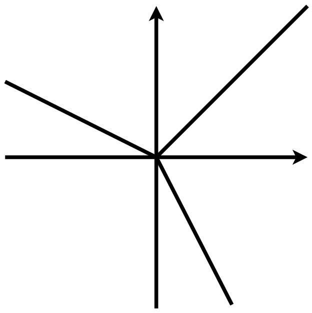


図 4: $W(x,y) = x+y+\frac{1}{xy}+3$ に対する $W^{-1}(0)$ の非アルキメデス的アメーバ

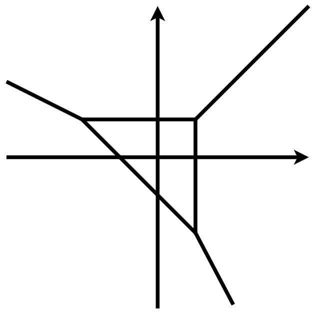


図 5: $W(x,y) = x+y+\frac{1}{xy}+t$ に対する $W^{-1}(0)$ の非アルキメデス的アメーバ

$x \oplus_t y \to \max\{x,y\}$ なので、半環 $\mathbb{R}_+$ の「古典極限」としてトロピカル半環を得ることができる．これを Maslov の脱量子化（dequantization）と言う．

さて、$W_t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\dots,x_n^{\pm 1},t]$ に対し、$\mathrm{Log}_t(W_t^{-1}(0))$ は $t \to \infty$ で $W_t^{-1}(0) \subset (K^\times)^n$ の非アルキメデス的アメーバに Hausdorff 収束することが知られている（Mikhalkin [9], Rullgård）．ただし、$\mathbb{R}^n$ の部分集合の Hausdorff 収束は次の Hausdorff 距離によって定義される：

$$d(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(A,b)\}.$$

この事実をもって、**アメーバの超離散極限はトロピカル曲線である**と言う．例として、図 6 に $W(x,y) = x+y+\frac{1}{xy}+3 = 0$ の $(x,y) \mapsto (\log_t|x|, \log_t|y|)$ による像を、図 7 に $W(x,y) = x+y+\frac{1}{xy}+t = 0$ の同じ写像による像を示す．ここで、前者では W の定義方程式に t が現れないので、t を変えると単に図が縮小されるだけなのに対し、後者では W の定義方程式に t が現れるために、t を変えると像の相似類が変わることに注意．この図から、これらのアメーバがそれぞれ図 4 および図 5 にあるトロピカル曲線に近付いていることが見て取れる．

2　藻

アメーバは対数写像による $(\mathbb{C}^\times)^n$ の部分多様体の像であったが、ここで対数のかわりに偏角

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Log}: & (\mathbb{C}^\times)^n & \to & T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \\ & \cup & & \cup \\ & (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi}(\arg x_1,\dots,\arg x_n) \end{array} \tag{4}$$

を考えたものを藻 (alga) という．藻という言葉は Feng–He–Kennaway–Vafa によって [4] で導入されたのだが、同じ対象はそれ以前からコアメーバ (coamoeba) と呼ばれ、Passare や Tsikh などの数学者によって研究されていたようである．例として、Newton 多角形が図 1 で与えられるような Laurent 多項式の零点の藻を *Mathematica* を用いて計算したものを図 8 と 9 に示す．ここで、アメーバが綺麗になる右の $W(x,y)$ に対しては藻は綺麗にならない一方、アメーバがある意味で退化してしまう左の $W(x,y)$ に対して藻は非常に整った形をしていることに注意．この違いは、アメーバと藻が（複素の）対数写像による像をそれぞれ実部と虚部という違う方向へ射影したためであると考えられる．アメーバが実代数幾何に応用を持つことを考えれば、藻から見えるものは $W^{-1}(0)$ の「虚代数幾何」であると言えるかもしれない．

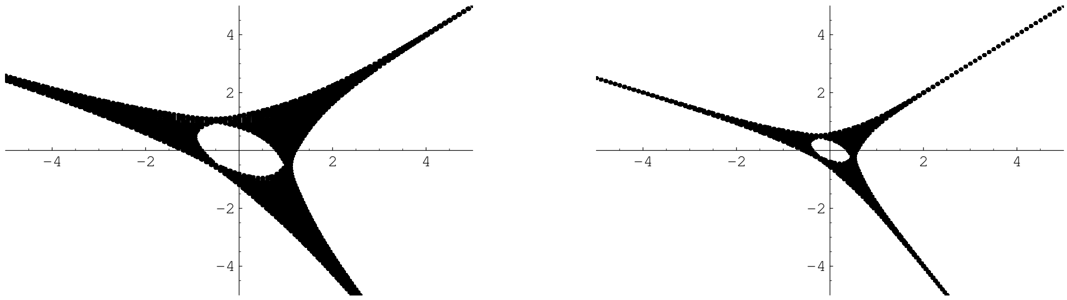


図 6: $W(x,y)=x+y+\frac{1}{xy}+3=0$ の $(x,y)\mapsto(\log_t|x|,\log_t|y|)$ による像 (左が $t=3$、右が $t=10$).

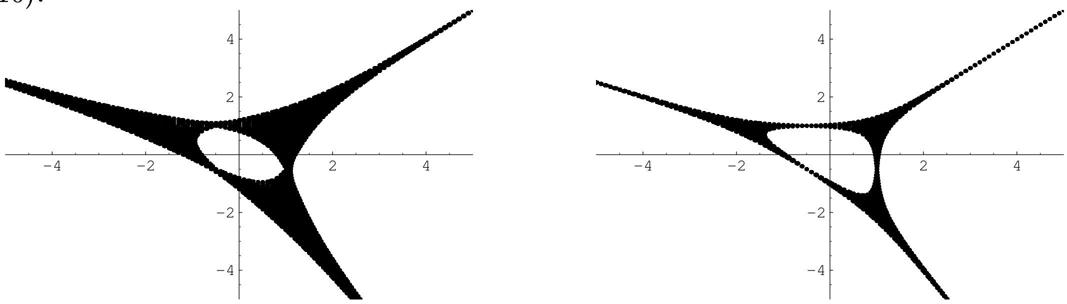


図 7: $W(x,y)=x+y+\frac{1}{xy}+t=0$ の $(x,y)\mapsto(\log_t|x|,\log_t|y|)$ による像 (左が $t=3$、右が $t=10$).

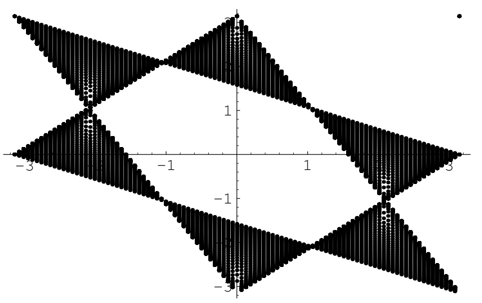


図 8: $W(x,y)=x+y+\frac{1}{xy}$ の零点の藻

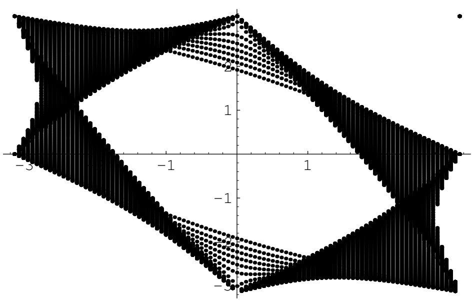


図 9: $W(x,y)=x+y+\frac{1}{xy}+3$ の零点の藻

さて、以下では $n=2$ に限定して藻の形について詳しく考察しよう．図 8 を見る限りでは $x+y+\frac{1}{xy}=0$ の藻の境界は直線からなるように見える．また、図 9 においては、藻の境界は直線と曲線からなるように見えるが、少なくとも図 8 の境界にあたる直線は図 9 の藻の閉包に含まれている．しかも、これらの直線の傾き $(1,1)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$ は対応するトロピカル曲線の触手の傾きと等しい．少し考えると、その理由は次のようなものであることが分かる．

