

コアメーバとトラス同変なホモロジー的ミラー対称性

植田 一石

大阪大学大学院理学研究科

1 弦理論私見

弦理論はもともと双対共鳴模型と呼ばれ、ハドロン（すなわち陽子や中性子、 π 中間子などの強い相互作用をする素粒子）を記述するための現象論として誕生したが、Yang-Mills 理論が強い相互作用の正しい理論としての地位を確立するとともに、Kelvin 卿の渦原子模型のように科学史の脚注として忘れ去られる運命にあるかと思われた。

しかし、弦理論は滅びなかった。失敗した現象論として始まったこの理論は、自然科学（すなわち、実験によって検証できる科学）としてはいまだかつて一度も成功したことがないにもかかわらず、その美しい数理的構造によって多くの理論家を引き付けてきた。弦理論の（場の量子論と比較した）特徴は整合性を壊さずに理論を弄ることの難しさにあり、また、理論の致命的な矛盾が見つかつては奇想天外な解決策によって不死鳥のように蘇るという紆余曲折に富んだ歴史を持つ。例えば、ボゾンの弦理論の共形アノマリーと呼ばれる深刻な困難は時空の次元を 26 次元 (!) にすることで回避できる。この 26 という数字は Leech 格子の次元 24 に 2 を足したものであり、この事実は Borchers による moonshine 予想の解決にとって本質的である。

弦理論における最大の謎は果たしてこの理論が本当に存在するか（つまり、内部に矛盾を持たないか）である。無矛盾性のために必要な条件は非常に強いので、それらが全て満たされるためには「奇跡」が沢山起こる必要がある。しかし、知られている限りで必要な奇跡は全て実際に起こり、弦理論の存在に対する強力な証拠の一つになっている。

1980 年代半ばに起きたいわゆる超弦理論の第一革命によって、世の中には 5 つの超弦理論が存在して、これらは全て無矛盾であり、しかも 10 次元の超対称性を持つ重力の量子論を与えると考えられるようになった。重力の量子論こそは 20 世紀の素粒子物理学が残した最大の課題であり、宇宙創成やブラックホールを含む時空の幾何学を人類が理解するための鍵である。さらに、Kaluza-Klein 理論のようなかつて失敗したアイデアを貪欲に取り込むことによって、超弦理論はこの世の森羅万象を記述する万物の理論として一部の人々から熱い眼差しを受けるようになった。

そして、1990 年代に起きた超弦理論の第二革命によって、超弦理論はそれまでとは比較にならない幅と奥行きを獲得する。この革命のキーワードは「超対称性」と「双対性」である。超対称性はボゾンとフェルミオンを入れ替える対称性であり、これを理論に課すのはちょうど関数が単に滑らかなだけではなく正則であることを要求するようなものである。一方、双対性とは見掛けの異なる 2 つの理論

が実は同一の理論の異なる記述を与えていることを指す。一般に双対な理論の間では問題の難しさが保存されないので、双対な理論の組を見つけることができれば、これによって双方の理論の理解が深まるだけでなく、問題に応じて双対な記述の一方を使うことによって他方では解けそうもない問題に対して大きな進歩をもたらすことができる。これはちょうど Fourier 変換によって微分方程式という難しい問題を代数方程式というより易しい問題に変換できるのと似ている。

第二革命期の成果としては例えば次のようなものが挙げられる。まず、5つあると思われていた超弦理論は Witten らによって M 理論と呼ばれる 11 次元の理論の異なる極限であるらしいことが明らかになった。また、NS5 ブレーンや D ブレーンのような、新しい空間的に広がった対象が弦理論に存在していることが分かった。これらによってもたらされる理論の豊かさは、双対性が成り立つためにはぜひとも必要である。さらに、4 次元で $N = 4$ の超 Yang-Mills 理論が 5 次元の反 de Sitter 空間と 5 次元球面の直積の上の IIB 型超弦理論と双対であるという Maldacena による驚異的な予想（とそれに始まる AdS/CFT 対応、そしてその基礎となる 't Hooft らのホログラフィー原理）は計り知れない衝撃を弦の理論家に限らない理論物理学者に与えた。

5つある超弦理論が実は M 理論の異なる極限であるとする、これは超弦理論は本質的にはただ 1 つしか無いことを意味する。また、粒子やそれらの間の相互作用、種々の結合定数などを好きに選べる場の量子論と違い、超弦理論には手で調整できるパラメーターが、連続なものも離散的なものも含めて全く存在しない。このことは弦理論の信者によって弦理論が場の量子論に対して持つ大きな利点であるとされた。しかし、これは半分は正しいが、半分は間違っている。弦理論には任意パラメーターがないが、弦理論の真空（基底状態）にはどんな場の量子論よりも大きな自由度（つまり今のところ理論からは決定できず、手で選ぶしかないパラメーター）が存在する。言い換えれば、弦理論には理論のモジュライはないが、そのかわりに途方もなく大きな真空のモジュライがある。そして、この真空のモジュライの中には、全ての Calabi-Yau 3-fold（すなわち Ricci 平坦な複素 3 次元の Kähler 多様体）のモジュライ空間やその上の正則ベクトル束のモジュライ空間、それに様々なゲージ群に対する $\mathbb{R}^4$ 上の Yang-Mills インスタントンのモジュライ空間などが入っていると考えられている。

この巨大な真空のモジュライは弦理論の持つ長所であり、短所でもある。自由度の大きさは理論の豊かさを示しているが、同時に予言能力を奪うからである。実際、弦理論はあまりにも豊かなので、どんな実験結果であろうと説明できると言う人もいる。より楽観的に、弦理論の非摂動的な理解が進めば、弦理論が真空を選ぶメカニズムも明らかになり、例えば陽子の質量のような現実的な量に関しても予言ができるはずだと主張する人もいる。しかし、予言能力についてはさておき、超弦理論の存在を仮定すれば、その可能な真空を一つ取るごとに重力を含む量子論が一つ定まることになる。この点を重視し、超弦理論は理論を生成する理論であるとして、M 理論の M は Mother から来ると主張する人もいる。（他には Membrane や Mystery、Matrix などの候補がある。）

さて、Witten に代表される弦の理論家は、理論物理学に限らず数学に対しても少なからぬ影響を与えてきた。彼らの研究のいくつかは数学者に大きな衝撃を与え、それらを理解しあるいは証明しようとする努力によって数学に長足の進歩をもたらしたのである。その例としては結び目や3次元多様体の量子不変量、曲面上のベクトル束のモジュライ空間の幾何や Verlinde 公式、4次元多様体の Seiberg-Witten 不変量やインスタントンの数え上げに関する Nekrasov 予想などがあり、枚挙にいとまがない。

弦理論は失敗した現象論として生まれたが、やがて最も高貴な力である重力と、人類の自然に対する最も基本的な理解である量子論を調和させ、この世界にはたらく全ての力と元素を奥の奥で統べている究極の理論であるという宗教に成長した。しかし、近年の数学に対する弦理論のインパクトを考えると、むしろ弦理論は物理学ではなく数学を統一しようとしている様にすら見える。実際、これまでも既に弦理論は Riemann 面のモジュライ空間とモンスター群論、KdV 方程式、Donaldson 理論といった似ても似つかないものを結び付けてきた。また、Kontsevich による Poisson 多様体の変形量子化に代表される一連の仕事は、Riemann 面のモジュライ空間が全ての結合代数の変形をも背後から支配していることを示しているように見える。そこで、ここでは（多少の無理は承知で）次のようなスローガンを唱えてみたい：

- 弦理論とは、Riemann 面のモジュライ空間が全数学を闇から支配していると信じる宗教である。

この背後にある仕組みを理解することが、数学の立場から弦理論を研究する者に求められていることではないだろうか。

2 ホモロジー的ミラー対称性の目指すもの

ミラー対称性は超弦理論の第二革命の前夜に登場した。あるいは露払いと言ってもいいかも知れない（第二革命前夜のもう一つの重要な発見として、Seiberg-Witten 理論も忘れることはできない。そして、この理論も様々な意味でミラー対称性に関わっている）。そして、第二革命期に登場した S 双対性や AdS/CFT 対応などのより過激な双対性に比べると、比較的扱いやすいものと考えられている。にもかかわらず、その代数幾何を初めとする数学の諸分野へのインパクトにはいまだに計り知れないものがある。

ミラー対称性はもともと2次元の超共形場理論が持つある対称性から始まった。2次元で $N = (2, 2)$ の超共形代数にある左向きの $U(1)$ カレントの符合を逆にするという操作は超共形場理論のレベルでは自明である。そもそものミラー対称性は、ある超共形場理論が Calabi-Yau 多様体から来ている（すなわち、その Calabi-Yau 多様体をターゲットとする非線型超対称シグマ模型である）とき、この操作を行った後の超共形場理論（それはもとの理論と同値な別の超共形場理論になるわけだ

が) も再び (一般に最初のものとは別の) Calabi–Yau 多様体から来るという予想であり、Calabi–Yau 多様体の幾何学に対して様々な自明でない予言をする。ミラー対称性に関わる数学的な予想は一般に「任意の Calabi–Yau 3-fold M に対してある Calabi–Yau 3-fold W が存在して何々が成り立つ」という形をしており、例えば**位相的ミラー予想**においてはこの何々の部分に Hodge 数の鏡像対称性

$$h^{i,j}(M) = h^{i,3-j}(W)$$

が入る。この予想はミラー対称性に関わる数学の予想の中では最も易しいものの一つであるが、McKay 対応や弦理論的 Hodge 数、軌道体コホモロジーなどの発展を促した。また、Candelas–de la Ossa–Green–Parkes [7] に始まる有名な**古典的ミラー予想**は、 M の Gromov–Witten 不変量というシンプレクティック幾何的 (あるいは数え上げ幾何的) な不変量が W の周期という複素幾何的 (あるいは Hodge 理論的) な量と関わることを主張し、その例として $\mathbb{P}^4$ 内の 5 次超曲面の上の有理曲線の数の母関数がある Gelfand–Kapranov–Zelevinsky 型の超幾何級数によって表されるという驚異的な予想をもたらした。

