A_n 特異点上の安定性
(石井亮氏、上原北斗氏との共同研究)

植田 一石

概 要

弦の理論家 Douglas らの仕事に触発されて、Bridgeland は 2002 年に三角圏上の安定性の概念を導入した．これは大雑把に言うと半安定な対象の集合と、任意の対象を半安定な対象の拡大の繰り返しに分解する手順の組である．彼はさらに安定性の集合に自然に複素多様体の構造が入ることを示し、これを三角圏の不変量として積極的に研究することを提案した．特に、射影的 $K3$ 曲面の連接層の導来圏に対しては、安定性の空間が連結かつ単連結であると予想し、この予想を仮定すれば導来圏の三角圏としての自己同値群を決定できることを示した．この予想の「おもちゃ」として単純特異点の最小特異点解消（$K3$ 曲面の局所的なモデルと考えることができる）の上の連接層の導来圏の安定性の空間が連結かつ単連結であると予想され、石井亮氏、上原北斗氏と筆者によって A_n 特異点の場合に証明された．ここではこの結果の主張を述べることを目標に、安定性に関する入門的な解説を試みる．証明に関しては石井亮氏による解説 [19] があるので、興味のある方はそちらを参照されたい．

1 前史

ベクトル束の安定性は 1962 年の国際数学者会議において Mumford によって導入された．そのもともとの動機は次のようなものである：数学的な対象を適当な同値関係によって分類するというのは数学の基本的な問題である．例えば 2 次曲線を円と双曲線と放物線に分類したり、半単純 Lie 群を Dynkin 図形で分類したりするのは数学内部の問題として自然であるだけでなく、自然科学を始めとする他の分野への応用上も重要である．半単純 Lie 群のように可算個しかない対象に関しては単にリストアップするだけで分類は完了するが、代数幾何においては次のような理由で単に同型類をリストアップするだけではなく同型類全体のなす「モジュライ空間」を調べることが重要になる：

- 複素数体上では同型類がしばしば非可算個存在し、単純にリストアップすることができない．
- 基礎体を取り換えると集合論的な同型類は変わるが、できればそれらを統一的に扱いたい．
- 同型類のなす空間が自然に多様体の構造を持ち、それ自体が幾何学的に興味深い対象となる．

しかし、実は上では少しだけずるをしていて、同型類の空間に多様体の構造を入れるには考える対象を制限しなければならないことが起こる．簡単な（しかし基本的で大切な）例として、射影空間 $\mathbb{P}^n$ を考えてみよう．これは $n+1$ 次元ベクトル空間の中の直線（1 次元部分ベクトル空間）を分類しているれっきとしたモジュライ空間であり、体 k を与えるごとに、k に値をとる点（k-valued point）の集合 $\mathbb{P}^n(k)$ として k^{n+1} の中の 1 次元部分 k ベクトル空間の同型類の集合を与えるような代数多様体（あるいはスキーム）である．考えている体が位数 $q = p^r$ の有限体 $\mathbb{F}_q$ の時 $\mathbb{P}^n(k)$

は有限集合であるが、考えている体が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ などの時 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ や $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は非可算無限集合になり、そこに自然な可微分多様体の構造が入って幾何学的に興味深い空間をなす．なお、余談であるが、表示

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} \setminus \{0\})/k^\times$$

からすぐに分かるように、

$$\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^n$$

である．これが $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の Betti 数の母関数

$$\sum_{i=0}^{n} q^i \dim_{\mathbb{R}} H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C});\mathbb{R})$$

と一致することは Weil 予想の帰結であるし、これが整数 n の q 類似

$$[n]_q = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

であることは Ringel や Lusztig らによる箙の表現論の量子群への応用にとって本質的である．さらに余談であるが、同様にして 2 項係数の q 類似

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q[n-1]_q \cdots [n-k+1]_q}{[k]_q[k-1]_q \cdots [1]_q}$$

は Grassmann 多様体の点の数（あるいはコホモロジー環の Poincaré 多項式）を与える；

$$\#\,\mathrm{Gr}(k,n) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

さて、代数幾何的には $\mathbb{P}^n(k)$ は $n+1$ 次元ベクトル空間（これを $V = k^{n+1}$ とおこう）の中の 1 次元部分ベクトル空間のモジュライ空間と考えるよりは、V の双対空間 V^* から k への k 線形写像 $\mathrm{Hom}_k(V^*,k)$ のモジュライ空間と考える方が素性が良い．ここで、モジュライ空間を考える際の同値関係としては $v,w \in \mathrm{Hom}_k(V^*,k)$ に対し、k を一次元 k ベクトル空間と考えたときの同型写像 $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(k) \cong k^\times$ が存在して図式

$$\begin{array}{ccc} V^* & = & V^* \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ k & \xrightarrow{\alpha} & k \end{array}$$