W を 2 変数 Laurent 多項式、Δ をその Newton 多角形とする．Δ の辺 e に対し e の外向き法線ベクトルを $n_e \in \mathbb{Z}^2$ とおき、l_e を

$$\Delta = \bigcup_e \{m \in \mathbb{R}^2 \mid \langle n_e, m\rangle \le l_e\}$$

を満たす自然数とする．ここで、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積である．この時、e に関する W の主要項 W_e を

$$W_e(x,y) = \sum_{\langle n_e,(i,j)\rangle = l_e} a_{ij} x^i y^j$$

で定義する．実際、この項は

$$(x,y) = (r^{n_{e,1}}\mathbf{e}(\theta), r^{n_{e,2}}\mathbf{e}(\varphi)), \quad r \in \mathbb{R}_+ \text{ and } \theta,\varphi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

とおいて $r \to \infty$ という極限を取るときの主要項になっている；

$$W(x_1,x_2) = r^{l_e} \sum_{\langle n_e,(i,j)\rangle = l_e} a_{ij}\mathbf{e}(i\theta + j\varphi) + O(r^{l_e-1}).$$

但し、$n_e = (n_{e,1}, n_{e,2}) \in \mathbb{Z}^2$ および $\mathbf{e}(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ とおいた．

さて、W を適当にとって、Δ の任意の辺 e に対しその主要項 W_e が 2 項式であり、適当な $\alpha,\beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in M$ に対し

$$W_e(x,y) = \mathbf{e}(\alpha)x^{a_1}y^{b_1} + \mathbf{e}(\beta)x^{a_2}y^{b_2}$$

となっていると仮定しよう．すると、$(x,y) = (r^{n_{e,1}}\mathbf{e}(\theta), r^{n_{e,2}}\mathbf{e}(\varphi))$, $r \to \infty$ という極限において、W の零点は

$$\mathbf{e}(\alpha + a_1\theta + b_1\varphi) + \mathbf{e}(\beta + a_2\theta + b_2\varphi) = 0 \tag{5}$$

で与えられる．従って、この極限で (5) の解の偏角写像 (4) による像は

$$(\alpha-\beta) + (a_1-a_2)\theta + (b_1-b_2)\varphi = \frac{1}{2} \mod \mathbb{Z}. \tag{6}$$

で定義されるトーラス $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の直線に漸近する．この直線の傾きが辺 e の法線ベクトルで与えられることに注意．同様のことは W_e がより一般の形をしている場合にも成立する．このような直線を藻の漸近境界と呼ぶことにしよう．アメーバの触手の傾きが e の法線ベクトルで与えられるのも同様の理由である．

さて、藻の漸近境界が Newton 多角形の辺の法線で決まる向きを持った直線になることは分かったが、図 9 を見れば分かるように、一般に漸近境界は真の境界には一致しない．ところが、Newton 多角形 Δ が三角形の時には、漸近境界が真の境界に一致するような W が存在するのである．しかもこの時、漸近境界はトーラスを三角形と六角形に分割し、藻はそこに現れる三角形の内部と頂点からなる．さらに著しいことに、偏角写像はそれぞれの三角形の内部（の逆像）に制限すると微分同相写像になるのである．これらのことを定理として述べておこう：

定理 2. 格子三角形 Δ に対し、その頂点に対応する単項式の和を W_Δ とおく（従って、W_Δ は 3 つの項からなる Laurent 多項式である）．この時、Δ の面積の 2 倍を N とおくと、$W_\Delta^{-1}(0)$ の藻は偶数個の開三角形 $\{U_i\}_{i=1}^{2N}$ とその頂点 $\{I_i\}_{i=1}^{3N}$ の和集合になっており、しかも偏角写像はそれぞれの開三角形の逆像に制限すると微分同相を与える：

$$\operatorname{Arg}|_{\operatorname{Arg}^{-1}(U_i)} : \operatorname{Arg}^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \qquad \text{for } i = 1, \ldots, 2N.$$

一方、任意の $i = 1, \ldots, 3N$ に対し $\operatorname{Arg}^{-1}(I_i)$ は開区間と同相である．また、$W_\Delta^{-1}(0)$ の藻の漸近境界と真の境界は一致する．

さらに、$W_\Delta^{-1}(0)$ の藻の漸近境界は Δ の辺の外向き法線ベクトルで定まる向きを持つが、これがそれぞれの三角形 U_i, $i = 1, \ldots, 2N$ の境界に向きを定める（つまり、U_i の境界に沿って整合的になる）．そして、この向きが偏角写像を $\operatorname{Arg}^{-1}(U_i)$ に制限して得られる微分同相写像が向きを保つかどうかを決めている．隣接する（つまり、頂点を共有する）開三角形の境界には異なる向きが入ることが容易に分かるので、三角形の頂点の近傍における偏角写像の振る舞いは、図 10 にあるように捻ったリボンを射影している感じになる．

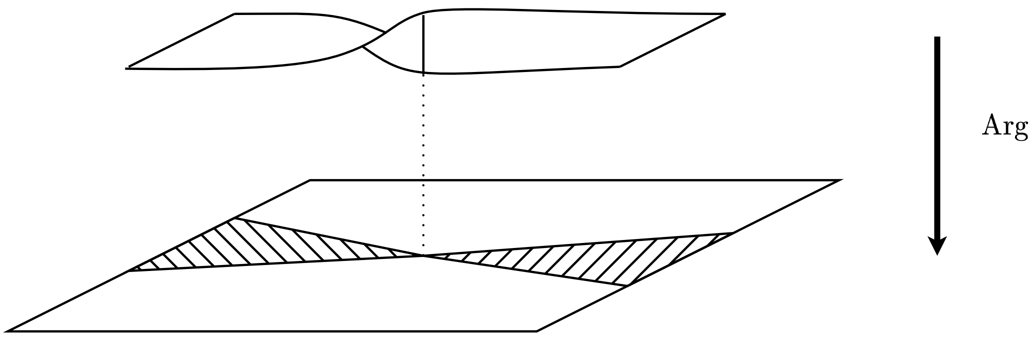


図 10: 藻の頂点付近での偏角写像の振る舞い

上の定理の証明について述べる前に、例をいくつか議論しよう．まず、最も単純な格子三角形として、$(0,0)$, $(1,0)$ および $(0,1)$ を頂点とする面積 $1/2$ の三角形 Δ_1 を考える（図 11）．この場合には

$$W_{\Delta_1}(x, y) = 1 + x + y$$

であり、$W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の漸近境界は (6) により

$$\begin{cases} \theta &= \dfrac{1}{2}, \\ -\theta + \varphi &= \dfrac{1}{2}, \\ \quad -\varphi &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

で与えられる．これを図示すると図 12 のようになり、定理 2 により $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の藻は図 13 で与えられる事が分かる．図 12 で漸近境界に描かれた矢印は Newton 多角形の外向き法線ベクトルから定まる向きを表している．この図を見ると、この漸近境界の向きが各三角形の境界に向