この古典的ミラー予想は、トーリック多様体の中の完全交叉に対しては Givental らによって証明されたが、彼らの証明はトラス作用に対する同変コホモロジーの局所化定理を使った計算に基づいており、証明された後もそもそも何故そのような関係が存在するのかという疑問は謎のまま残された。

Kontsevich は 1994 年の ICM における講演 [22] において、ミラー対称性に対する概念的な理解を与えるべく次の**ホモロジー的ミラー予想**を提唱した。

予想 1 (Kontsevich). 任意の Calabi–Yau 多様体 M に対しある Calabi–Yau 多様体 W が存在して、 A_∞ 圏の同値

$$D^b \mathfrak{Fut} M \cong D^b \text{coh } W$$

が存在する。

ここで A_∞ 圏とは圏の概念の拡張であり、射の合成が結合律を満たさないが、射の微分や複数の射の高次の合成などといった操作が与えられていて、それらが A_∞ 関係式と呼ばれる複雑な整合性条件を満たすものを指す (これらの整合性条件の初めのいくつかは結合律や Leibniz 束がコホモロジーのレベルで成立することを主張している)。さらに、 A_∞ 圏の同値はホモトピー同値で定め、必要に応じて A_∞ 圏は三角圏の構造を持っていると仮定する。従って、 A_∞ 圏に馴染みのない読者は以下で A_∞ 圏を三角圏に読み替えてもらいたい (Bondal–Kapranov [5] の意味で enhance された三角圏と読み替えるとより正確である)。また、 A_∞ 圏で適当な条件を満たす内積を持つもの (これは多様体が Calabi–Yau であることに対応する条件である) を巡回的 A_∞ 圏と呼ぶ。

このホモロジー的ミラー予想の系として M の Gromov–Witten 不変量と W の周期の関係に関する古典的ミラー予想が得られるであろうというのが Kontsevich のプログラムである。これを解説するために少し準備をする。

オペラッドは反復ループ空間のホモトピー型の研究の過程で May によって導入された対象であり、種々の代数的構造（結合代数、可換代数、Lie 代数や A_∞ 代数、 L_∞ 代数など）を記述するための言葉を提供する．オペラッドとは大雑把に言うところ、入りが複数個あつて出口が一つしかないような操作の集合と、それらの操作が満たすべき公理（結合律や可換律、Jacobi 恒等式など）の組である．また、 $\mathcal{P}$ をオペラッドとすると、ベクトル空間とその上の操作の組で $\mathcal{P}$ で決まる公理を満たすものを $\mathcal{P}$ 上の代数と呼ぶ．さらに、オペラッドの一般化として PROP という概念があり、そこでは入りが複数個であるような操作（例えば余代数の余積は入りが 1 つ、出口が 2 つである）を許す．オペラッドの定義は長い、PROP の定義は簡単である：

定義 2. PROP とは狭義の対称モノイド圏 (strict symmetric monoidal category) で、対象の集合が自然数の集合 $\mathbb{N}$ に一致し、任意の対象 $m, n \in \mathbb{N}$ に対しモノイド圏の積 $\otimes$ が

$$m \otimes n = m + n \in \mathbb{N}$$

を満たすものを指す．

さて、パラメトライズされた境界を持つコンパクトな Riemann 面のなす PROP $\mathcal{M}$ を次のように定義する： $\mathcal{M}$ の対象 $m, n \in \mathbb{N}$ に対し射の集合 $\mathcal{M}(m, n)$ は、コンパクトな 2 次元 Riemann 多様体で、境界は $n + m$ 個の S^1 と同相であり、境界の連結成分の集合には順序が入っていて、そのうちの初めの n 個の近傍には $S^1 \times [0, \epsilon)$ との等長写像が、また残りの m 個の近傍には $S^1 \times (-\epsilon, 0]$ との等長写像が与えられているようなものの共形同値類のなすモジュライ空間とする．モノイド圏としての積は Riemann 多様体の非交和 (disjoint union) で定め、射の合成は Riemann 多様体を境界で繋ぎ合わせるによって定義される．

$\mathcal{M}$ は位相空間に値をとる PROP（つまり射の集合が位相空間で、積と合成が連続写像であるような PROP）になるが、これを特異鎖複体を取るという函手 *Chains* で送ると、次数付き微分 PROP（すなわち次数付き微分加群に値をとる PROP） $Chains(\mathcal{M})$ が得られる．

また、上の定義においてパラメトライズされた境界付きの Riemann 多様体を考えるかわりに、安定な点付き曲線を考えることもできる．安定な点付き曲線とは、高々結節点 (node) を持つような完備代数曲線であつて、その上に有限個の順序付けられた点の集合が与えられ、自己同型群が有限群になるようなものを指す．そこで、自然数 m と n に対して $\overline{\mathcal{M}}(m, n)$ を安定 $n + m$ 点付き曲線のモジュライ空間とし、積を非交和、合成を印付きの点をくっつける（従つて合成によって得られる曲線には必ず結節点がある）ことで定義すると、位相空間に値をとる別のオペラッド $\overline{\mathcal{M}}$ ができる．

この状況で Kontsevich のプログラム [24] は次のようになる：

1. PROP $Chains(\mathcal{M})$ はリボングラフを用いて組み合わせ論的に定義されるある PROP R と擬同型である．

2. 任意の巡回的 A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対し、 $\mathcal{A}$ の Hochschild 鎖複体 $C_\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ は R 上の代数になる.
3. $\mathcal{A}$ の Hochschild-to-cyclic スペクトル系列が退化する時、この R 上の代数は $\text{Chains}(\overline{\mathcal{M}})$ 上の代数に拡張され、Kontsevich–Manin [20] の意味でのコホモロジー的場の理論が定まる.
4. $\mathcal{A}$ が Calabi–Yau 多様体 M の深谷圏 $D^b \text{fu} M$ から来る時、 $\mathcal{A}$ の Hochschild-to-cyclic スペクトル系列は退化して、その結果得られるコホモロジー的場の理論は M の Gromov–Witten 理論と一致する.
5. $\mathcal{A}$ が Calabi–Yau 多様体 W の接続層の導来圏 $D^b \text{coh } W$ から来る時、 $\mathcal{A}$ の Hochschild-to-cyclic スペクトル系列は退化して、その結果得られるコホモロジー的場の理論は W の Bershadsky–Cecotti–Ooguri–Vafa [4] の意味での重力小平–Spencer 理論と一致する.

1 は Strebel 微分を用いたモジュライ空間のセル分割に関わる. このようなセル分割は、安定付き曲線のモジュライ空間上の交点数の母関数が KdV 方程式の τ 関数であるという Witten 予想を Kontsevich [21] が解決する際に有効に用いられた. 2 は Deligne 予想の広範な拡張であり、純粋に代数的あるいは組み合わせ論的な主張である. 3 はこのプログラムの最も本質的な部分である. Hochschild–Kostant–Rosenberg 型の定理により、代数多様体の接続層の導来圏の Hochschild ホモロジーは Hodge コホモロジーに等しい. 一方、巡回ホモロジーは非可換多様体の de Rham コホモロジーとして Connes によって導入されたものであり、代数多様体の接続層の導来圏に対しては de Rham コホモロジーを与える. 従って、この場合の Hochschild-to-cyclic スペクトル系列は馴染み深い Hodge-to-de Rham スペクトル系列になる. これが退化するというのは Hodge 理論の要石であり、この意味で 3 は Hodge 理論の非可換多様体への一般化である. 4 は深谷圏の高種数への一般化と Gromov–Witten 理論とを統一するような理論 (いわゆる open-closed Gromov–Witten 理論) を建設することによって自然に解決され则认为られるが、その道のりはまだまだ険しいようである. 5 は現状では全くの謎であり、登場から 10 年以上が経つ今でも、重力小平–Spencer 理論は数学者の理解を拒んでいる.

重力小平–Spencer 理論は種数 0 において周期に基づく Candelas らの計算を再現するはず (例えば Barannikov–Kontsevich [2]、Barannikov [3] などを見よ) なので、上の Kontsevich のプログラムが完成すれば、ホモロジー的ミラー予想から古典的ミラー予想が従うと考えられる. しかし、このプログラムの重要性は単にミラー対称性に概念的な理解を与えるだけではなく、 **A_∞ 圏を空間と見て、その幾何学を研究する**という新しい見方を提供するところにある.

空間をその上の関数環の観点から捉えて、その非可換化によって非可換幾何を定義するというのは Connes [8] 等によって強調された視点である. 一方、 A_∞ 圏

を空間だと思うのは関数環として単なる非可換環だけではなく次数付き微分代数やその一般化である A_∞ 代数まで許すことに対応する．また、別の見方としては関数環ではなく関数環上の加群のなす圏の導来圏を考えて、それを一般の A_∞ 圏にまで拡張することで空間の概念を一般化しようとしていると考えることもできる．関数環上の加群はおおよそベクトル束や部分多様体などに対応していると考えられるので、空間を与えるかわりにその上のベクトル束や部分多様体のなす圏（さらにはその導来圏）を考えて、そういうものを与えることと空間を与えることが同値だと思ってしまうのもよい．

しかし、このような「非可換幾何」が単なるスローガンを越えて実体を獲得するには、それが意味のある問題を内部に含んでいなければならない．言い換えると、 A_∞ 圏に対して定まる興味ある幾何学的対象で、 A_∞ 圏のホモトピー同値に関して不変なものが存在するか、ということである．この問いに対してホモロジー的ミラー予想が示唆する答えとしては、先に挙げた **Hodge 理論** や **コホモロジー的場の理論** の他に **モジュライ理論** などが考えられる．