が可換になる時 v と w が同値であると定義する．別の言い方をすると、$k^\times$ が V に定数倍で自然に作用するが、この作用に関する商空間を考えなさいという意味である．

ここで注意しないといけないのは、V の 0 でない元 v に対しては $k^\times$ が自由に作用する（つまり、$\alpha \in k^\times$ に対し、$\alpha v = v$ ならば $\alpha = 1$ である）が、$0 \in V$ が $k^\times$ の V に対する作用の固定点になっている（つまり、任意の $\alpha \in k^\times$ に対して $\alpha 0 = 0$ である）ことである．しかも、任意の $v \in V$ に対し、v の属する同値類 $[v] = k^\times v \subset V$ は 0 とくっついている（つまり $[v]$ の閉包が 0 を含む）．従って、単に集合論的な商をとってそこに商位相を入れると、普通の射影空間 $\mathbb{P}^n(k)$ の他に 0 に

対応する同値類が出てきて、それが $\mathbb{P}^n(k)$ の全ての点と分離できない（つまり Hausdorff でない）ということになってしまう．代数幾何的に考えても、例えば単に k^{n+1} の座標環 $k[x_1,\dots,x_{n+1}]$ を考え、その $k^\times$ 作用に関する不変式環を考えるとそれは k（定数部分）になってしまうので、商が一点になって都合が悪い．

この困難を解決するには V から 0 を取り除けば良くて、これによってモジュライ空間として射影空間 $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/k^\times$ ができる（これを $\mathbb{P}^*(V)$ と書く流儀もある）．単に $\mathbb{P}^n$ と書かずに $\mathbb{P}(V)$ と書くのはどのベクトル空間の射影化であるかをきちんと区別するためである．

この時に取り除いた $0 \in V$ のことを**不安定点（unstable point）**、残りの点のことを**安定点（stable point）**と呼ぶ．Mumford が考察したのは Riemann 面上のベクトル束の場合であり、この時安定性の定義は次のようになる：

定義 1 (Mumford). Riemann 面の上のベクトル束 E は、任意の部分ベクトル束 $W \subset E$ に対し

$$\frac{\deg W}{\operatorname{rank} W} \le \frac{\deg E}{\operatorname{rank} E}$$

を満たすとき**半安定（semistable）**という．また、上で常に不等号 $<$ が成り立つときに**安定（stable）**という．

これはベクトル束のモジュライ空間を代数多様体の代数群による商として実現するときに、群の作用が（軌道が閉であるとか、安定化群が有限であるなどの）良い条件を満たすための条件であり、上の条件を満たさない（すなわち**不安定（unstable)** な）ベクトル束を排除することによって、（半）安定なベクトル束の同型類の空間に代数多様体の構造を入れることができる．

これが安定性の導入の動機の一つであるが、安定性にはもう一つの重要な側面がある．それは幾何に由来する非線型偏微分方程式の解の存在問題であり、物理学とも関係が深い．典型的な例はいわゆる Hitchin–小林対応で、射影多様体上の正則ベクトル束 E が既約な Hermite Yang-Mills 接続を持つための必要十分条件は E が安定であるということを主張している．以下でこれを [15, Chapter 8] に沿って解説しよう．

M をコンパクトな Riemann 多様体とし、E をその上の複素ベクトル束とする．さらに、E には Hermite 計量が一つ固定されているとしよう．E のユニタリ接続（すなわち計量と整合的な接続）A に対し、A の曲率 F_A の L^2 ノルムを対応させる汎関数

$$A \mapsto \int_M |F_A|^2 \mathrm{vol}$$

を **Yang–Mills 汎関数**と呼び、この Yang–Mills 汎関数の停留値を与える Euler–Langrange 方程式

$$d_A * F_A = 0$$

を Yang–Mills 方程式と呼ぶ．但し、ここで $*$ は任意の M 上の微分形式 θ、ϕ に対し

$$\theta \wedge *\phi = \langle \theta, \phi \rangle \mathrm{vol}$$

で定義される Hodge の星形作用素であり、上の式で $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Riemann 計量で定義される微分形式の間の内積である．明らかに、Yang–Mills 汎関数は（従って Yang–Mills 方程式も）E のユニタリな自己同型のなす群 $\mathcal{G}$ で不変である．