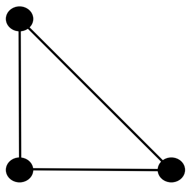


図 11: 最も簡単な三角形 Δ_1

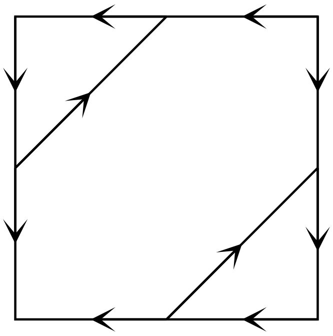


図 12: $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の藻の漸近境界

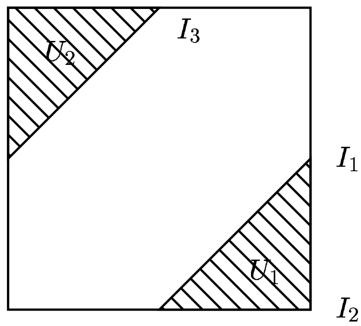


図 13: $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の藻

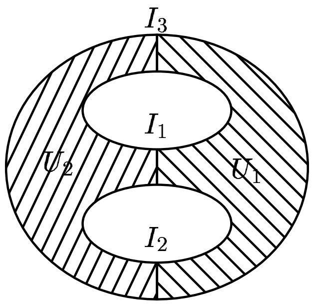


図 14: $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の形

きを定めており、しかも確かに隣接する三角形（といってもこの場合には全部で 2 つしか三角形はないが）には異なる向きを定めていることが分かる．偏角写像が三角形の頂点の近傍で図 10 のように振る舞うことから、図 13 と図 12 を見ることで $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ が位相的には U_1 と U_2 の頂点を線分にふくらませて、捻って繋ぎ合わせた図 14 のような曲面（穴の 3 つ開いた球面と同相）になることが分かる．実際、$W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ から x 平面への射影を考えると、これは単射で像は $\mathbb{C}^\times \setminus \{-1\} = \mathbb{P}^1 \setminus \{-1, 0, \infty\}$ になることが直ちに分かり、しかも U_1 および U_2 はそれぞれ上半平面及び下半平面に、また I_1, I_2 および I_3 は開区間 $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ および $(0, \infty)$ に対応していることもすぐに分かる．詳しくはこの節の後の議論を見よ．

さて、次にもう少しだけ複雑な例として、$(0,0)$, $(2,0)$ および $(0,1)$ を頂点とする三角形 Δ_2 の場合を考えよう（図 15）．この時

$$W_{\Delta_2}(x, y) = 1 + x^2 + y$$

であり、この場合の漸近境界は先ほどと同様にして

$$\begin{cases} 2\theta & = \dfrac{1}{2}, \\ -2\theta + \varphi & = \dfrac{1}{2}, \\ \quad -\varphi & = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

で与えられる事が分かる．これを（向きもいれて）図示すると図 16 のようになる．ここで先ほどと違い、(7) の一番上の式は 2 本の直線を定義することに注意．これは対応する Newton 図

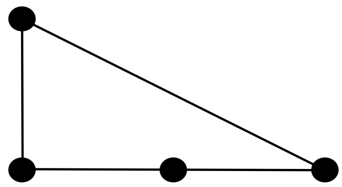


図 15: 三角形 Δ_2

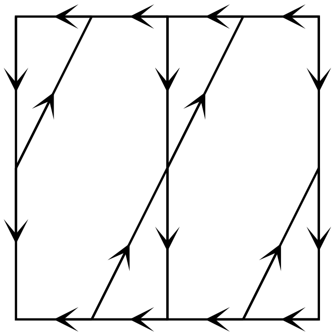


図 16: $W_{\Delta_2}^{-1}(0)$ の藻の漸近境界

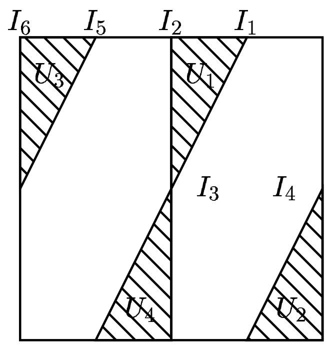


図 17: $W_{\Delta_2}^{-1}(0)$ の藻

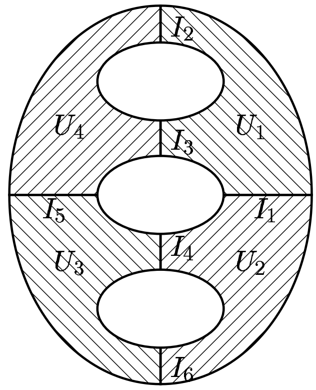


図 18: $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の形

形の辺が原始的でないことに由来している．対応する藻は図 17 で与えられ、これから先ほどと同じ手順で $W_{\Delta_2}^{-1}(0)$ の同相類（穴の 4 つ開いた球面になる．図 18 を参照）を決定することもできる．

さらに、これまでに何度か登場した

$$W(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

の場合を考えよう．これは図 19 で与えられる Δ_3 （$(1,0)$, $(0,1)$ および $(-1,-1)$ を頂点とする三角形）に対する W_{Δ_3} になっており、これまでと同じ手順で漸近境界と藻を求めるとそれぞれ図 20 および図 21 のようになる．この時 $W_{\Delta_3}^{-1}(0)$ は 3 つ穴の開いたトーラスになっており、その展開図を、藻のどの部分に写像されるかに注意して描くと図 22 のようになる．

さて、定理 2 は次のようにして証明される．$W^{-1}(0) \subset (\mathbb{C}^\times)^2$ は $W(x,y)$ に x と y の単項式をかけても変わらないので、$W(x,y)$ を構成する 3 つの項のうちの 1 つは 1 であると仮定しても良い（これは Newton 多角形を平行移動して 1 つの頂点を原点に持ってくることに対応している）．この時、

$$W(x,y) = 1 + x^a y^b + x^c y^d$$

と書いて、整数を成分とする行列を $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定義すると、$(0,0)$、(a,b) および (c,d) の凸包 Δ が三角形である（つまり、つぶれて直線になっていない）ことから $\det P \neq 0$ が成り立

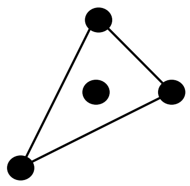


図 19: 三角形 Δ_3

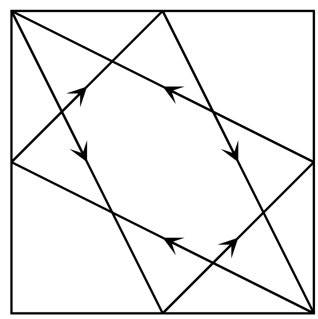


図 20: $W_{\Delta_3}^{-1}(0)$ の藻の漸近境界

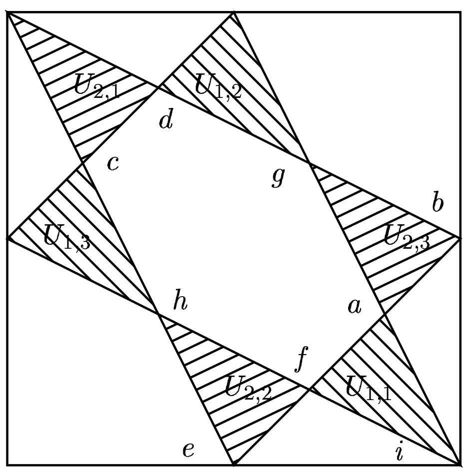


図 21: $W_{\Delta_3}^{-1}(0)$ の藻

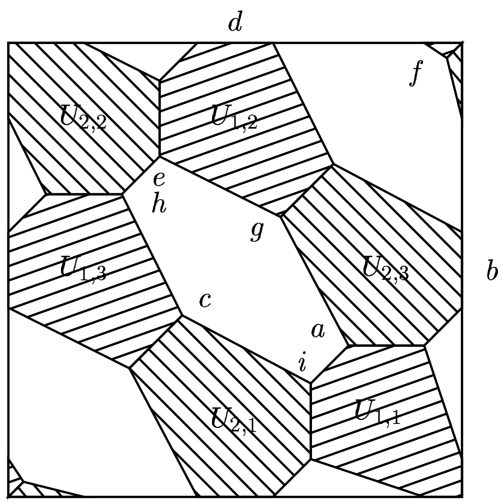


図 22: $W_{\Delta_3}^{-1}(0)$ の形

つ．さて、行列 P が定める $\mathbb{Z}^2$ から $\mathbb{Z}^2$ への線形写像も同じ P で表すと、これに $\mathbb{C}^\times$ をテンソルしたものは次の $(\mathbb{C}^\times)^2$ から $(\mathbb{C}^\times)^2$ への写像を定める：

$$\begin{array}{cccc} P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times : & (\mathbb{C}^\times)^2 & \to & (\mathbb{C}^\times)^2 \\ & \Cup & & \Cup \\ & (x, y) & \mapsto & (x^a y^b, x^c y^d). \end{array}$$

