箙の関係式のモジュライ空間

植田一石　(大阪大学大学院理学研究科)

よいクラスの対象を定義して、然る後にそれを分類することは数学の主題の一つである。代数幾何学においては、対象の同型類を分類するにはしばしば離散的なパラメーターと連続的なパラメーターの両方が必要となる。後者はモジュライと呼ばれ、それ自身が再び幾何学的な対象となる。古典的な例は楕円曲線のモジュライ空間であり、これを記述する方法としては定義方程式のパラメーターを分類する代数的な手法と、周期を分類する超越的な手法の 2 種類がある。前者から後者への写像は超幾何関数、その逆写像は保型形式で与えられ、これらの研究は 19 世紀数学の華であった。

古典的かつ美しい理論がある時に、より広い世界において、拡張された形でその理論を再び見出すことは、数学の進歩を支える指導原理の一つである。楕円曲線とその周期の理論は、点やレベル構造などの付加構造が付いた場合や高種数の曲線、高次元の多様体などに拡張され、現在も活発に研究されている。

一方で、幾つかの状況では、考える対象を古典的な代数多様体に限るのは不自然かつ不十分である。例えば、ある多様体 X の連接層の導来圏が、別の多様体 Y の連接層の導来圏の半直交分解の成分として現れることがあるが、この状況で Y を変形しても、これが誘導する半直交成分の変形が X の通常の意味での変形から来るとは限らない。典型的な例としては、$\mathbb{P}^5$ の 3 次超曲面 Y の連接層の導来圏の

$$D^b \operatorname{coh} Y = \langle \mathcal{A}, \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2) \rangle \tag{1}$$

という半直交分解がある [Kuz10]。この時の $\mathcal{A}$ は $D^b \operatorname{coh} Y$ の非自明部分と呼ばれ、2 次元の Calabi-Yau 圏になる。特別な Y に対する $\mathcal{A}$ は適当な K3 曲面 X の導来圏と同値になるが、一般には‘非可換 K3 曲面’の導来圏と呼ぶべきものになる。

また、ミラー対称性の観点からも、考える対象を古典的な代数多様体に限るのは不自然かつ不十分である。Kontsevich [Kon95] によって提唱されたホモロジー的ミラー予想は、任意の Calabi-Yau 多様体 X に対してある Calabi-Yau 多様体 Y が存在して

$$D^b \operatorname{coh} X \cong D^b \mathfrak{Fuk}\, Y \tag{2}$$

となることを主張するが、Y のシンプレクティック多様体としての変形が必ず X の複素多様体としての変形に対応するわけではない。実際、Y のシンプレクティック多様体としての変形には $h^2(Y)$ 次元の自由度があるが、これは一般には $h^{1,n-1}(X) = h^{1,1}(Y)$ よりも真に大きい。

また、量子群や可積分系への応用の観点からも、非可換代数多様体を研究することは自然かつ重要な問題である。後述する非可換射影平面 (あるいは Sklyanin 代数) は、もともと量子逆散乱法の文脈で導入されたものである [Skl82]。また、2 重アファイン Hecke 環 [Obl04, EOR07] や Painlevé 方程式の研究 [OR] においても、非可換代数幾何は新たな興味深い視点を提供する。

さて、非可換代数幾何へのアプローチには大まかに分けて 2 種類ある。1 つはアーベル圏を考えるものであり、もう 1 つは適当な enhancement 付きの三角圏 (例えば三角 dg 圏や安定 ∞ 圏) を考えるものである。どちらも一長一短があるが、ここではアーベル

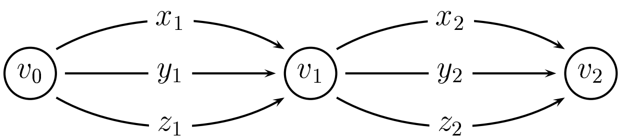

図 1: Beilinson 箙

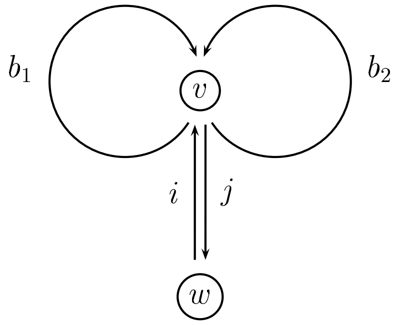

図 2: ADHM 箙

圏を考える立場を取る。アーベル圏があればその導来圏として三角圏が得られるので、こちらの方がより詳しい情報を見ていることになる。

古典的な場合と同じく、非可換多様体のモジュライ理論には局所理論と大域理論がある。局所理論はアーベル圏の変形理論であり、非可換幾何の文脈において [LVdB05, LVdB06] などによって追求された。ここでは、古典的な小平-Spencer 理論において $H^\bullet(T_X)$ が果たす役割が、アーベル圏の Hochschild コホモロジーによって担われている。一方、大域的なモジュライ空間の構成、特に、適当な安定性条件を導入してコンパクトなモジュライ空間をスキームとして構成することは、これまで為されて来なかった。