$\mathcal{A}$ を A_∞ 圏とすると、 $\mathcal{A}$ 自身や $\mathcal{A}$ の対象のモジュライ空間を考えることができる．これらは A_∞ 圏から自然に定まるより古典的な意味での空間であると考えられ、一般に L_∞ 代数や A_∞ 代数に対する Maurer–Cartan 方程式の解のなす空間をゲージ変換群の作用で割った形をしている．しかし、Maurer–Cartan 方程式が横断的でなかったり、ゲージ変換群の作用が自由でなかったりすることによって、モジュライ空間が指数定理から期待される次元を持たなかったり、ゲージ変換群の作用による商空間が定義されなかったりすることがしばしば起こる．これらの問題点はこれまでのところ仮想基本類や倉西構造、代数的スタックなどといった道具を使うことによって処理されてきたが、より包括的かつ自然な枠組みが求められているように思われる．

また、通常の変形理論では 0 次のコホモロジー群がゲージ変換群の接空間、1 次のコホモロジー群が変形の接空間、そして 2 次のコホモロジー群が変形に対する障害の接空間になっている．しかし、Barannikov–Kontsevich [2] などに現れているように、コホモロジー的場の理論に対する応用の観点からは、全ての次数のコホモロジー群が接空間になっているようなモジュライ空間（いわゆる拡大モジュライ空間）を考えるのが自然である．

コホモロジー群はモジュライ空間の線形近似であるが、これに関しては導来圏の理論があり、コホモロジー（すなわち核を像で割ったもの）を考えるのではなく、コホモロジーを取る前の複体のホモトピー圏を擬同型で局所化することによって、自然な形で理論を展開することができる．これに対応して、モジュライ理論に関しても Maurer–Cartan 方程式の解空間をゲージ変換群で割った空間を考えるのではなく、 A_∞ 代数や L_∞ 代数と Maurer–Cartan 方程式、それにゲージ変換群の作用の組を考えることによってモジュライ空間を考えている「振り」をしようという考え方があある．例えば、内積を持つ微分 Gerstenhaber–Batalin–Vilkovyski 代数で適当な公理を満たすものが与えられればそのコホモロジー群の上に Frobenius 多様体の構造が定まるという Barannikov–Kontsevich [2] の結果はこの哲学を実

現している結果の一つと言えるだろう（ただし、これは問題の L_∞ 代数が形式的になるケースなので、導来代数幾何的には単純な部類に入る）。また、Toën や Lurie らによる導来代数幾何学（例えば [33] とその参考文献を見よ）もこれらのモジュライ空間を「正しく」取り扱う枠組みの有力な候補である。

また、ホモロジー的ミラー予想は Calabi–Yau 多様体が必ず Lagrange トーラスファイブレーション（Arnold–Liouville の定理により、コンパクトなシンプレクティック多様体に対して、Lagrange トーラスファイブレーションを与えることと完全可積分系を与えることは同値であることに注意）を持ち、そのトーラスファイブレーションの各ファイバーを双対トーラスに取り換えることでミラー多様体を得られるという **Strominger–Yau–Zaslow 予想** と同値であると期待されている。ホモロジー的ミラー予想から Strominger–Yau–Zaslow 予想を「導出する」にはおおよそ次のような議論をする [32]： M と W をホモロジー的ミラー予想 $D^b \mathfrak{Fut} M \cong D^b \text{coh } W$ が成り立つような Calabi–Yau 多様体の組とする。この時、 W の点 p に対してその上の摩天楼層 $\mathcal{O}_p$ を考えると、これは $D^b \text{coh } W$ の対象であるので、これにホモロジー的ミラー予想で対応する $D^b \mathfrak{Fut} M$ の対象 L があるはずである。一般には L は M の Lagrange 部分多様体の複体であって、必ずしも単独の Lagrange 部分多様体である必要はないが、ここではおおらかに L は単独の Lagrange 部分多様体であると仮定する。ホモロジー的ミラー予想により

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Fut} M}^*(L, L) \cong \text{Hom}_{D^b \text{coh } W}^*(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) \cong \wedge^* \mathbb{C}^3$$

となり、深谷圏における射の空間は Lagrange 部分多様体の Floer コホモロジーであるので、この場合の Floer コホモロジーが通常のコホモロジーと一致すると仮定すると L は位相的にはトーラスでなければならない。 L の深谷圏の対象としてのモジュライ空間の接空間は

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Fut} M}^1(L, L) \cong \mathbb{C}^3$$

であり、実部は L の Lagrange 部分多様体としての変形に、虚部は L 上の平坦 $U(1)$ 束の変形に対応している。 L がトーラスなら L 上の平坦 $U(1)$ 束のモジュライ空間は L の双対トーラスであり、 L のモジュライ空間は L の Lagrange 部分多様体としての実 3 次元のモジュライ空間の上に L の双対トーラスを並べたような構造をしている。一方、ホモロジー的ミラー予想によってこのモジュライ空間は $D^b \text{coh } W$ における対象 $\mathcal{O}_p$ のモジュライ空間でもあるが、これは W 自身になると考えられるので、結局 W は M の Lagrange トーラス L のモジュライ空間であり、しかも L と双対なトーラスによるファイブレーションの構造を持つということになる。

このように A_∞ 圏からスタートして、その対象のモジュライ空間として（一般には導来された意味での）空間を得ることができるが、時としてこのモジュライ空間が代数多様体であって、しかもその上の接続層の導来圏がもとの A_∞ 圏と同型になることがある。このような場合には、空間の概念を拡張しようとして代数多様体から A_∞ 圏の世界に移ったにも関わらず、結果として従来の空間の概念で扱

える範囲を越えなかったということになる．重要な例としては有名な McKay 対応があり、 $SL_2(\mathbb{C})$ や $SL_3(\mathbb{C})$ の有限部分群に対して McKay 簍と呼ばれる関係式付きの簍が対応して、その表現の導来圏が対応する商特異点のクレパントな解消の上の接続層の導来圏と同値になる（2次元の時は Kapranov–Vasserot [17]、3次元の時は Bridgeland–King–Reid [6] による）．従って、この場合には McKay 簍という非可換の対象を考えても、実質的には通常の代数幾何の範囲を越えない．しかし、この場合でも McKay 簍を考えることによって導来圏の生成元や Grothendieck 群などの構造をより良く理解することができる．また、4次元以上になるとクレパントな解消は存在するとは限らないが、McKay 簍の表現の導来圏は定義され、ある意味で対応する商特異点の非可換なクレパント解消を与えていると考えることができる（Van den Bergh [39]）．

上に挙げた Stominger–Yau–Zaslow 予想や McKay 対応はほんの一例であり、モジュライ空間やそれを使った同語反復的な構成は今後ますます重要になると思われる．一方、 A_∞ 代数や導来幾何は変形理論に関わる問題と、それらを自然に取り扱う枠組みを提供する．従って、これらは単に空間の概念を拡張するだけではなく、整数論における複素数や p 進数のように、従来の意味での空間の研究にとっても欠かせない道具になるのではないだろうか．

3 ホモロジー的ミラー予想の函手性

A_∞ 圏を空間とみなす立場からは、既知の空間に対して新しい空間を作る様々な方法に対応する A_∞ 圏の操作を研究するのは自然である．空間として射影代数多様体を考えることにすると、既知の空間から新しい空間を作る方法としては切る、貼る、割る、変形する、掛ける、そして爆発するなどの操作が挙げられる．

ここで「切る」とはその上の適当な関数（より正確には直線束の切断）を考えてその零点を取ること、「貼る」とは二つの空間を共通の部分空間に沿って貼り合わせる、「割る」とは群の作用を考えてそれに対する商空間を取ること、「変形する」とは複素構造を変形すること、「掛ける」とは二つの空間の直積（あるいはより一般にファイブレーション）を考えること、そして「爆発する」とは一点を取り除いて射影空間を埋め戻す（あるいはより一般に、部分集合を取り除いて射影空間束を埋め戻す）操作（ブローアップ）やその逆の操作（ブローダウン）を指す．これらの操作を組み合わせることで、様々な空間を射影空間のような基本的な空間から作ることができ、しかもその方法は一通りではない．例えば、5次の Fermat Calabi–Yau 3-fold

$$M = \{[x_0 : \cdots : x_4] \in \mathbb{P}^4 \mid x_0^5 + \cdots + x_4^5 = 0\}$$

は、 $\mathbb{P}^4$ を反正準束の切断で切ったものだと思っても良いし、5枚の $\mathbb{P}^3$ を貼り合わせた上で、滑らかになるように変形したものだと思っても良い．また、任意の Fermat 多様体は Fermat 曲線 $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0^n + x_1^n + x_2^n = 0\}$ （と有限集

合 $\{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 \mid x_0^n + x_1^n = 0\}$ から直積と爆発、それに有限群による商を取る操作を繰り返すことによって帰納的に構成できる (塩田 [43] を見よ) .

これらの操作で接続層の導来圏がどう変わるかを A_∞ 圏の言葉だけで記述できれば、その操作を必ずしも射影代数多様体の接続層の導来圏からは来ない A_∞ 圏に対して行うことにより、従来の意味での「空間」からは来ない A_∞ 圏をたくさん作ることができると期待される. 実際、「素性の良い」 A_∞ 圏で、代数多様体の接続層の導来圏から来ないものはいろいろ知られている (例えば籠の表現の導来圏や、Orlov [26, 27] の意味での特異点の三角圏など) ので、これらから出発して上のような操作を行うことで得られる A_∞ 圏を組織的に研究することは意味があると思われる.

さらに、シンプレクティック幾何学においても上と対応する操作があって、それらの操作に対する深谷圏の導来圏の振る舞いが対応する代数多様体の接続層の導来圏の振る舞いと一致するとすれば、基本的な空間 (例えば射影空間や Fermat 曲線など) に対するホモロジー的ミラー予想を証明するだけでホモロジー的ミラー予想の成り立つ具体例が無数に得られることになる. 従って、例えば古典的ミラー予想がホモロジー的ミラー予想から従うという Kontsevich のプログラムが完成すれば、空間に対する操作によってホモロジー的ミラー予想の両辺がどう振る舞うかと、基本的な空間に対するホモロジー的ミラー予想を調べるだけで、Gromov–Witten 不変量がミラーの周期で支配されているような多様体を無数に構成できることになる.