従って、$P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$ が偏角に引き起こす写像は $P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\bmod \mathbb{Z}$ で考えたもの $\overline{P}$ になる：

$$\begin{array}{cccc} \overline{P} : & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \\ & \Cup & & \Cup \\ & (\theta, \varphi) & \mapsto & (a\theta + b\varphi, c\theta + d\varphi). \end{array}$$

一方、定義から

$$W_\Delta(x, y) = W_{\Delta_1} \circ (P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times)(x, y)$$

なので、$W_\Delta^{-1}(0)$ の藻は $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の藻を $\overline{P}$ で引き戻したものになる：

$$\mathrm{Arg}(W_\Delta^{-1}(0)) = \overline{P}^{-1}(\mathrm{Arg}(W_{\Delta_1}^{-1}(0))).$$

このことから、定理 2 の証明は $\Delta = \Delta_1$ の場合に帰着される．そこで、$W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の藻や偏角写像の振る舞いを考察しよう．定義から

$$W_{\Delta_1}^{-1}(0) = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid y = -1 - x\}$$

である．従って、$\theta = \arg x$ を固定した時 x の取り得る値は $r > 0$ に対し $r \exp(\theta)$ であり、r に対して $\varphi = \arg y$ は一意的に決まる．ここで $0 < \theta < \pi$ の時には、r を 0 から無限大まで動かすと φ は狭義単調に増加し、

$$\lim_{r \to 0} \varphi = -\pi, \qquad \lim_{r \to \infty} \varphi = \theta - \pi$$

である．同様にして、$-\pi < \theta < 0$ の時には r を 0 から無限大まで動かすと φ は狭義単調に減少し、

$$\lim_{r \to 0} \varphi = \pi, \qquad \lim_{r \to \infty} \varphi = \theta + \pi$$

である．一方、$\theta = 0$ の時 φ は r の値によらず π であり、$\theta = \pi$ の時は $0 < r < 1$ の時 $\varphi = \pi$, $1 > r$ の時 $\varphi = 0$ である．このことから $W_{\Delta_1}^{-1}(0)$ の藻が図 13 で与えられることが分かり、定理 2 が証明される．

3　藻からブレーンによるタイル張りへ

まず言葉を少し準備をする．S を実 2 次元の滑らかな曲面とした時、S 上の**グラフ**とは S 上の有限個の点の集合 V とそれらを結ぶ曲線の集合 E の組 (V, E) を指す．ただし、S 上の**曲線**とは閉区間 $[0, 1]$ からの滑らかで単射な写像 $c : [0, 1] \to S$ の像 $c([0, 1])$ を指し、この時 $c([0, 1])$ は $c(0)$ と $c(1)$ を結んでいると言う．S 上のグラフ (V, E) に対し、V の元を**頂点**、E の元を**辺**と呼ぶ．**2 色グラフ**とは S 上のグラフで、頂点の集合 V が 2 つの部分集合 $B, W \subset V$ の非連

結和 $B \amalg W$ の形に書かれ、しかも任意の辺が B の元と W の元を結んでいるものを指す．この時、B の元を黒い頂点、W の元を白い頂点と呼ぶ．つまり、2 色グラフとは頂点が白と黒の 2 色に塗り分けられ、辺は必ず違う色の頂点を結んでいるようなものを指す（一般に、頂点の集合を上のような性質を持つ 2 つの部分集合の非連結和に分けることが出来るグラフを 2 部グラフ（bipartite graph）と呼ぶ．従って、2 色グラフは 2 部グラフの頂点の色分けを 1 つ指定したものを指す）.

さて、Δ を格子三角形とし、対応する Laurent 多項式 W_Δ の零点の藻 $\operatorname{Arg} W_\Delta^{-1}(0)$ を考える．藻の住んでいるトーラス $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の向きを適当に選んで、藻を構成している三角形のうちで、偏角写像のそこへの制限が向きを保つものを白、向きを裏返すものを黒と呼ぼう．そして、白い三角形の内心に白丸を、黒い三角形の内心に黒丸を置き、隣接する三角形の内心どうしを辺で結ぶと、トーラス上の 2 色グラフを得るが、こうして出来る 2 色グラフのことを**ブレーンによるタイル張り (brane tiling)** と呼ぶ．例として、Δ_1, Δ_2, Δ_3 から得られる 2 色グラフをそれぞれ図 23, 図 24, 図 25 に示す．藻から 2 色グラフを得る上の操作はアメーバからトロピカル曲線を得る操作と同様の「骨格を取り出す」操作と考えることが出来るので、スローガンとしては**ブレーンによるタイル張りはトロピカルな藻である**と言うことができよう.

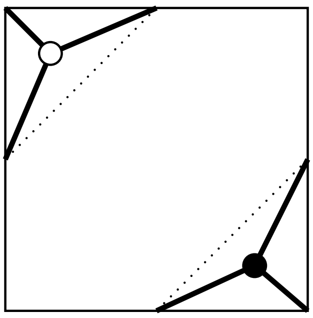


図 23: Δ_1 に対応する 2 色グラフ

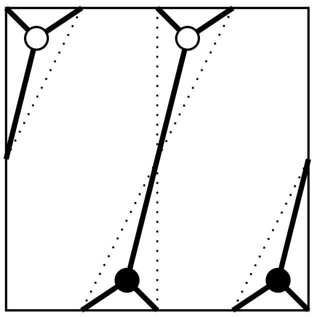


図 24: Δ_2 に対応する 2 色グラフ

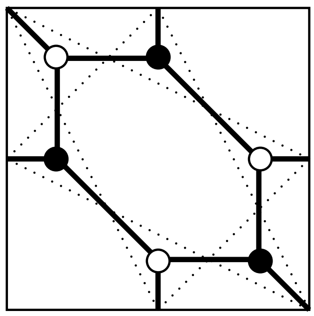


図 25: Δ_3 に対応する 2 色グラフ

4　ブレーンによるタイル張りと関係付き箙

箙 (quiver) とは辺に向きの入ったグラフのことであり[2]、形式的には頂点 (vertex) の集合 V、矢印 (arrow) の集合 A、それに矢印に対しその始点 (source) 及び終点 (target) を与える 2 つの写像 $s, t : A \to V$ の組 (V, A, s, t) として定義される．通常は V と A がともに有限集合の場合を考え、具体例としては Jordan 箙（$V = \{v_1\}$、$A = \{a_1\}$、$s(a_1) = t(a_1) = v_1$ となる箙．図 26 を見よ）や Kronecker 箙（$V = \{v_1, v_2\}$、$A = \{a_1, a_2\}$、$s(a_1) = s(a_2) = v_1$、$t(a_1) = t(a_2) = v_2$ となる箙．図 27 を見よ）などがある.