ある種の代数多様体の連接層の導来圏は、箙を用いて記述されることが知られている。典型的な例は Beilinson によるもので、$\mathbb{P}^2$ 上の連接層の導来圏を図 1 の箙に関係式

$$y_2x_1 - x_2y_1 = 0,\ z_2y_1 - y_2z_1 = 0,\ x_2z_1 - z_2x_1 = 0 \tag{3}$$

を入れたものの表現の導来圏と同定する [Beĭ78]。これによって、$\mathbb{P}^2$ 上の連接層のモジュライ空間を調べる問題は、(少なくとも原理的には) 線形代数の問題に帰着される。これと関連の深い重要な仕事に、S^4 上のインスタントン (あるいは $\mathbb{P}^2$ 上の枠付きベクトル束) の同型類が図 2 の箙に

$$[b_1, b_2] + ij = 0 \tag{4}$$

という関係式を入れたものの表現の同型類と対応することを示した Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin の結果がある [AHDM78]。また、この関係式を変形したものと非可換多様体上のインスタントンの関係が [NS98, NS07] において議論された。

ベクトル束が箙の表現と対応しているならば、空間は箙の関係式と対応していると考える事は自然である。この考えに基いて、我々は箙の関係式のモジュライ函手を定義し [AOUb, Definition 3.5]、それが代数的スタックで表現されることを示した [AOUb, Proposition 3.6]。

また、ある有限次元代数が関係付き箙で記述されている時に、代数の変形が必ず箙の関係式の変形から来ること [AOUb, Proposition 5.1] と、変形理論を司る Hochschild 複体が高次の構造も込めて導来同値で不変であること [Kel, LVdB05] から、局所的には非可換代数多様体の変形は必ず箙の関係式の変形から来る。従って、箙の関係式のモジュライは対応する非可換代数多様体のモジュライの良い近似を与えると期待される。

更に、我々は射影平面、2 次曲面および 3 次曲面に対して、箙の関係式のコンパクトなモジュライスキームを、幾何学的不変式論を用いることによって構成した。$\mathbb{P}^2$ の導

来圏を記述する図1の箙に対しては、関係式のコンパクトなモジュライ空間は

$$\overline{M}_{\mathrm{rel}} := \mathrm{Gr}_3\left(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3\right) /\!/ \, \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \tag{5}$$

で与えられ [AOUb]、量子情報理論において 3 qutrit の SLOCC (stochastic local operations and classical communication) 同値類のモジュライ空間として研究されている

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3\right) /\!/ \, \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}(6, 9, 12) \tag{6}$$

と自然に同型になる [OUb]．また、このモジュライ空間は [ATVdB90] によって分類された非可換射影平面の双有理的なパラメトリゼーションを与える。

$\mathbb{P}^2$ の連接層の導来圏を記述する箙は一通りではなく、Markov triple (すなわち Diophantus 方程式 $a^2 + b^2 + c^2 = abc$ を満たす自然数の3つ組 (a, b, c)) と1対1に対応することが知られている。Markov triple の集合は3つの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の自由積 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と1対1に対応することが知られており、特に無限集合になる。異なる箙に対応する関係式のモジュライ空間の間には canonical な (即ち、基底の取り方に依らない) 同型が存在し、しかもこの同型は完備例外列やポテンシャル付き箙 (quiver with relation) の変異 (mutation) と整合的である [OUa]。

2次曲面の連接層の導来圏は箙

$$\begin{tikzcd} v_0 \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & v_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & v_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & v_3 \end{tikzcd} \tag{7}$$

によって記述され，関係式は $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の2次元部分空間になる．関係式のコンパクトなモジュライ空間は

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\mathrm{rel}} &= \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) /\!/ \, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &(8)\\ &= \mathbb{P}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) /\!/ \, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &(9) \end{aligned}$$

で与えられるが，これは量子情報理論において 4 qubit のモジュライ空間として研究されており，不変式環は次数 2, 4, 4, 6 の元で自由に生成される [LT03]．また、このモジュライ空間は [VdB11] によって分類された非可換2次曲面の双有理的なパラメトリゼーションを与える。