ここで、M が複素多様体であると仮定しよう．E に正則ベクトル束の構造を与えるのは微分作用素

$$\overline{\partial}_E : \Omega^{p,q}_M(E) \to \Omega^{p,q+1}_M(E)$$

で $(\overline{\partial}_E)^2 = 0$ を満たすものを与えることと同値である．しかも、与えられた正則構造 $\overline{\partial}_E$ に対し E のユニタリ接続 d_A でその $(0,1)$ 部分が $\overline{\partial}_E$ で与えられるものがただ一つ存在する．逆に、ユニタリ接続 d_A の $(0,1)$ 部分が E の正則構造を定める必要十分条件はその曲率 F_A の $(0,2)$ 部分が消えることと同値である（この時 A のユニタリ性から F_A の $(2,0)$ 部分も消えるので、これは F_A が $(1,1)$ 型の微分形式であるということと同値である）．

さて、ここでさらに M が Kähler 多様体だとしよう．∂^* と $\overline{\partial}^*$ をそれぞれ

$$\partial^* = - * \overline{\partial} *, \qquad \overline{\partial}^* = - * \partial *$$

で定義すると、これらは ∂ と $\overline{\partial}$ の随伴作用素になる．Kähler 形式を ω とし、これによる外積作用素を $L : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q+1}(M)$、縮約作用素を $\Lambda : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p-1,q-1}(M)$ とおこう：

$$L\alpha = \alpha \wedge \omega, \quad \Lambda\alpha = *^{-1} L * \alpha = (-1)^{p+q} * L * \alpha.$$

Λ は L の随伴作用素であり、

$$[\Lambda, L]\alpha = (n-p-q)\alpha$$

となる．但し、n は M の複素次元である．さらに、

$$[\Lambda, \partial_E] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}_E^*, \qquad [\Lambda, \overline{\partial}_E] = -\sqrt{-1}\partial_E^*$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} *d_A * F_A &= *(\partial_E + \overline{\partial}_E) * F_A \\ &= -(\partial_E^* + \overline{\partial}_E^*) F_A \\ &= -\sqrt{-1}([\Lambda, \overline{\partial}_E] - [\Lambda, \partial_E]) F_A \\ &= \sqrt{-1}(\overline{\partial}_E - \partial_E)\Lambda F_A \end{aligned}$$

となる．但し、3 行目から 4 行目への変形に Bianchi の恒等式

$$d_A F_A = (\partial_E + \overline{\partial}_E) F_A = 0$$

を使った．

E の接続 A で、ΛF_A が恒等写像の定数倍になるものを **Hermite Yang–Mills 接続（Hermitian Yang–Mills connection）**と呼ぶ．Hermite Yang–Mills 接続は上の式から明らかなように Yang–Mills 接続であり、逆に任意の Yang–Mills 接続は Hermite Yang–Mills 接続の直和として得られることが知られている．Hermite Yang–Mills 接続は、別の Hermite Yang–Mills 接続の直和として得られない時、既約であるという．

さて、コンパクトな Kähler 多様体の上の正則ベクトル束 E に対する安定を定義しよう：

定義 2. M をコンパクトな Kähler 多様体、ω をその Kähler 形式とする．M 上の正則ベクトル束 E が安定であるとは、E の任意の連接部分層 $\mathcal{S}$ で、$\operatorname{rank}\mathcal{S} < \operatorname{rank} E$ となるものに対し、

$$\mu(\mathcal{S}) < \mu(E)$$

が成立する事を言う．

ここで、$\mu(E) = \deg_\omega E / \operatorname{rank} E$ は E の**勾配（slope）**であり、$\deg_\omega E$ は ω で量った E の次数（すなわち、E の第一 Chern 類 $c_1(E)$ と ω のカップ積の積分）である．

次の定理は小林–Hitchin 対応（Hitchin–Kobayashi correspondence）と呼ばれ、Riemann 面に対しては Narasimhan–Seshadri の定理 [16] から従い [2]、射影的曲面に対しては Donaldson [6]、一般のコンパクトな Kähler 多様体に対しては Uhlenbeck–Yau [18] による：