箙が与えられるとその道代数と呼ばれる非可換な環が次のようにして定まる：箙の上の**道**とは矢印の列 $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ で、それぞれの矢印の始点が 1 つ手前の矢印の終点になっている（すなわち、$i = 1, \dots, n-1$ に対し $s(a_{i+1}) = t(a_i)$ となる）ものを指す．この時の n を道 $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ の**長さ**という．また、ある頂点から始まってその頂点で終わる長さ 0 の道も考える．箙の**道代数 (path algebra)** とは、全ての道の集合を基底とするベクトル空間に、道

[2]箙について詳しくは中島啓氏の解説 http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/ebira-j.html を参照のこと.

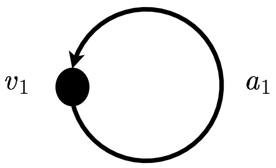


図 26: Jordan 箙

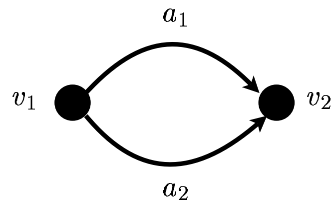


図 27: Kronecker 箙

の合成によって積構造を入れた代数である：

$$(b_m, \dots, b_1) \cdot (a_n, \dots, a_1) = \begin{cases} (b_m, \dots, b_1, a_n, \dots, a_1) & s(b_1) = t(a_n) \text{ の時}, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

長さ 0 の道はこの代数の冪等元 (idempotent) を与える．箙 Q が与えられたとき、その道代数を $\mathbb{C}Q$ で表す．例えば図 26 に与えられた Jordan 箙の道代数は一変数の多項式環 $\mathbb{C}[x]$ であり、この環の乗法の単位元 1 は長さ 0 の道に、x はただ 1 つの長さ 1 の道に対応している．また、図 27 に与えられた Kronecker 箙の道代数は e_1, e_2, a_1, a_2 を基底とするベクトル空間に $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ かつ

$$a_1 e_1 = e_2 a_1 = a_1, \qquad a_2 e_1 = e_2 a_1 = a_2$$

で、残りの積は全て零になるような積構造を入れた環になる．ここで、e_1, e_2 はそれぞれ頂点 v_1 および v_2 に対応する長さ 0 の道で、この環の単位元は $e_1 + e_2$ になる．

箙 Q とその道代数 $\mathbb{C}Q$ の両側イデアル $\mathcal{I}$ の組 $(Q, \mathcal{I})$ を**関係つき箙 (quiver with relations)** と言う．関係つき箙 $(Q, \mathcal{I})$ の道代数とは、箙の道代数をその関係で割って得られる代数 $\mathbb{C}Q/\mathcal{I}$ を指す．

向き付けられた曲面 S 上の 2 色グラフ $(B \amalg W, E)$ が与えられたとき、次のようにして関係つき箙 $(V, A, s, t, \mathcal{I})$ を作ることができる：頂点の集合 V は S におけるグラフの辺の補集合 $S \setminus E$ の連結成分とし、矢印の集合 A はグラフの辺の集合として定める．矢印 $a \in A (= E)$ に対しその始点 $s(a)$ および終点 $t(a)$ は、a をグラフの辺と思ったときにそれぞれその右側および左側にある連結成分として定義する．ここで、2 色グラフの辺の向きは白から黒に向かうものとして定める．任意の矢印 $a \in A$ に対し、その終点 $t(a)$ から始点 $s(a)$ に至り、a を 2 色グラフの辺と見たときの境界の白い頂点を正の向きに回る経路 $p_+(a)$ と、黒い頂点を負の向きに回る経路 $p_-(a)$ が定まる．ここで、全ての矢印 $a \in A$ に対しその箙の道代数の元 $p_+(a) - p_-(a)$ で生成される両側イデアルを $\mathcal{I}$ と置くと、この箙と $\mathcal{I}$ の組が与えられた S 上の 2 色グラフに対応する関係つき箙となる．これらの規則を図で表すと図 28 のようになる．ここでは 2 色グラフの辺を点線で書き、箙の矢印を実線で書いた．図 28 には 4 つの領域（すなわち箙の頂点）とそれらを結ぶ 5 本の矢印があり、矢印の向きは 2 色グラフの頂点の色によって決まっている．関係式はそれぞれの矢印ごとに存在するが、例えば a の矢印に対しては、$p_+(a) = bc$、$p_-(a) = de$ となり、$bc - de$ という関係式が生じる．

具体例として、Δ_1, Δ_2, Δ_3 に対応する箙をトーラスの上に 2 色グラフの図と重ねて描いたものと、抽象的に箙として描いたものを図 29 から図 34 に示す．関係式は、例えば Δ_1 に対応する箙に対しては

$$\mathcal{I} = (a_3 a_2 - a_2 a_3, a_1 a_3 - a_3 a_1, a_2 a_1 - a_1 a_2),$$

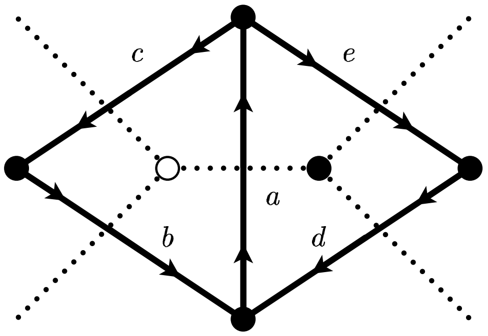


図 28: 関係式

Δ_2 に対応する箙に対しては

$$\mathcal{I} = (b_3b_2 - a_2b_3, b_1a_3 - b_3a_1, a_2b_1 - b_1b_2, a_3a_2 - b_2a_3, a_1b_3 - a_3b_1, b_2a_1 - a_1a_2),$$

となる．

5　ダイマー配置と一般化された Young 図形

これまでの話のおもちゃとして、1 次元の藻を議論する．特に、この場合のダイマー配置が Young 図形と関係し、その一般化として前節に現れた 2 次元の場合のダイマー配置が 3 次元の Young 図形と関係することを見る．最後に、このダイマー配置はトーリック Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten 不変量や Donaldson-Thomas 不変量との関係が期待されることを述べたい．

任意の 1 変数 Laurent 多項式は適当な自然数 m と n 及び複素数 a_i, $i = -m, \ldots, n$ によって

$$W(x) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

と表される．さらに a_i, $i = -m, \ldots, n$ が十分一般であって、$W^{-1}(0)$ は $n + m$ 個の相異なる偏角を持つ点からなると仮定すると、$W^{-1}(0)$ の藻は円周上に並んだ $n + m$ 個の点からなる．この場合の偏角写像は有限個の点の集合から有限個の点の集合への全単射であり、2 次元の場合のように向きを保つとか保たないなどと言うことは意味をなさない．また、既に骨格だけになっているので、改めてグラフを考えたりする必要もない．この藻に対し図 35 のようにして箙を定義する．ここで、箙の頂点は藻によって $n + m$ 個に分割された円周の各区間（すなわち連結成分）に対応しており、それぞれの区間からは隣接する区間に矢印が一本ずつ伸びている．