実際、Seidel [30] による $\mathbb{P}^3$ の滑らかな 4 次曲面に対するホモロジー的ミラー予想の証明で使われた議論は、まず $\mathbb{P}^3$ に対するホモロジー的ミラー予想を示し、そこから彼が trivial extension と呼んでいる操作を行うことによって $\mathbb{P}^3$ の退化した 4 次曲面に対するホモロジー的ミラー予想を示し、さらにそれを変形することによって滑らかな 4 次曲面に対するホモロジー的ミラー予想を証明していることができる. また、爆発で接続層の導来圏がどう振る舞うかは Orlov [25] により研究され、三角圏の半直交因子 (semiorthogonal summand) を付け加えたり取り除いたりすることに対応することが分かっている. 深谷圏においてこれに対応する操作は Auroux–Katzarkov–Orlov [1], Kerr [19] および筆者 [34] 等によって考察され、ホモロジー的ミラー予想の研究に有効に使われている. 接続層の導来圏において有限群による商に対応する操作は、その群に関して同変な接続層の導来圏を考えることである. つまり、群で割るかわりに、対象と射をその作用に関して同変なものに制限して、割った振りをするのである (あるいは商スタック上の接続層の導来圏を考えるとよい). これは群の作用が固定点を持たなければ割ったものの上で考えるのと同じであるし、固定点を持つ場合でも次元が 3 次元以下で群の作用が正準束を保つ場合は、群で割った後にクレパントな解消を取って、その上で考えたものと同じになる [17, 6] (一般の場合には非可換クレパント解消を考えていることになる [38, 39]). この時、ミラー側ではその群で割るのではなくその群を被覆変換群とするような被覆を考えるという操作が対応すると考えられる. 考えている多様体がトーリック del Pezzo 曲面で、割るための群

がトーラスの有限部分群（あるいはトーラスそれ自身）である場合に、この操作に対するミラーの深谷圏の振る舞いがコアメーバによって制御できるというのが山崎雅人氏と筆者の共著 [37] における主張であり、これを次節以降で紹介したい。

ここで一つ注意しておかなければならないのは、上のような戦略がうまく行くためにはミラー対称性の適用範囲を Calabi–Yau 多様体にとどめておくわけには行かないことである。実際、切って Calabi–Yau 多様体を作るための入れ物として使われる空間はしばしば Fano 多様体であるし、次元の高い Fermat Calabi–Yau 多様体を作る材料としての Fermat 多様体は一般型の多様体になる。従って、仮に Calabi–Yau 多様体にしか興味がないとしても、ホモロジー的ミラー予想を Calabi–Yau から Fano や一般型の多様体に一般化しておくのは重要である。ところが、一見するとこれは不可能に思われる。Floer コホモロジーに対する Poincaré 双対性のために、普通の意味での深谷圏は必ず「Calabi–Yau 的な」（つまり、Serre 関手がシフト関手であるような）圏になるからである。しかし、Fano 多様体の接続層の導来圏と同じような性質を持つ（Kontsevich [23] のアイデアに基づき、Seidel [28] によって導入された）深谷圏の変種があり、有向深谷圏（directed Fukaya category）と呼ばれている。また、一般型多様体に対するミラー対称性に関しては、Gromov–Witten 不変量のレベルではさまざまな研究がある（例えば秦泉寺 [15]、入谷 [14] などを見よ）が、ホモロジー的ミラー予想に関してはまだまだ理解が進んでいないようである（ただし、Katzarkov らがその方面の研究を行っていると聞く）。

4 トーリックスタックとそのミラー

トーリック多様体は代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ をコンパクト化したものであり、その際にどういう境界を付け加えるかは扇と呼ばれる有限の組み合わせ論的な対象によって指定されている。定義によりトーリック多様体は有理多様体であり、しかもその研究は原理的には扇の組み合わせ論に帰着されるので、代数多様体としては単純な部類に属すると考えられるが、それ故に幾何学的なアイデアを具体例で試すための実験場として、あるいは様々な空間を埋め込むための入れ物として、代数幾何の発展を支えてきた。また、純粋に組み合わせ論的な主張で、トーリック幾何を使うことによって容易に証明できるが、組み合わせ論的な証明を与えることが困難なものもあると聞く。トーリック多様体の概念をスタックにまで拡張したものをトーリックスタックと呼び、こちらもスタック的扇と呼ばれる組み合わせ論的な対象で制御されている。

トーリック多様体は扇から決まっているので、その上の接続層の導来圏の構造も扇の組み合わせ論から決まっているはずである。一般の三角圏に対しては、構造を記述するといっても何をすればいいのか良く分からないが、幸い滑らかな射影的トーリック多様体上の接続層の導来圏に対しては完備例外列と呼ばれる有限個の良い生成元が存在することが川又 [18] によって知られている。

三角圏の**完備例外列**とは、対象の有限列 $(E_1, \dots, E_N)$ で適当な条件を満たすも

のを指す．完備例外列を持つ三角圏は、Grothendieck 群が $\{[E_1], \dots, [E_N]\}$ を基底とする自由アーベル群になることや、 $\text{End}(\bigoplus_{i=1}^N E_i)$ を微分次数代数 (differential graded algebra) として考えたものの上の微分次数加群の導来圏と三角圏として同値になるなど、比較的単純な構造を持つ (より正確には、三角圏が Bondal–Kapranov [5] の意味で enhance されている必要がある)．従って、完備例外列を持つ三角圏の構造は $\text{End}(\bigoplus_{i=1}^N E_i)$ の微分次数代数としての構造から一意的に定まる．これはちょうど有限生成群の構造を生成元と関係式で記述するようなものである．滑らかな射影的トーリック多様体の接続層の導来圏はこのようなクラスに属し、Calabi–Yau 多様体や一般型の多様体の接続層の導来圏が一般に無限生成であって、そのような簡明な記述は持たないことと対照的である．

さて、トーリック多様体が扇の組み合わせ論で決まってい、しかもその接続層の導来圏は完備例外列という良い生成元を持つことが知られているので、扇が与えられたときにそこから完備例外列やそれらの間の射を計算する組み合わせ論的なアルゴリズムがあつてしかるべきだと思われる．2次元のトーリック Fano スタックという限定された条件のもとに、そのようなアルゴリズムの候補が物理学者の Hanany–Vegh [13] および Hanany–Herzog–Vegh [12] によって与えられ、その際にブレーンによるタイル張りと呼ばれるトーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の2色グラフが重要な役割を果たす．さらに物理学者の Feng–He–Kennaway–Vafa [9] は、コアメーバを経由することによってこの2色グラフがミラーの有向深谷圏の構造をも同時に記述していると予想した．これらの予想が正しければ、ブレーンによるタイル張りを仲立ちにすることによって2次元のトーリック Fano スタックに対するホモロジー的ミラー予想を自然に理解することができることになり、これを高次元化することによってトーリック多様体に対するミラー対称性の理解を大きく進歩させることができると期待される．

さて、ここでトーリック Fano スタックの定義を与えよう．以下では2次元の場合に限定するが、一般の次元でも (U の定義がもう少し込み入ったものになる他は) 同様である． N を階数が2の自由アーベル群とし、 Δ を $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$ 内の格子多角形 (すなわち、有限個の N の元の凸包) で、原点を内点に含むものとする． Δ の頂点に反時計回りに番号を振ったものを $\{v_i\}_{i=1}^r$ とし (どの頂点を v_1 と呼ぶかは関係がない)、群準同型

$$\phi : \mathbb{Z}^r \rightarrow N$$

を、 i 番目の標準基底 $e_i \in \mathbb{Z}^r$ を $v_i \in N$ に移すものとして定義する．これに $\mathbb{C}^\times$ をテンソルした準同型

$$\phi \otimes \mathbb{C}^\times : (\mathbb{C}^\times)^r \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^2$$

の核を K とおくと、 K は $\mathbb{C}^r$ に自然に作用する：

$$\begin{array}{ccccc} K & \hookrightarrow & \mathbb{C}^r & \rightarrow & \mathbb{C}^r \\ \wr & & \wr & & \wr \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_r) & : & (x_1, \dots, x_r) & \mapsto & (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_r x_r). \end{array}$$

$\mathbb{C}^r$ の開部分集合 U を $r = 3$ の時 $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)\}$, $r \geq 4$ の時 $U = \{(x_i)_{i=1}^r \in \mathbb{C}^n \mid (x_i, x_j) \neq (0, 0) \text{ if } |i - j| > 1\}$ で定めると、 X_Δ は商スタック

$$X_\Delta = [U/K]$$

として定義される.

このような X_Δ に対し、そのミラーは Laurent 多項式

$$W_\Delta(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

で、その Newton 多角形 (すなわち $a_{ij} \neq 0$ となるような $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ の凸包) が Δ になるようなもので与えられる. W_Δ の係数 a_{ij} は M のシンプレクティック構造に対応しており、 W_Δ の有向深谷圏はこれらに依存しない.

W_Δ は代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上の正則関数を定めているが、 W_Δ の有向深谷圏は大雑把に言うと W_Δ の消滅サイクルを対象、それらの間の Floer コホモロジー (より正確にはコホモロジーを取る前の複体) を射とするような A_∞ 圏である. まず、 $(\mathbb{C}^\times)^2$ に

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{dx \wedge d\bar{x}}{|x|^2} + \frac{dy \wedge d\bar{y}}{|y|^2} \right)$$

を Kähler 形式とする完備な Kähler 構造を入れて、この Kähler 形式を W_Δ の原点におけるファイバー $W_\Delta^{-1}(0)$ に制限することによって $W_\Delta^{-1}(0)$ にシンプレクティック構造を入れる. ここで、 W_Δ の係数を一般に取って 0 が W_Δ の臨界値ではないと仮定した. さらに、 W_Δ の臨界点が全て非退化である (すなわち Hesse 行列式が消えず、Morse の補題によって局所座標を適当に選ぶとその近傍で W_Δ が二次式で近似される) と仮定する. W_Δ 平面上の臨界値と交わらない道 $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ と始点 $p \in W_\Delta^{-1}(c(0))$ が与えられたとき、 p を始点とする c の水平な持ち上げ $\tilde{c}_p: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^2$ が、任意の $t \in [0, 1]$ に対して接ベクトル $\tilde{c}'_p(t)$ が W_Δ のファイバー $W_\Delta^{-1}(c(t))$ の接空間と $(\mathbb{C}^\times)^2$ の Kähler 計量に関して直交するという条件で定義される.