定理 3. M をコンパクトな Kähler 多様体、E をその上の Hermite 計量を持つ正則ベクトル束とする．この時、E が既約な Hermite Yang–Mills 接続を持つための必要十分条件は E が安定であることである．

2　三角圏上の安定性

Douglas ら [1, 7, 8, 9, 10] による BPS D ブレーンの Π 安定性の理論に触発されて、Bridgeland [5] は三角圏上の安定性を定義した．これはベクトル束の勾配安定性と Beilinson–Bernstein–Deligne [3] による t 構造の理論を絶妙に組み合わせており、三角圏の任意の対象を半安定な対象の拡大の繰り返しとして一意的に表示することを可能にする．

定義 4. $\mathcal{D}$ を三角圏とする．組 $(\mathcal{Z}, \mathcal{P})$ が $\mathcal{D}$ 上の安定性であるとは、

(i) $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{D}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D})$ から加法群 $\mathbb{C}$ への群準同型で、

(ii) $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ は実数 ϕ でパラメトライズされた $\mathcal{D}$ の充満加法部分圏の族で、

(iii) $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ なら、適当な $m(E) \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $Z(E) = m(E) \exp(i\pi\phi)$ となり、

(iv) 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対し $\mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ で、

(v) 任意の $A_j \in \mathcal{P}(\phi_j)$、$j = 1, 2$ に対し、$\phi_1 > \phi_2$ なら $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A_1, A_2) = 0$ を満たし、

(vi) 任意の零でない対象 $E \in \mathcal{T}$ に対し、有限個の次数の列

$$\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$$

と特三角の列

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_2 \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[r, dashed] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\ & A_1 \arrow[ul, dashed] & & A_2 \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, leftarrow] & & & & A_n \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

が存在して、全ての $1 \leq j \leq n$ に対し $A_j \in \mathcal{P}(\phi_j)$ が成り立つ

ことを指す．

$\mathcal{Z}$ は**中心荷（central charge）**、(vi) にある特三角の列は **Harder-Narasimhan フィルトレーション**と呼ばれる．上の定義から、任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対し $\mathcal{P}(\phi)$ が Abel 圏であることが従う．$\mathcal{P}(\phi)$ の零でない対象 E は**位相 ϕ を持つ半安定な対象である（semistable of phase ϕ）**という．特に、E が $\mathcal{P}(\phi)$ の単純な対象である（すなわち、Abel 圏 $\mathcal{P}(\phi)$ の中で真の部分対象を持たない）時、**安定（stable）**であるという．

明らかに、上の安定性の定義は考えている三角圏が適当な代数多様体の上の連接層の導来圏として得られるかどうかには（あるいは適当なアーベル圏の導来圏として得らるかどうかにさえ）依存しない．さらにBridgelandは$\mathcal{D}$上の安定性で、適当な条件（数値的かつ局所有限）を満たすものの集合 (これを$\operatorname{Stab}\mathcal{D}$で表す) が複素多様体をなすという驚くべき事実を発見した．安定性の定義には$\mathcal{D}$の三角圏としての構造しか使わないので、三角圏として同値な圏$\mathcal{D}_1$と$\mathcal{D}_2$があれば、$\mathcal{D}_1$と$\mathcal{D}_2$の圏同値を与える函手を一つ選ぶごとに$\operatorname{Stab}\mathcal{D}_1$と$\operatorname{Stab}\mathcal{D}_2$の双正則同型が一つ定まり、$\operatorname{Stab}\mathcal{D}$には$\mathcal{D}$の三角圏としての自己同値群$\operatorname{Autoeq}\mathcal{D}$が正則自己同型として作用する．このことからBridgelandは$\operatorname{Stab}\mathcal{D}$を（単にその上の対象を半安定なものに分解するための手順としてではなく）三角圏の不変量として積極的に研究することを提唱した．