さて、上の箙の全ての隣接する 2 つの頂点に対し、それらを結ぶ 2 本の矢のうちの片方を選択したものを**ダイマー配置**と呼ぶことにしよう．さらに、ダイマー配置に対してその**高さ関数の変化（height change）**を、正の向き（反時計回り）の矢の数から負の向きの矢の数を引いたものとして定義し、分配関数を

$$Z(x) = \sum_{\text{ダイマー配置}} x^{\text{高さの変化}}$$

と定めると、

$$Z(x) = (1 + x)^{m+n}$$

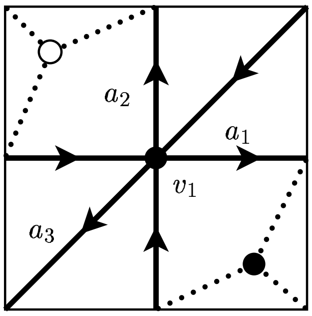


図 29: Δ_1 に対応する箙

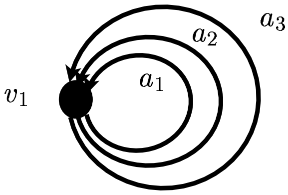


図 30: 図 29 から箙だけを取り出したもの

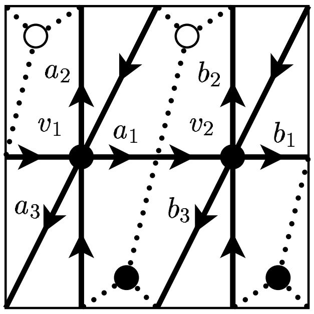


図 31: Δ_2 に対応する箙

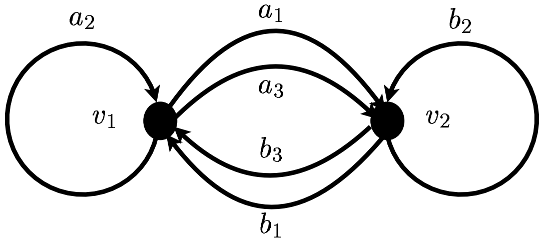


図 32: 図 31 から箙だけを取り出したもの

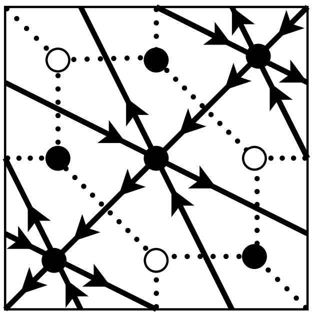


図 33: Δ_3 に対応する箙

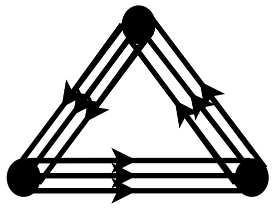


図 34: 図 33 から箙だけを取り出したもの

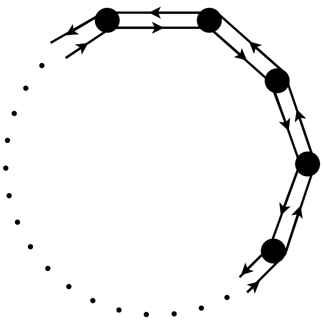


図 35: 1 次元の時の箙

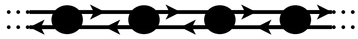


図 36: 対応する普遍被覆

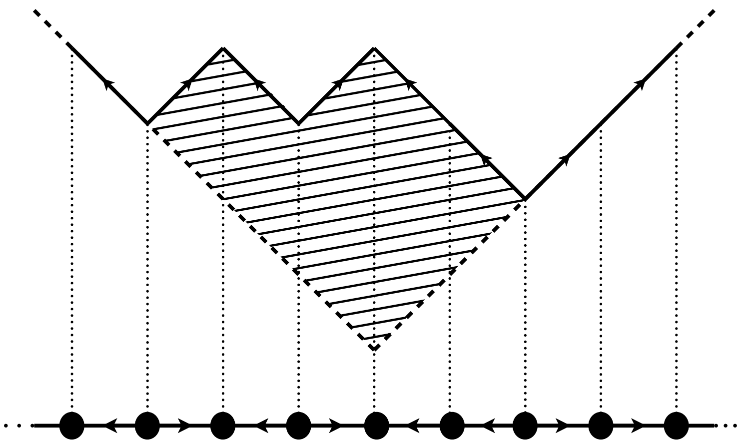


図 37: 1 次元の場合のダイマー配置と Young 図形との対応

となる．ここで、$Z(x)$ の Newton 多面体 $[0, m+n]$ は平行移動を除いて $W(x)$ の Newton 多面体 $[-m, n]$ と一致することに注意．後で見るように、同様のことが 2 次元でも成立する．

さて、Young 図形との関係を見るために、図 35 の普遍被覆のダイマー配置を考えよう．普遍被覆は図 36 のようになり、その上のダイマー配置は一列に並んだ箱の中に白玉と黒玉を適当に配置することと同じである（例えば白玉を右向きの矢、黒玉を左向きの矢に対応させれば良い）．ここで十分左にある全ての箱には黒玉を、十分右にある全ての箱には白玉を入れるという境界条件を課すと、そのような玉の配置が Young 図形と 1 対 1 に対応することは良く知られている．この対応を具体的に与えるには、次のようにして定まる**高さ関数（height function）**を考えれば良い．図 36 の箙の頂点の集合を $\mathbb{R}$ の格子点の集合 $\mathbb{Z}$ と同一視すると、与えられたダイマー配置に対して $\mathbb{R}$ 上の区分線形関数 h が、

- h は $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ で滑らか
- $h(i+1) - h(i) = \begin{cases} 1 & i \text{ 番目と } i+1 \text{ 番目の間の矢が右向きの時} \\ -1 & i \text{ 番目と } i+1 \text{ 番目の間の矢が左向きの時} \end{cases}$
- $|x|$ が十分大きいとき $h(x) = |x|$

という 3 つの条件でただ 1 つに定まる．これをダイマー配置の高さ関数と呼ぶ．すると、関数 $x \mapsto |x|$ と $h(x)$ で挟まれる領域はいわゆる「ロシア式」の Young 図形になる（つまり、これを負の向きに 45° または 135° 回転させると、フランス式またはイギリス式の Young 図形が得られる．図 37 を見よ）．さらに、Young 図形 Y に対し図 37 における面積の半分（言い換えると、Y が表している分割の大きさ）を $|Y|$ で表すと、良く知られているようにその母関数は

$$Z(q) = \sum_{Y:\text{Young 図形}} q^{|Y|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-1}$$

で与えられる．

さて、この話を 2 次元の場合に一般化するために、次の定義をする：2 色グラフ $(B \amalg W, E)$ の**ダイマー配置**とは、辺の集合 E の部分集合 D で、任意の頂点 $v \in B \amalg W$ に対し D の元で v