さて、 W_Δ の臨界値の集合に適当に順序を入れて $(p_i)_{i=1}^N$ と置くと、複素平面上の道の列 $(c_i)_{i=1}^N$ が distinguished set of vanishing paths であるとは、任意の $1 \leq i \leq N$ と $1 \leq j < k \leq N$ に対して以下の条件を満たすことを指す:

1. $c_i(0) = 0$ かつ $c_i(1) = p_i$.
2. c_i は自己交叉を持たない.
3. c_j と c_k は原点のみで交わる.
4. $c'_i(0) \neq 0$ かつ $\arg c'_j(0) > \arg c'_k(0)$.

ここで、 $\arg(\bullet)$ の分枝は適当に選んで固定しておいたとする．この時、 c_i に沿った消滅サイクルが

$$C_i = \{p \in W_{\Delta}^{-1}(0) \mid \lim_{t \rightarrow 1} \tilde{c}_p(t) = p_i\}$$

で定まり、 $W_{\Delta}^{-1}(0)$ の Lagrange 部分多様体になる．これらの消滅サイクルが $W_{\Delta}^{-1}(0)$ の中間次元のホモロジー群において生成する自由アーベル群に交点数で 2 次形式を定めたものは Milnor 格子と呼ばれ、特異点論における重要な研究対象である．Floer 複体の Euler 数が交点数を与えることから、 W_{Δ} の有向深谷圏はこの Milnor 格子の圏論化（categorification、つまりその K 群に Euler 形式で 2 次形式を入れたものが Milnor 格子になる）であり、Milnor 格子よりも精密な情報を持つ W_{Δ} の不変量である．これを厳密に定義するのは易しくないが、大雑把に言うと

- 対象の集合は消滅サイクルであり；

$$\mathfrak{Ob}(\mathfrak{Fuk}^{\rightarrow} W_{\Delta}) = (C_1, \dots, C_N),$$

- C_i と C_j の間の射の集合は

$$\mathrm{hom}(C_i, C_j) = \begin{cases} 0 & i > j, \\ \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{C_i} & i = j, \\ \bigoplus_{p \in C_i \cap C_j} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{p\} & i < j \end{cases}$$

で与えられる次数付きベクトル空間であって、

- $k = 1, 2, \dots$ に対し射の合成

$$\mathfrak{m}_k : \mathrm{hom}(C_{i_{k-1}}, C_{i_k})[1] \otimes \dots \otimes \mathrm{hom}(C_{i_0}, C_{i_1})[1] \longrightarrow \mathrm{hom}(C_{i_0}, C_{i_k})[1]$$

は消滅サイクルたちを境界に持つような正則円盤の個数を数えることによって得られる

ような A_{∞} 圏である．詳しくは Fukaya–Oh–Ohta–Ono [10]、Seidel [28, 31] などを見よ．

こうして定義された有向深谷圏は A_{∞} 圏であるので、twisted complex [5, 22] を使うことによってその導来圏が定義される．次はトーリック Fano スタックに対するホモロジー的ミラー予想であり、ここでは簡単のため 2 次元の場合に限ったが、一般の次元でも主張は全く同様である：

予想 3 (Kontsevich [23]). 任意の格子多角形 Δ に対し、対応するトーリック Fano スタックの連接層の導来圏と、Laurent 多項式の有向深谷圏の導来圏は A_{∞} 圏として同値である：

$$D^b \mathrm{coh} X_{\Delta} \cong D^b \mathfrak{Fuk}^{\rightarrow} W_{\Delta}.$$

さて、Milnor 格子の精密化という観点からも、またミラー対称性への応用の観点からも、Laurent 多項式のファイバーとその中の消滅サイクルのシンプレクティック幾何を研究することは重要なのであるが、これらは非線型の対象であり、直接研究するのは難しい。適当な方法でこれを区分線形（あるいは組み合わせ論的）な対象に置き換えたものが次節で登場する南国の生き物であり、これによって問題の本質を損なうことなく対象を扱いやすいものに取り換えることが出来る。

5 南国の生き物たち

「トロピカル」という単語は「熱帯」と訳すのが普通であるが、「フランス人から見たブラジル」というそもそものニュアンスをより正確に伝えるために、ここでは橋本義武氏によって筆者に提案された「南国」という訳を採用する。ブレーンによるタイル張りは2次元の実トーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の上の2色グラフ（すなわち、頂点が白と黒の二色に塗り分けられており、辺は必ず違う色の頂点を結ぶようなグラフ）であり、2次元のトーリック Fano スタックの接続層の導来圏（より正確にはその上の完備例外列）の構造とミラーの有向深谷圏の構造（あるいは消滅サイクルの Floer 複体）の双方を同時に記述すると予想されている組み合わせ論的な対象である。この予想はもともと物理学者（Hanany–Vegh [13]、Feng–He–Kennaway–Vafa [9]、Hanany–Herzog–Vegh [12] やそこに挙げられている参考文献を見よ）によるものであり、山崎氏との共著 [37] ではこの予想をトーリック del Pezzo 曲面の場合に検証した。ブレーンによるタイル張りがいかにしてトーリック Fano スタック上の完備例外列の構造を記述するかに関しては Hanany–Herzog–Vegh [12] や [37] を見てもらうことにして、ここではブレーンによるタイル張りとはミラーの深谷圏の関係を紹介しよう。

まずはアメーバの定義を思い出そう（より詳しくは例えば Kirrilov–前野 [42] やその参考文献を参照のこと）：

定義 4 (Gelfand–Kapranov–Zelevinsky [11]). Z を代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ の解析的部分集合とし、

$$\begin{array}{ccc} \text{Log} : (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y) & \mapsto & (\log |x|, \log |y|) \end{array}$$

を対数写像とする。この時、 Z の対数写像による像 $\text{Log}(Z)$ を Z のアメーバと呼ぶ。

このアメーバを南国で天日干しして骨格を取り出すことによって**トロピカル曲線**が得られる。例えば、 $x + y + \frac{1}{xy} + 3 = 0$ のアメーバと対応するトロピカル曲線は図 1 のようになる。

コアメーバはこのアメーバの親戚で、絶対値の対数のかわりに偏角を考えたものである：

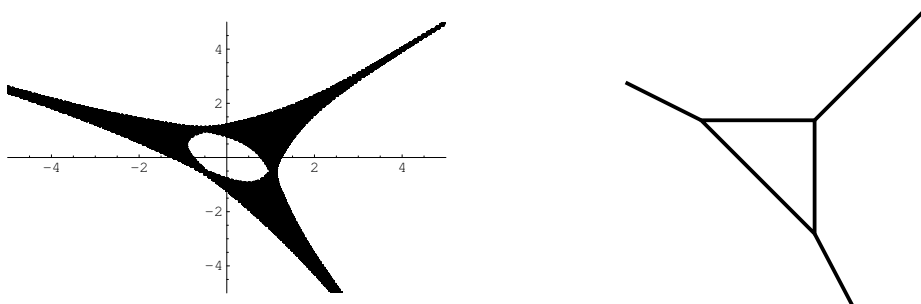


図 1: $x + y + \frac{1}{xy} + 3 = 0$ のアメーバと対応するトロピカル曲線

定義 5 (Passare–Tsikh). Z を代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ の解析的部分集合とし、

$$\begin{array}{ccc} \text{Arg} : (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \\ \Psi & & \Psi \\ (x, y) & \mapsto & (\arg x, \arg y) \end{array}$$

を偏角写像とする．この時、 Z の偏角写像による像 $\text{Arg}(Z)$ を Z のコアアメーバと呼ぶ．

このコアアメーバの骨格はブレーンによるタイル張りと呼ばれるトーラス上の 2 色グラフを与える．一般の Laurent 多項式 W に対してその零点のコアメーバの形は複雑であるが、 W が単項式 3 つの和でその Newton 多角形が三角形になる時には $W^{-1}(0)$ のコアアメーバは単純な形をしており、2 色グラフとの関係も見やすいので、ここではその場合に話を限定する．この時、偏角写像の値域であるトーラスに適当に向きを与えておくと、次が成り立つ：

- $W^{-1}(0)$ のコアアメーバは偶数個の開三角形 $U_1, \dots, U_{2N}$ とその頂点たち $E_1, \dots, E_{3N}$ の和集合になる．
- $W^{-1}(0)$ からそのコアアメーバへの偏角写像は、各 U_i の逆像に制限すると微分同相写像を与える．
- 偏角写像による頂点 E_i の逆像は开区間と同相である．
- 各頂点 E_i に対し、それを頂点とする三角形が 2 つだけ存在する．
- 偏角写像を隣接する開三角形 U_i と U_j に制限したものは、一方では向きを保ち、他方では向きを保たない．

隣接する U_i と U_j に対し、その頂点の近傍で偏角写像はちょうど捻ったりボンを平面に射影するように振る舞う（図 2 を見よ）．従って、次のようにして偏角写像の値域であるトーラス上の 2 色グラフを定義することができる：