ただし、三角圏の不変量としては$\operatorname{Stab}\mathcal{D}$は非常に弱い不変量でしかない．$\mathcal{D}$が複素多様体$X$の連接層の導来圏$\mathcal{D}(X) = D^b \operatorname{coh} X$の時、$\operatorname{Stab}\mathcal{D}(X)$を$\operatorname{Stab} X$と略記することにしよう．$X$が種数1以上のRiemann面の時、Bridgeland [5] およびMacri [14] によって、$\operatorname{Stab} X$はXの種数や複素構造に依らず、複素多様体として常に2次の一般線形群$GL_2(\mathbb{R})$の単位元を含む連結成分$GL_2^+(\mathbb{R})$の普遍被覆$\widetilde{GL}_2^+(\mathbb{R})$になる事が知られている．一方、Okada [17] により$\operatorname{Stab} D^b \operatorname{coh}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2$なので、Riemann面$X$に対する$\operatorname{Stab} X$は$X$が$\mathbb{P}^1$かそれ以外かしか区別することができない．これは$\mathcal{D}(X)$から$X$が再現できることと対照的である．

しかし、Calabi-Yau多様体Xに対して、$\operatorname{Stab} X$は$\operatorname{Autoeq}\mathcal{D}(X)$を研究するための強力な道具になり得ることをBridgelandは指摘した．特に、Xが射影的$K3$曲面であるときに、$\operatorname{Stab} X$のある位相幾何的な性質を予想し、この予想を仮定すれば$\operatorname{Autoeq}\mathcal{D}(X)$の構造が決定されるという驚異的な定理を示した．以下に彼のこの仕事を解説しよう．

Xを射影的$K3$曲面とする．Xのホモロジー群

$$H^*(X,\mathbb{Z}) = H^0(X,\mathbb{Z}) \oplus H^2(X,\mathbb{Z}) \oplus H^4(X,\mathbb{Z})$$

に

$$((r_1, D_1, s_1), (r_2, D_2, s_2)) = D_1 \cdot D_2 - r_1 s_2 - r_2 s_1$$

で内積を入れたものを**向井格子**と呼ぶ．これはXの位相だけで決まり、複素構造には依らず常に符合数が$(4, 20)$の偶でユニモジュラーな格子になる．この定義の動機は、Xの連接層Eの**向井ベクトル**$v(E) \in H^*(X,\mathbb{Z})$を

$$v(E) = (r(E), c_1(E), \operatorname{ch}_2(E) + r(E)) = ch(E)\sqrt{\operatorname{td}(X)}$$

で定義すると、Riemann–Rochの定理が

$$\chi(E,F) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ext}^i(E,F) = -(v(E), v(F))$$

と表されることにある．

向井格子の複素化$H^*(X,\mathbb{C}) = H^*(C,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$はHodge分解

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

を持つ．ここに現れる部分空間$H^{2,0}(X)$は定数倍を除いて一意的なXの正則2形式Ωで張られており、$H^{0,2}(X) = \overline{H^{2,0}(X)} = \mathbb{C}\overline{\Omega}$である．$X$の射影空間への埋め込みから決まるKähler形式を$\omega \in H^{1,1}(X)$とおくと、$H^{4,0}(X) = H^{3,1}(X) = 0$および$\Omega \wedge \overline{\Omega}$が$X$の体積形式を与えることから、

$$\Omega = \Omega_1 + \sqrt{-1}\Omega_2, \quad \Omega_1, \Omega_2 \in H^2(X,\mathbb{R})$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\Omega\cdot\omega &= \Omega_1\cdot\omega+\Omega_2\cdot\omega = 0,\\ \Omega\cdot\Omega &= (\Omega_1\cdot\Omega_1-\Omega_2\cdot\Omega_2)+2\sqrt{-1}\Omega_1\cdot\Omega_2 = 0,\\ \Omega\cdot\overline{\Omega} &= \Omega_1\cdot\Omega_1+\Omega_2\cdot\Omega_2>0\end{aligned}$$

である．Kähler 形式 ω の $H^2(X,\mathbb{C})$ における直交補空間を $\omega^\perp$ で表し、$T_{\omega^\perp}=\omega^\perp\cap H^2(X,\mathbb{Z})$ とおくと、Ω の実部と虚部は $T_{\omega^\perp}\otimes\mathbb{R}$ の正定値な 2 次元部分空間を張ることが分かる．一方、$T_{\omega^\perp}\otimes\mathbb{R}$ の正定値な 2 次元部分空間に対し、その正規直交基底 $\{\Omega_1,\Omega_2\}$ を任意に選んで $\Omega=\Omega_1+\Omega_2$ とおけば、$K3$ 曲面に対する Torelli の定理によって、Ω を正則 2 形式に持ち、ω を Kähler 形式とするような射影的 $K3$ 曲面が双正則同値を除いてただ一つ存在する．