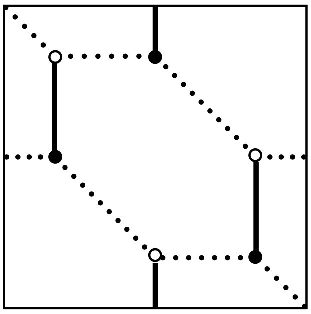


図 38: $(h_x, h_y) = (1, 0)$

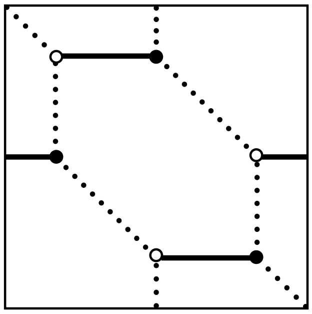


図 39: $(h_x, h_y) = (0, 1)$

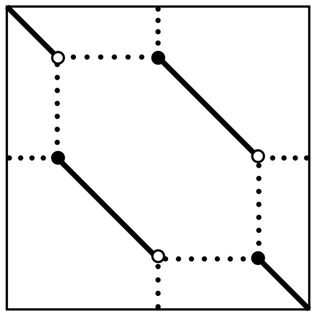


図 40: $(h_x, h_y) = (-1, -1)$

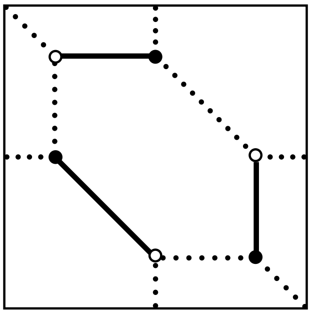


図 41: $(h_x, h_y) = (0, 0)$

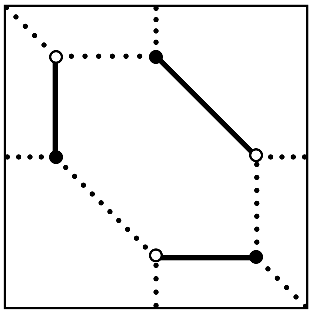


図 42: $(h_x, h_y) = (0, 0)$

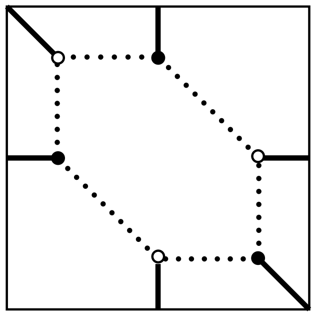


図 43: $(h_x, h_y) = (0, 0)$

図 44: Δ_3 に対応する 2 色グラフのダイマー配置

を端点に持つものがただ 1 つ存在するようなものを指す．例えば Δ_3 から定まる 2 色グラフのダイマー配置は図 44 にある 6 通りになる．

トーラス上の 2 色グラフに対し、その展開図（あるいは α サイクルと β サイクル）を 1 つ選んで固定すると、その上のダイマー配置 D に対して**高さ関数の変化（height change）** $(h_x(D), h_y(D)) \in \mathbb{Z}^2$ が次のようにして定まる：展開図の下の辺を左から右になぞった時に横切る辺のうち、D に属する辺で上端が白丸であるものの本数から、下端が白丸であるものの本数を引いたものを $h_x(D)$ とおく．また同様に、展開図の下の辺を下から上になぞった時に横切る辺のうち、D に属する辺で右端が白丸であるものの本数から、左端が白丸であるものの本数を引いたものを $h_y(D)$ とおく．例として、図 44 にはそれぞれのダイマー配置の高さ関数の変化も記しておいた．ここで、2 色グラフの分配関数を

$$Z(x, y) = \sum_{D:\text{ダイマー配置}} x^{h_x(D)} y^{h_y(D)}$$

で定義する．$Z(x, y)$ はトーラスの α サイクルと β サイクルの取り方に依存するが、異なるサイクルの取り方に対応する分配関数の間には簡単な関係がある．例として、図 25 にある 2 色グラフの分配関数は、図 44 から分かる様に

$$Z(x, y) = x + y + 3 + \frac{1}{xy}$$

で与えられる．ここで、$Z(x, y)$ の Newton 多角形が Δ_3 であることに注意．これは一般的に成り立つ現象である：

定理 3. 格子三角形 Δ に対し、$W_{\Delta}^{-1}(0)$ の藻から定まる 2 色グラフの分配関数の Newton 多角形は平行移動を除いては Δ に一致する.

さて、3 次元の Young 図形との対応を議論するために、格子三角形から得られるトーラス上の 2 色グラフの普遍被覆を考えよう（どの格子三角形から始めても、普遍被覆まで行けば図 45 にある蜂の巣状のグラフが得られる）. この普遍被覆に対応する箙 Q の矢の向きを忘れたものは対応する 2 色グラフの双対グラフになっているので、その 2 色グラフのダイマー配置が与えられると、そのダイマー配置に属する辺に対応する矢を消去することで Q の部分箙 $Q^{\rightarrow}$ が出来る（図 46）.

この部分箙 $Q^{\rightarrow}$ に対し、その頂点の集合 $V \cong \mathbb{Z}^2$ の上の $\mathbb{Z}$ に値をとる関数 $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ を、任意の $Q^{\rightarrow}$ に属する矢 a に対し

$$h(t(a)) - h(s(a)) = 1$$

となるように定めると、これによって h は定数を加える任意性を除いて一意的に決まる. ここで、適当なコンパクト集合の外では図 47 にある部分箙に対応するダイマー配置になっているようなダイマー配置だけを考えることにすると、その高さ関数は 2 次元の場合と同様にして 3 次元の Young 図形（すなわち、部屋の隅に立方体の箱を積み上げたような図形）を斜め上から見たものになっている. 例えば、図 46 にあるダイマー配置に対応する 3 次元の Young 図形は図 48 のようになる.

最後に、3 次元の Young 図形と Gromov-Witten/Donaldson-Thomas 対応の関係を紹介しよう. X を複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体（すなわち、接ベクトル束 TX の第 1Chern 類 $c_1(X)$ が自明な Kähler 多様体）とする. Kähler 形式によって X をシンプレクティック多様体と見ることで、X の Gromov-Witten 不変量と呼ばれるシンプレクティック幾何的な不変量を考えることができ、この不変量は、非負整数 g と X の 2 次のホモロジー類 $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ に対して

$$N_{g,\beta} = \int_{[\overline{M}_g(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}} 1 \in \mathbb{Q}$$

という有理数が定まる. ここで $\overline{M}_g(X, \beta)$ は X への種数 g、次数 β の安定写像のモジュライ空間で、$[\overline{M}_g(X, \beta)]^{\mathrm{virt}}$ はその仮想基本類と呼ばれる 0 次のホモロジー類である. これを 1 が代表する $\overline{M}_g(X, \beta)$ の 0 次のコホモロジー類で評価したものが上の積分の値であり、直観的には X の中の種数 g の Riemann 面で、その代表するホモロジー類が β になるものの個数を数えていると考えられる.

一方、Donaldson-Thomas 不変量は X の複素幾何的な不変量であり、整数 n と 2 次のホモロジー類 $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ に対し、

$$\tilde{N}_{g,\beta} = \int_{[I_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}} 1 \in \mathbb{Z}$$

で定義される. ここで、$I_n(X, \beta)$ は X の部分多様体 Y （あるいは対応するイデアル層）で、

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = n$$

および

$$[Y] = \beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$$

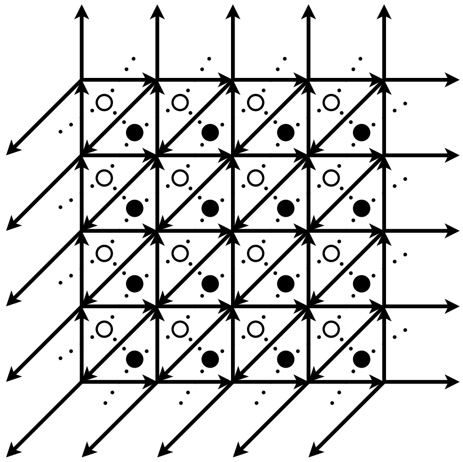


図 45: 普遍被覆

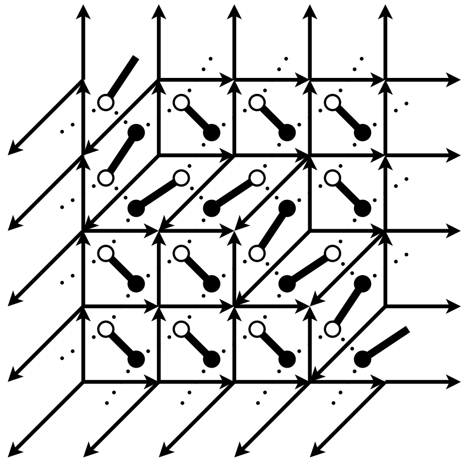


図 46: ダイマー配置と部分箙の関係

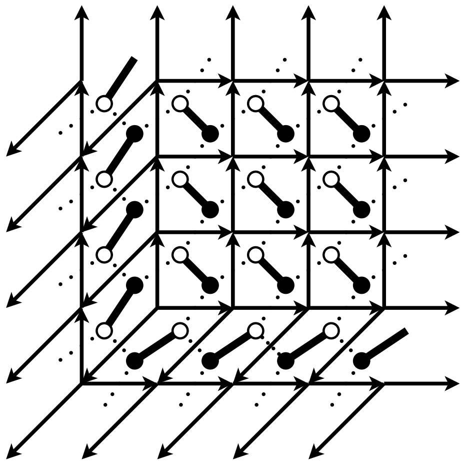


図 47: 「空の」ダイマー配置

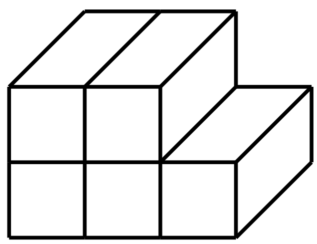


図 48: 3 次元の Young 図形

を満たすもののモジュライ空間を指し、$[I_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ はその仮想基本類である．ただし、$\mathcal{O}_Y$ は Y の構造層で、χ は Euler 数（層のコホモロジーの次元の交代和）である．