- 頂点の集合は三角形 $U_1, \dots, U_{2N}$ の重心の集合である．

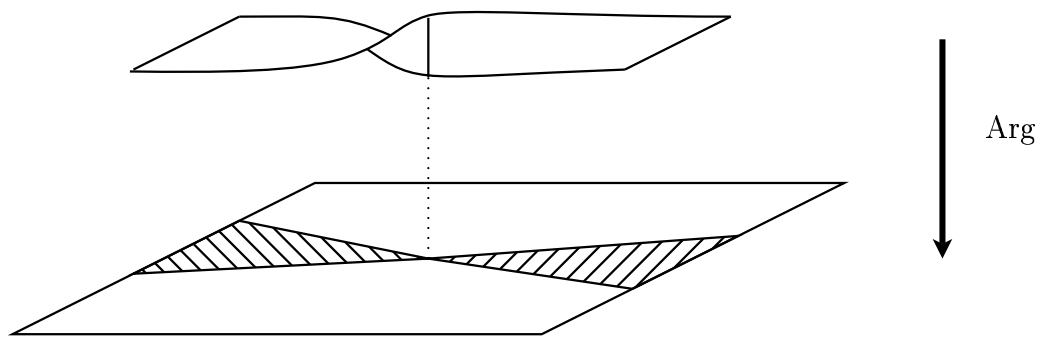


図 2: コアメーバの頂点の近傍での偏角写像の振る舞い

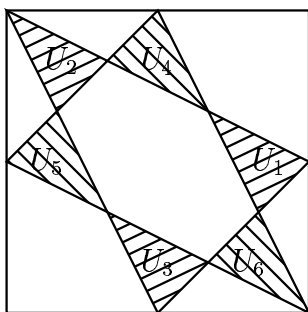


図 3: $W^{-1}(0)$ のコアメーバ

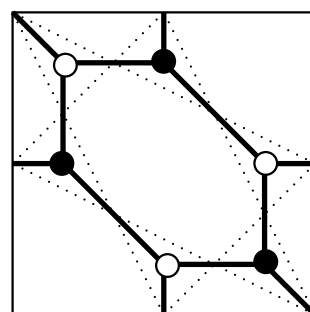


図 4: 対応する 2 色グラフ

- 2つの頂点は、対応する開三角形が頂点を共有するとき辺で結ぶ。従って、辺の集合は $\{E_1, \dots, E_{3N}\}$ と 1 対 1 に対応している。
- 三角形 U_i に対応する頂点の色は、偏角写像を U_i の逆像に制限したものが向きを保つとき白、保たないとき黒とする。

例として、

$$W(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

の零点のコアメーバと対応する 2 色グラフを図 3 と図 4 に与える。この W の Newton 多角形に対応するトーリック多様体は射影平面 $\mathbb{P}^2$ である。三角形の場合のコアメーバと 2 色グラフについて詳しくは [35, 41] を、平行四辺形やより一般のトーリック del Pezzo 曲面に対応する場合には [36, 37] を見よ。

2 色グラフが与えられれば、その各頂点に対して円盤を用意して、それらを辺で指定される通りに貼り合わせることによって $W^{-1}(0)$ が得られる。例えば図 4 の 2 色グラフに対してこの操作を実際に行うと、図 9 にあるようなトーラスから 3 点を除いた曲面が得られる。従って、2 色グラフを見れば $W^{-1}(0)$ のトポロジーが分かるのだが、さらに重要なことに、 W の消滅サイクルが 2 色グラフの面と 1 対 1 に対応し、結果として W の有向深谷圏 $\mathfrak{Fuk}^{\rightarrow} W$ の構造が 2 色グラフから読

み取れるのである．これを上の例で説明しよう．この W の臨界点は、

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

を解いて

$$(x, y) = (1, 1), (\omega, \omega), (\omega^2, \omega^2)$$

となり、対応する臨界値は

$$W = 3, 3\omega, 3\omega^2$$

となる．ただし、 $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ は1の原始3乗根である．図5にあるように、原点から W の臨界値までの直線を c_i , $i = 1, 2, 3$ とおくと、これは distinguished basis of vanishing paths になる．射影

$$\begin{array}{ccc} \pi : (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \wr & & \wr \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

を $W^{-1}(0)$ に制限することによって、 $W^{-1}(0)$ を x 平面の分岐する2重被覆と見ることができ、図6の3つの黒丸が分岐点になる．また、 $x = 0$ のまわりで y を x の関数と考えたものはモノドロミーを持つので、 $x = 0$ も ($\mathbb{C}^\times$ の点ではないが) 分岐点と考えられる． $W^{-1}(0)$ に $x = 0$ となる点を1つと $x = \infty$ となる点を2つ付け加えると滑らかで射影的な楕円曲線になる． $W^{-1}(0)$ は x 平面のコピーを2つ用意し、図6のようにカットを入れて適当に繋ぎ合わせるによって得られる． $i = 1, 2, 3$ と $t \in [0, 1]$ に対し、 π を $W^{-1}(c_i(t))$ に制限することによって、

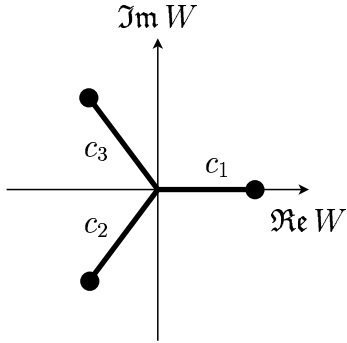


図 5: W 平面上の道

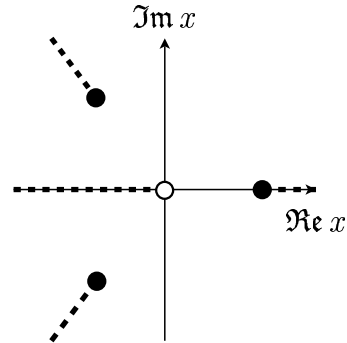


図 6: x 平面のカット

$W^{-1}(c_i(t))$ を x 平面の分岐する2重被覆と見ることができる．この時、分岐点の位置は t の関数になるが、その $t = 0$ から $t = 1$ までの軌跡を描いたものが図10である．ここで C_1, C_2, C_3 はそれぞれ c_1, c_2, c_3 に対する分岐点の軌跡であり、それぞれの道に沿って3つの分岐点のうち2つが衝突する様子が見て取れる．これらはホモトピーを除けば対応する消滅サイクルの π による像に一致する．

さて、これらの消滅サイクルの偏角写像による像を調べよう．まず、分岐被覆 $\pi : W^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ の2つのシートを図7、図8にあるようにさらに3つづつに分

けて、 $W^{-1}(0)$ を合計 6 枚の 3 角形に分解する．そうすると、それらの三角形の辺と内部は偏角写像によってそれぞれ図 3 にあるコアメーバを構成している三角形の頂点と内部に移り、これらの三角形を貼り合わせてできる $W^{-1}(0)$ は図 9 のようになる．この上の消滅サイクルを描いたものが図 11 である．

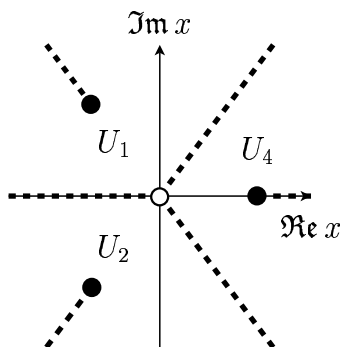


図 7: 1 番目のシート

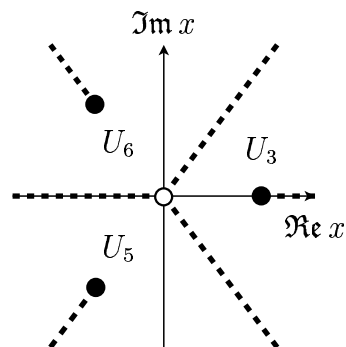


図 8: 2 番目のシート

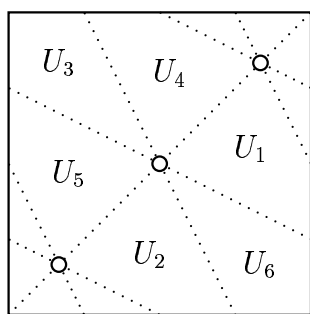


図 9: ファイバー $W^{-1}(0)$

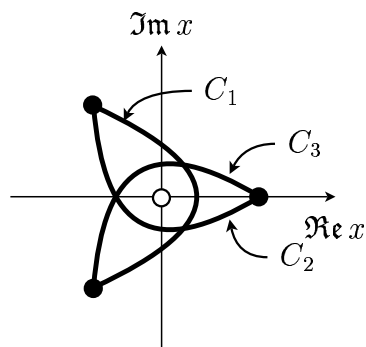


図 10: 分岐点の軌跡

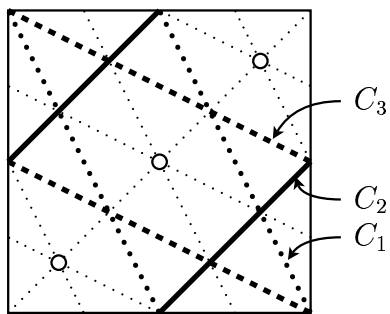


図 11: $W^{-1}(0)$ 上の消滅サイクル

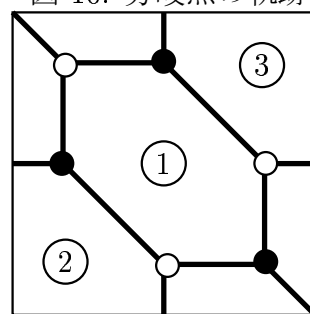


図 12: 2 色グラフの面のラベル

この図をじっと見ると、2 色グラフの面に対しては消滅サイクルが、辺に対しては消滅サイクルの交点が、そして頂点には消滅サイクルを境界とするような円盤が対応していることに気付く（図 12 を見よ）．これらは有向深谷圏 $\mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W$ においてはそれぞれ対象、射、そして射の合成に対応しているので、結局 2 色グラフを見るだけで深谷圏の構造が読み取れることになる．これが Feng-He-Kennaway-Vafa による予想であり、トーリック del Pezzo 曲面に対しては [37] で証明された．

また、Jung-van Straten [16] によって、2次元の16個の反射的多角形を含む多くの例に対して（少なくとも消滅サイクルの交点数のレベルでは）この予想を確認したことがアナウンスされている。

これらの主張をまとめると次のようになる：トロピカル曲線がアメーバの骨格であるように、ブレンによるタイル張りはコアアメーバの骨格であり、 W の有向深谷圏の組み合わせ論的な記述を与えている。消滅サイクルのシンプレクティック幾何がこのような対象で制御されているといのは驚くべき事実であるが、次節ではさらに、ホモロジー的ミラー予想が有限群による商を取る操作でどの様に振る舞うかを研究する際にもこの2色グラフが有用であることを見る。