3次曲面の連接層の導来圏は箙

$$\begin{tikzcd} v_{0,0} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & v_{1,0} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & v_{2,0} \\ v_{0,1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v_{1,1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v_{2,1} \\ v_{0,2} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] & v_{1,2} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] & v_{2,2}. \end{tikzcd} \tag{10}$$

によって記述され，関係式は $i, j = 0, 1, 2$ の各々に対して，$v_{0,i}$ から $v_{2,j}$ への長さ2の道のなす3次元ベクトル空間の1次元部分空間たちからなる．関係式のコンパクトなモジュライ空間は

$$\overline{M}_{\mathrm{rel}} := \left(\mathbb{P}^2\right)^9 /\!/ (\mathbb{C}^\times)^{18} \tag{11}$$

であり，8次元のトーリック多様体をなす [AOUa]。非可換射影平面は可換な3次曲線を因子として含むが、モジュライ空間 $\overline{M}_{\mathrm{rel}}$ は非可換射影平面とその上の3次曲線上の6点の双有理的なパラメトリゼーションを与えている。

[AHDM78] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfel′d, and Yu. I. Manin, *Construction of instantons*, Phys. Lett. A **65** (1978), no. 3, 185–187. MR 598562 (82g:81049)

[AOUa] Tarig Abdelgadir, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda, *Compact moduli of non-commutative cubic surfaces*, in progress.

[AOUb] ———, *Compact moduli of noncommutative projective planes*, arXiv:1411.7770.

[ATVdB90] M. Artin, J. Tate, and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 33–85. MR 1086882 (92e:14002)

[Beĭ78] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69. MR MR509388 (80c:14010b)

[EOR07] Pavel Etingof, Alexei Oblomkov, and Eric Rains, *Generalized double affine Hecke algebras of rank 1 and quantized del Pezzo surfaces*, Adv. Math. **212** (2007), no. 2, 749–796. MR 2329319 (2008h:20006)

[Kel] Bernhard Keller, *Derived invariance of higher structures on the Hochschild complex*, available at `http://www.math.jussieu.fr/ keller/publ/dih.pdf`.

[Kon95] Maxim Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 120–139. MR MR1403918 (97f:32040)

[Kuz10] Alexander Kuznetsov, *Derived categories of cubic fourfolds*, Cohomological and geometric approaches to rationality problems, Progr. Math., vol. 282, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, pp. 219–243. MR 2605171 (2011c:14049)

[LT03] Jean-Gabriel Luque and Jean-Yves Thibon, *Polynomial invariants of four qubits*, Phys. Rev. A (3) **67** (2003), no. 4, 042303, 5. MR 2039690 (2004k:81098)

[LVdB05] Wendy Lowen and Michel Van den Bergh, *Hochschild cohomology of abelian categories and ringed spaces*, Adv. Math. **198** (2005), no. 1, 172–221. MR 2183254 (2007d:18017)

[LVdB06] ———, *Deformation theory of abelian categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 12, 5441–5483 (electronic). MR 2238922 (2008b:18016)

[NS98] Nikita Nekrasov and Albert Schwarz, *Instantons on noncommutative* $\mathbf{R}^4$*, and* $(2,0)$ *superconformal six-dimensional theory*, Comm. Math. Phys. **198** (1998), no. 3, 689–703. MR 1670037 (2000e:81198)

[NS07] T. A. Nevins and J. T. Stafford, *Sklyanin algebras and Hilbert schemes of points*, Adv. Math. **210** (2007), no. 2, 405–478. MR 2303228 (2008f:14002)

[Obl04] Alexei Oblomkov, *Double affine Hecke algebras and Calogero-Moser spaces*, Represent. Theory **8** (2004), 243–266 (electronic). MR 2077482 (2005e:20005)

[OR] Andrei Okounkov and Eric Rains, *Noncommutative geometry and Painlevé equations*, arXiv:1404.5938.

[OUa] Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda, *Markov triples and compact moduli of noncommutative projective planes*, in preparation.

[OUb] ———, *Quantum entanglement, Calabi-Yau manifolds, and noncommutative algebraic geometry*, arXiv:1402.3768.

[Skl82] E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **16** (1982), no. 4, 27–34, 96. MR 684124 (84c:82004)

[VdB11] Michel Van den Bergh, *Noncommutative quadrics*, International Mathematics Research Notices. IMRN (2011), no. 17, 3983–4026. MR MR2836401 (2012m:14004)