さて、これらの不変量のもっとも簡単な場合として、次数 β が零の部分に着目して母関数を考えることにしよう：

$$
\begin{aligned}
F_{GW}(X;u)_0 &= \sum_{g\geq 0} N_{g,0}u^{2g-2},\\
Z_{GW}(X;u)_0 &= \exp(F_{GW}(X;u)_0),\\
Z_{DT}(X;q)_0 &= \sum_{n\geq 0} \tilde{N}_{n,0}q^n.
\end{aligned}
$$

まず、Faber–Pandharipande [3] によって

$$
N_{g,0} = \frac{(-1)^g}{2}\frac{|B_{2g}|}{2g}\frac{|B_{2g-2}|}{2g-2}\frac{1}{(2g-2)!}\int_X (c_3(X)-c_1(X)c_2(X))
$$

が知られている．一方、Maulik–Nekrasov–Okounkov–Pandharipande によって、[7] で

$$
Z_{DT}(q)_0 = M(-q)^{\int_X (c_3(X)-x_1(X)c_2(X))}
$$

が予想され、[8] で非特異射影的 3 次元トーリック多様体に対して証明されている．但し

$$
M(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}
$$

は McMahon 関数と呼ばれ、3 次元の Young 図形の体積に関する母関数になっていることが知られている．ここで McMahon 関数の漸近展開

$$
\log M(e^{-u}) \sim \sum_{g=0}^{\infty}\frac{\zeta(3-2g)\zeta(1-2g)}{(2g-2)!}u^{2g-2} \qquad \text{as } u\to +0
$$

を使うと、

$$
\log Z_{DT}(X;-e^{\sqrt{-1}u})_0 \sim \cdots + 2\log Z_{GW}(X;u)_0
$$

が分かる．但し、この式は左辺を漸近展開すると特異な項及び定数項を除いて右辺と一致することを意味する．ここで注目すべきなのは、左辺はもともと $q=-e^{\sqrt{-1}u}\to 0$ (すなわち $u\to\infty\sqrt{-1}$) で定義されているのに対し、右辺は $u\to 0$ で定義されており、結果としてこの漸近的な関係は u 平面上の遠く離れた 2 つの点の周りで定義された異なる数え上げ幾何的な不変量の母関数を結び付けているという点である．ここで母関数を単なる形式冪級数ではなく解析関数と考えることは本質的で、McMahon 関数の定義で $q=-e^{\sqrt{-1}u}$ とおいて闇雲に展開しようとしてもうまく行かない．つまり、ここでの母関数は無限個の不変量を一度に扱うための単なる速記法ではない．

また、McMahon 関数 $M(q)$ が 3 次元の Young 図形の体積に関する母関数であるということは、見方を変えると結晶の融解の統計力学的な模型の分配関数であるということである．すなわち、Young 図形ではなく第 1 象限から Young 図形を取り除いた補集合を考え、これを結晶の角から原子を取り除いていると見る．さらに、原子がいくつか取り除かれた状態は、隅まで原子が詰まっている（つまり、Young 図形が空である）場合よりも取り除いた原子の個数に比例

する分だけエネルギーが高いと仮定する．この比例定数を E、温度を T、Boltzmann 定数を k とし、$q = \exp(-E/kT)$ とおけば、この模型の分配関数がちょうど $M(q)$ になることが分かる．

より一般に、次数 β が 0 の部分だけではなく全ての次数に渡る母関数についても、Gromov-Witten 不変量と Donaldson-Thomas 不変量の関係が予想されており、トーリック Calabi-Yau 多様体に対しては [7] で証明された．(彼らが実際に示したのは、Donaldson-Thomas 不変量の母関数が [1] で導入された位相頂点と呼ばれる規則でトーリック多様体を定義している扇から組み合わせ論的に定義される関数と一致することである．この関数が Gromov-Witten 不変量の母関数と一致することに関しては [6] 及びその参考文献を見よ.）これを Gromov-Witten/Donaldson-Thomas 対応と呼ぶ．一方、この場合の Gromov-Witten 不変量の母関数は結晶の融解の統計力学的な模型に対する分配関数だと考えることもできる（[10] や [11] を見よ）．ダイマー模型も結晶の融解の統計力学的な模型と考えることができるので、これらの間には何か関係があって然るべきであるが、正確な関係は未だ不明である．

なお、山崎氏と筆者の共同研究の主題はホモロジー的ミラー対称性（今の場合、格子多角形 Δ が定めるトーリック多様体の連接層の導来圏と Δ を Newton 多角形に持つ Laurent 多項式から定まる深谷圏の導来圏が三角圏として同値であることを主張する）にあるのだが、このことや Δ が三角形ではない場合の取り扱いについては、紙数の都合もあり今回は触れる事ができなかった．これらの話題に関しては他日を期すこととしたい．

参考文献

[1] Mina Aganagic, Albrecht Klemm, Marcos Mariño, and Cumrun Vafa. The topological vertex. *Comm. Math. Phys.*, 254(2):425–478, 2005.

[2] Manfred Einsiedler, Mikhail Kapranov, and Douglas Lind. Non-archimedean amoebas and tropical varieties. math.AG/0408311, 2004.

[3] C. Faber and R. Pandharipande. Hodge integrals and Gromov-Witten theory. *Invent. Math.*, 139(1):173–199, 2000.

[4] Bo Feng, Yang-Hui He, Kristian D. Kennaway, and Cumrun Vafa. Dimer models from mirror symmetry and quivering amoebae. hep-th/0511287, 2005.

[5] I. M. Gel′fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[6] Jun Li, Chiu-Chu Melissa Liu, Kefeng Liu, and Jian Zhou. A Mathematical Theory of the Topological Vertex. arXiv:math.AG/0408426, 2004.

[7] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande. Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory, I. arXiv:math.AG/0312059, 2003.

[8] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande. Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory, II. arXiv:math.AG/0406092, 2004.

[9] Grigory Mikhalkin. Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces. *Topology*, 43(5):1035–1065, 2004.

[10] Andrei Okounkov. Random surfaces enumerating algebraic curves. In *European Congress of Mathematics*, pages 751–768. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[11] Andrei Okounkov, Nikolai Reshetikhin, and Cumrun Vafa. Quantum Calabi-Yau and classical crystals. In *The unity of mathematics*, volume 244 of *Progr. Math.*, pages 597–618. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[12] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki. A note on brane tilings and McKay quivers. math.AG/0605780, 2006.

[13] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki. Brane tilings for parallelograms with application to homological mirror symmetry. math.AG/0606548, 2006.

[14] 植田一石. ドミノによるタイル張り. 第2回城崎新人セミナー報告集, http://insei.math.kyoto-u.ac.jp/2005/hokokushu/ueda.pdf よりダウンロード可能, 2005.