6 トーラス同変なホモロジー的ミラー予想

格子多角形 Δ と整係数の行列

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

で $\det P \neq 0$ となるものに対して、 $P^T(\Delta)$ も再び格子多角形になる。ここで P のかわりに P の転置 P^T を使っているのは、記号を [37] に合わせるためである。写像

$$\begin{array}{ccc} P \otimes \mathbb{C}^\times : (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & (\mathbb{C}^\times)^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y) & \mapsto & (x^p y^q, x^r y^s). \end{array}$$

の核として定まるトーラスの有限部分群を K とおくと、格子多角形 $P^T(\Delta)$ に対応するトーリックスタック $X_{P^T(\Delta)}$ は、 X_Δ を K の自然な作用で割った商スタックになっていることが定義からすぐに分かる；

$$X_{P^T(\Delta)} = [X_\Delta / K].$$

一方、 X_Δ のミラー（すなわち、 Δ を Newton 多角形とする一般の Laurent 多項式）を W_Δ とおくと、これと被覆写像 $P \otimes \mathbb{C}^\times$ との合成

$$W_{P^T(\Delta)} = W_\Delta \circ (P \otimes \mathbb{C}^\times)$$

は $X_{P^T(\Delta)}$ のミラーになっている。 $P \otimes \mathbb{C}^\times$ が $(\mathbb{C}^\times)^2$ から $(\mathbb{C}^\times)^2$ への K を被覆変換群とする被覆写像なので、 $W_{P^T(\Delta)}^{-1}(0)$ は $W_\Delta^{-1}(0)$ の K を被覆変換群とする被覆空間になる。さらに、 W_Δ の臨界値と $W_{P^T(\Delta)}$ の臨界値が一致し、 W_Δ の消滅サイクルの逆像が $W_{P^T(\Delta)}$ の消滅サイクルになっていることも容易に分かる（ W_Δ のそれぞれの消滅サイクルに対して $|K|$ 個の $W_{P^T(\Delta)}$ の消滅サイクルが対応する）。従って、もとの多様体を K で割ると、ミラーは K を被覆変換群とする被覆空間になることになり、このことからミラー対称性が双対性だという主張が自然に

見える（トーラスを有限部分群で割ったものの双対トーラスはもとのトーラスの双対トーラスの被覆空間になることに注意）．

さて、この状況で Δ に対するホモロジー的ミラー予想

$$D^b \text{coh } X_\Delta \cong D^b \mathfrak{Fut}^\rightarrow W_\Delta$$

と $P^T(\Delta)$ に対するホモロジー的ミラー予想

$$D^b \text{coh } X_{P^T(\Delta)} \cong D^b \mathfrak{Fut}^\rightarrow W_{P^T(\Delta)}$$

の間に関係があると期待するのは自然である．これに関しては [40] においても考察されたが、実はブレーンによるタイル張りがこの問題に取り組むための適切な言葉を与える．

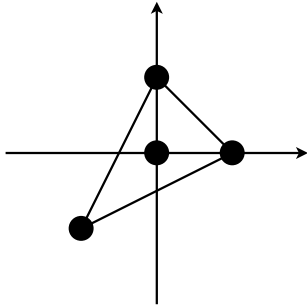


図 13: 格子多角形 Δ

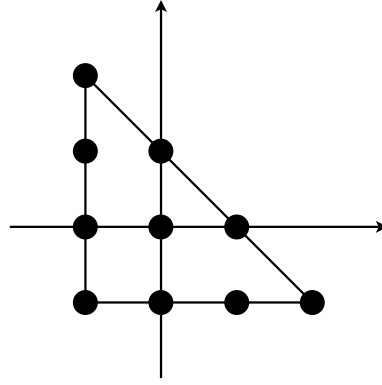


図 14: 格子多角形 $P^T(\Delta)$

例として Δ が図 13 で与えられる $(1, 0), (0, 1), (-1, -1)$ の凸包で、

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

の場合を考えよう．この時、 $P^T(\Delta)$ は図 14 に与えられた $(2, -1), (-1, 2), (-1, -1)$ の凸包で、

$$\begin{array}{ccc} P \otimes \mathbb{C}^\times : & (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & (\mathbb{C}^\times)^2 \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & (x, y) & \mapsto & (x^2 y^{-1}, x^{-1} y^2) \end{array}$$

であり、

$$K = \text{Ker } P \otimes \mathbb{C}^\times = \langle (\omega, \omega^2) \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

となる．ただし、 $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ は 1 の原始 3 乗根である．この時

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= x + y + \frac{1}{xy}, \\ W_2(x, y) &= \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{1}{xy} \end{aligned}$$

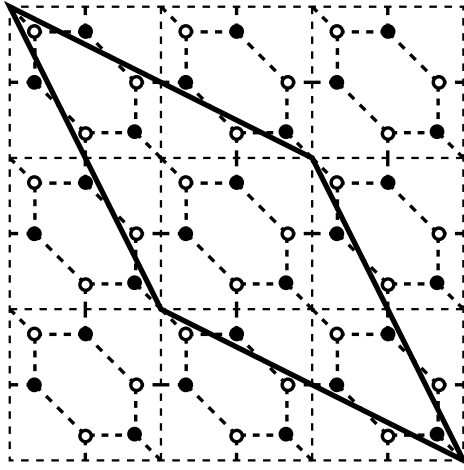


図 15: W_1 に対応する 2 色グラフの普遍被覆と $P^T(\mathbb{Z}^2)$ の基本領域

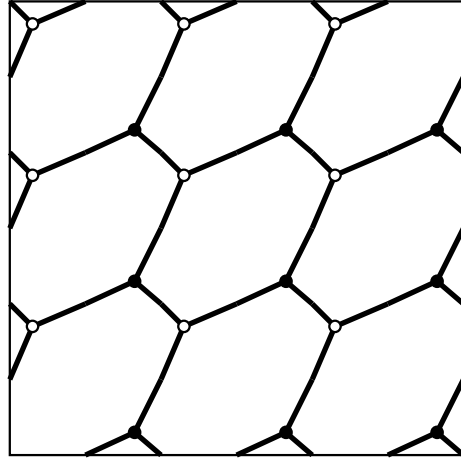


図 16: W_2 に対応する 2 色グラフ

とおくと、 W_1 は Δ を、 W_2 は $P^T(\Delta)$ を Newton 多角形とする Laurent 多項式であり、

$$W_2 = W_1 \circ (P \otimes \mathbb{C}^\times)$$

となっている．図 15 は図 4 にある W_1 に対する 2 色グラフの普遍被覆（の一部）を描いたものであり、 W_2 に対応する 2 色グラフはこの無限グラフを格子 $P(\mathbb{Z}^2)$ （これは $(2, -1)$ と $(-1, 2)$ で生成される格子である）で割ったものになっている．割った結果として得られる 2 色グラフは図 16 で与えられ、前者の 2 色グラフの K を被覆変換群とする被覆になっている．

図 17 は図 15 における $\mathbb{Z}^2$ の基本領域がトーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ の指標と対応する様子を表している．これを格子 $P(\mathbb{Z}^2)$ で割る操作はトーラスの指標を部分群 K の指標に制限することに対応しており、その結果として得られる K の指標は図 18 のようになる．ここで、 $i = 0, 1, 2$ に対し $\rho_i : K \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は K の生成元 (ω, ω^2) を ω^i に移す準同型写像を指す．

図 12 と図 15、それに図 18 を比べることによって、図 16 にある 2 色グラフの面に図 19 のようにラベルをつけることができる．これらの面は W_2 の消滅サイクルに対応し、⑪ は i 番目の道に沿った消滅サイクルに K の指標 ρ_j でラベルを付けたものに対応する．また、2 色グラフの頂点に図 20 にあるようにラベルを付けると、 W_2 のファイバー $W_2^{-1}(0)$ は各頂点に対して円盤を用意して、それらをグラフの辺で指定される通りに貼り合わせて得られる．結果として図 21 に与えられたようなトーラスから 9 点を除いたものが得られ、その上の消滅サイクルは図 22 のようになる．例えば、図 19 の ⑩ に対応するような消滅サイクルは三角形 c, i, h, m, r, d をこの順序で横切るので、このサイクルを曲面上に描くと図 22 において ⑩ とラベルされた直線のようになることが分かる．Seidel [29] によって、 C_1, C_2, C_3 は $\mathbb{P}^2$ と W_1 の間のホモロジー的ミラー予想でそれぞれ $\Omega_{\mathbb{P}^2}^2(2)$ 、 $\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(1)$ および $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ に対応することを使うと、 $i = 0, 1, 2$ に対して ⑪、⑫、⑬ をそ