さて、向井格子の自己同型

$$\phi : H^*(X,\mathbb{Z})\to H^*(X,\mathbb{Z})$$

は、その複素化 $\phi_{\mathbb{C}} : H^*(X,\mathbb{C})\to H^*(X,\mathbb{C})$ が 1 次元部分空間 $H^{2,0}(X)\subset H^*(X,\mathbb{C})$ を保つときに **Hodge 等長写像**と呼ぶ．$H^*(X,\mathbb{Z})$ の Hodge 等長写像のなす群を $\operatorname{Aut}H^*(X,\mathbb{Z})$ で表す．$H^*(X,\mathbb{Z})$ の部分格子 $\mathcal{N}(X)$ を、X の代数的サイクルのなす格子として定義する；

$$\mathcal{N}(X)=H^0(X,\mathbb{Z})\oplus \mathrm{NS}(X)\oplus H^4(X,\mathbb{Z}).$$

ここで $\mathrm{NS}(X)$ は X の Neron–Severi 群である．X のルート系 $\Delta(X)$ を

$$\Delta(X)=\{\delta\in\mathcal{N}(X)\mid(\delta,\delta)=-2\}$$

で定義する．さらに、

$$\mathcal{P}(X)=\{u+\sqrt{-1}v\in\mathcal{N}(X)\otimes\mathbb{C}\mid \text{内積 }(\cdot,\cdot)\text{ の }\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u,v\}\text{ への制限は正定値 }\}$$

とおく．$\mathcal{P}(X)$ は 2 つの連結成分を持つが、そのうち

$$(1,\sqrt{-1}\omega,-\frac{1}{2}\omega^2)\in\mathcal{P}(X)$$

を含むものを $\mathcal{P}^+(X)$ と呼び、$\mathcal{P}^+(X)$ からルートの定義する超平面を除いたものを $\mathcal{P}_0^+(X)$ で表す；

$$\mathcal{P}_0^+(X)=\mathcal{P}^+(X)\setminus\bigcup_{\delta\in\Delta(X)}\delta^\perp\subset\mathcal{N}(X)\otimes\mathbb{C}.$$

$\operatorname{Aut}H^*(X,\mathbb{Z})$ の元は $\mathcal{P}^+(X)$ の元を $\mathcal{P}^+(X)$ に移すものと、$\mathcal{P}^+(X)$ の元をもう 1 つの連結成分に移すものの 2 種類あるが、前者（すなわち、連結成分を保つもの）のなす部分群を $\operatorname{Aut}^+H^*(X,\mathbb{Z})$ で表す．$\operatorname{Aut}^+H^*(X,\mathbb{Z})$ は $\operatorname{Aut}H^*(X,\mathbb{Z})$ の指数 2 の部分群である．

さて、$\operatorname{Stab}X$ の元 $(\mathcal{Z},\mathcal{P})$ に対し、ある $Z\in\mathcal{N}(X)\otimes\mathbb{C}$ が存在して、任意の $E\in K(X)$ に対し

$$\mathcal{Z}(E)=v(E)\cdot Z$$

となる（実はこれが「$(\mathcal{Z},\mathcal{P})$ が数値的である」ということの定義である）が、ここで $(\mathcal{Z},\mathcal{P})$ に Z を対応させる写像 $\operatorname{Stab}X\to\mathcal{N}(X)\otimes\mathbb{C}$ を π で表す．この状況で、Bridgeland [4] は次の定理を証明した．

定理 5 (Bridgeland). $\mathrm{Stab}(X)$ のある連結成分 $\Sigma(X)$ が存在して、$\pi|_{\Sigma(X)} : \Sigma(X) \to \mathcal{P}_0^+(X)$ は被覆空間である.

この定理の最初のポイントは、$\mathrm{Stab}(X)$ が空集合ではないことである．三角圏の安定性は公理的に定義されているが、勝手に三角圏を与えたときに公理を満たす安定性が少なくとも 1 つ存在するというのは非常に非自明な主張である．実際、一般型の曲面や 3 次元の射影的な Calabi–Yau 多様体の連接層の導来圏の上の安定性はまだ 1 つも見つかっていない．その上で、$\pi : \mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ を $(\pi|_{\Sigma(X)})^{-1}(\mathcal{P}_0^+(X))$ に制限したものが被覆写像であること、および $\pi : \mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ の像が $\mathcal{P}_0^+(X) \subset \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ に入ることを示すことによって、上の定理は証明される.

さて、ここまで来れば Bridgeland の予想と定理を述べることができる：

予想 6. X を射影的 $K3$ 曲面とするとき、次が成立する：

- $\Sigma(X)$ は $\mathrm{Autoeq}\,\mathcal{D}(X)$ の作用で保たれる.
- $\Sigma(X)$ は単連結.

定理 7. $\mathcal{D}(X)$ を射影的 $K3$ 曲面 X の連接層の導来圏とし、上の予想を仮定すると、次の完全列が存在する：

$$1 \to \pi_1 \mathcal{P}_0^+(X) \to \mathrm{Autoeq}\,\mathcal{D}(X) \to \mathrm{Aut}^+ H^*(X, \mathbb{Z}) \to 1.$$

さて、k を体とし、

$$X \to \mathrm{Spec}\, k[x, y, z]/(xy - z^{n+1})$$

を A_n 特異点の最小特異点解消とすると、X は $K3$ 曲面の局所的なモデルと考えることができる．$D^b \operatorname{coh}_0 X$ を X 上の例外集合上に台を持つ連接層の導来圏とし、$\mathrm{Stab}\, X$ を $D^b \operatorname{coh}_0 X$ 上の安定性のなす空間とすると、次が成り立つ：

定理 8 (Ishii–Uehara–U [11]). X が A_n 特異点の最小特異点解消の時、$\mathrm{Stab}\, X$ は連結かつ単連結である.

上の結果は Ishii–Uehara [12] および Bridgeland [4] の結果に基づいている．連結性は任意の安定性を $D^b \operatorname{coh}_0 X$ の自己同値群の作用で $\mathrm{Stab}\, X$ の連結成分を保つことが知られているものによって標準的な安定性に移すことで、また、単連結性はあるアファイン組み紐群の $D^b \operatorname{coh}_0 X$ への作用が忠実であることを Khovanov–Seidel [13] に沿って示すことで証明されるが、興味のある方は石井亮氏による解説 [19] を参照されたい.

参考文献

[1] Paul S. Aspinwall and Michael R. Douglas. D-brane stability and monodromy. *J. High Energy Phys.*, (5):no. 31, 35, 2002.

[2] M. F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 308(1505):523–615, 1983.

[3] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[4] Tom Bridgeland. Stability conditions and Kleinian singularities. math.AG/0508257.

[5] Tom Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. math.AG/0212237.

[6] S. K. Donaldson. Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 50(1):1–26, 1985.

[7] Michael R. Douglas. D-branes, categories and $N = 1$ supersymmetry. *J. Math. Phys.*, 42(7):2818–2843, 2001. Strings, branes, and M-theory.

[8] Michael R. Douglas. D-branes on Calabi-Yau manifolds. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 449–466. Birkhäuser, Basel, 2001.

[9] Michael R. Douglas. Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, pages 395–408, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

[10] Michael R. Douglas, Bartomeu Fiol, and Christian Römelsberger. Stability and BPS branes. *J. High Energy Phys.*, (9):006, 15 pp. (electronic), 2005.

[11] Akira Ishii, Kazushi Ueda, and Hokuto Uehara. Stability conditions on A_n-singularities. math.AG/0609551, 2006.

[12] Akira Ishii and Hokuto Uehara. Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n-singularities on surfaces. *J. Differential Geom.*, 71(3):385–435, 2005.

[13] Mikhail Khovanov and Paul Seidel. Quivers, Floer cohomology, and braid group actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(1):203–271 (electronic), 2002.

[14] Emanuele Macrí. Some examples of moduli spaces of stability conditions on derived categories. math.AG/0411613, 2004.

[15] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[16] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri. Stable bundles and unitary bundles on a compact Riemann surface. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52:207–211, 1964.

[17] So Okada. Stability manifold of $\mathbb{P}^1$. *J. Algebraic Geom.*, 15(3):487–505, 2006.

[18] K. Uhlenbeck and S.-T. Yau. On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(S, suppl.):S257–S293, 1986. Frontiers of the mathematical sciences: 1985 (New York, 1985).

[19] 石井 亮. A 型特異点の安定性条件. 2006 年代数学シンポジウム予稿.