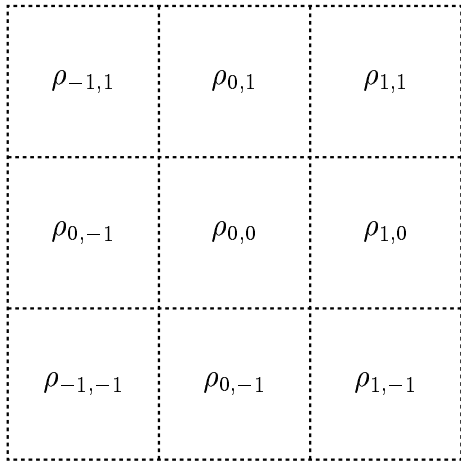


図 17: $(\mathbb{C}^\times)^2$ の指標

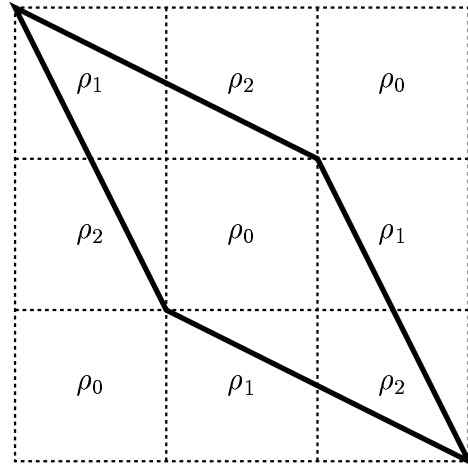


図 18: K の指標

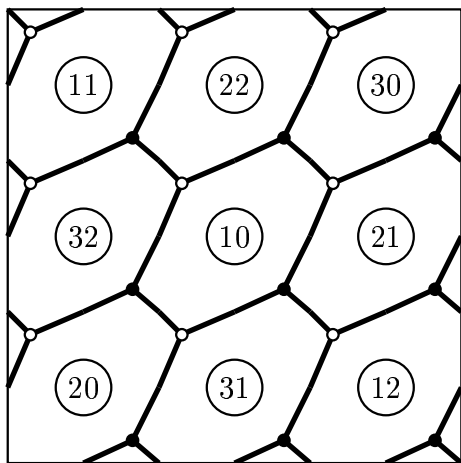


図 19: 2 色グラフの面のラベル

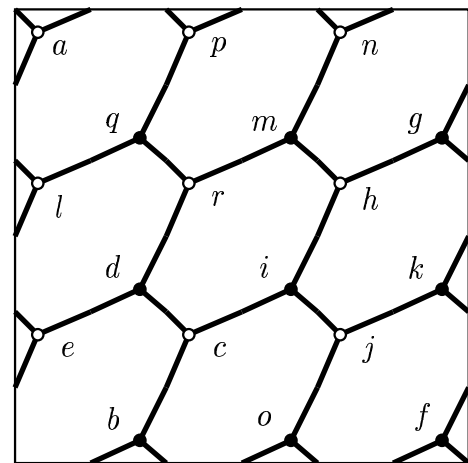


図 20: 頂点のラベル

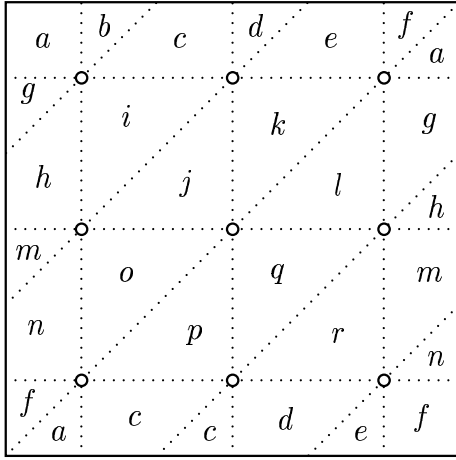


図 21: ファイバー $W_2^{-1}(0)$

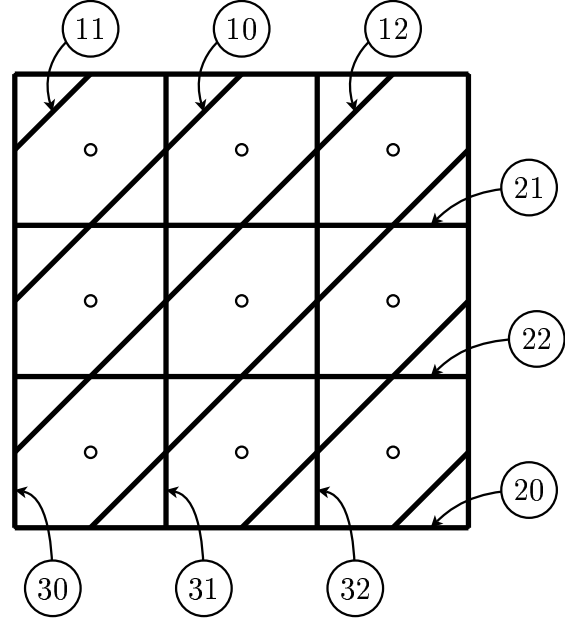


図 22: $W_2^{-1}(0)$ 上の消滅サイクル

それぞれ $\Omega_{\mathbb{P}^2}^2(2) \otimes \rho_i$ 、 $\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(1) \otimes \rho_i$ および $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \otimes \rho_i$ に対応させれば、 $[\mathbb{P}^2/K]$ と W_2 の間でもホモロジー的ミラー予想が成り立つことが分かる。

このようなホモロジー的ミラー予想とトーラスの有限部分群による商との関係は $\mathbb{P}^2$ に限った話ではなく、2次元のトーリック Fano スタックに対してミラーのコアメーバの形が「きれい」で、ブレーンによるタイル張りがミラーの有向深谷圏を正しく記述していればいつでも成立する。コアメーバを「きれい」に取れることは [37] において全ての（と言っても $\mathbb{P}^2$ 、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と $\mathbb{P}^2$ の3点までの爆発の計5つしかないが）トーリック del Pezzo 曲面に対して証明されたので、これらのトーラスの有限部分群による商スタックに対してはホモロジー的ミラー予想が成立することになる。

また、トーラスの全ての有限部分群による商スタックに対するホモロジー的ミラー予想を一度に理解するために、**トーラス同変なホモロジー的ミラー予想**を定式化することもできる。この場合、トーラスの普遍被覆に対応する無限サイズの2色グラフを考えて、これによって定まる Riemann 面とその上の Lagrange 部分多様体の組を商スタック $[X_{\Delta}/(\mathbb{C}^{\times})^2]$ のミラーと考えれば良い。この様にして得られる Riemann 面は種数が無限大であり、その上に無限個の互いにホモロジー類の異なる Lagrange 部分多様体に乗っている。この Riemann 面はもはや Laurent 多項式の零点としては実現できず、それに伴って Lagrange 部分多様体も消滅サイクルと考えることは出来ない。しかし、この Riemann 面に完全なシンプレクティック構造を入れたものとその上の Lagrange 部分多様体の列の組に対する不変量として有向深谷圏は定義でき、その導来圏は $D^b \text{coh}[X_{\Delta}/(\mathbb{C}^{\times})^2] \cong D^b \text{coh}^{(\mathbb{C}^{\times})^2} X_{\Delta}$ と三角圏として同値になるのである。

参考文献

- [1] Denis Auroux, Ludmil Katzarkov, and Dmitri Orlov. Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations. *math.AG/0404281*, 2004.
- [2] Sergey Barannikov and Maxim Kontsevich. Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields. *Internat. Math. Res. Notices*, (4):201–215, 1998.
- [3] Serguei Barannikov. Quantum periods. I. Semi-infinite variations of Hodge structures. *Internat. Math. Res. Notices*, (23):1243–1264, 2001.
- [4] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, and C. Vafa. Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes. *Comm. Math. Phys.*, 165(2):311–427, 1994.
- [5] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Mat. Sb.*, 181(5):669–683, 1990.
- [6] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):535–554 (electronic), 2001.
- [7] Philip Candelas, Xenia C. de la Ossa, Paul S. Green, and Linda Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nuclear Phys. B*, 359(1):21–74, 1991.
- [8] Alain Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [9] Bo Feng, Yang-Hui He, Kristian D. Kennaway, and Cumrun Vafa. Dimer models from mirror symmetry and quivering amoebae. *hep-th/0511287*, 2005.
- [10] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. Lagrangian intersection Floer theory. preprint available at <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/>.
- [11] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [12] Amihay Hanany, Christopher P. Herzog, and David Vegh. Brane tilings and exceptional collections. *hep-th/0602041*, 2006.

- [13] Amihay Hanany and David Vegh. Quivers, tilings, branes and rhombi. hep-th/0511063, 2005.
- [14] H. Iritani. Quantum D-modules and generalized mirror transformations. math.DG/0411111.
- [15] Masao Jinzenji. On the quantum cohomology rings of general type projective hypersurfaces and generalized mirror transformation. *Internat. J. Modern Phys. A*, 15(11):1557–1595, 2000.
- [16] K. Jung and D. van Straten. Arctic computation of monodromy. to appear in *Oberwolfach Reports*.
- [17] M. Kapranov and E. Vasserot. Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras. *Math. Ann.*, 316(3):565–576, 2000.
- [18] Yujiro Kawamata. Derived categories of toric varieties. math.AG/0503102, 2005.
- [19] Gabriel D. Kerr. Weighted blowups and mirror symmetry for toric surfaces. math.AG/0609162, 2006.
- [20] M. Kontsevich and Yu. Manin. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 164(3):525–562, 1994.
- [21] Maxim Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):1–23, 1992.
- [22] Maxim Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [23] Maxim Kontsevich. Lectures at ENS Paris, spring 1998. set of notes taken by J. Bellaïche, J.-F. Dat, I. Martin, G. Rachinet and H. Randriambololona, 1998.
- [24] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. Notes on A_∞ algebras, A_∞ categories and non-commutative geometry. I. arXiv:math/0606241, 2006.
- [25] D. O. Orlov. Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 56(4):852–862, 1992.
- [26] D. O. Orlov. Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 246(Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh.):240–262, 2004.

- [27] D. O. Orlov. Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities. `math.AG/0503632`, 2005.
- [28] Paul Seidel. Vanishing cycles and mutation. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 65–85. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [29] Paul Seidel. More about vanishing cycles and mutation. In *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, pages 429–465. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.
- [30] Paul Seidel. Homological mirror symmetry for the quartic surface. `math.AG/0310414`, 2003.
- [31] Paul Seidel. Fukaya categories and Picard–Lefschetz theory. to appear in the ETH Lecture Notes series of the European Math. Soc.
- [32] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow. Mirror symmetry is T -duality. *Nuclear Phys. B*, 479(1-2):243–259, 1996.
- [33] Bertrand Toën. Higher and derived stacks: a global overview. `arXiv:math/0604504`, 2006.
- [34] Kazushi Ueda. Homological mirror symmetry for toric del Pezzo surfaces. *Comm. Math. Phys.*, 264(1):71–85, 2006.
- [35] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki. A note on brane tilings and McKay quivers. `math.AG/0605780`, 2006.
- [36] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki. Brane tilings for parallelograms with application to homological mirror symmetry. `math.AG/0606548`, 2006.
- [37] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki. Homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del Pezzo surfaces. `math.AG/0703267`, 2007.
- [38] Michel Van den Bergh. Three-dimensional flops and noncommutative rings. *Duke Math. J.*, 122(3):423–455, 2004.
- [39] Michel van den Bergh. Non-commutative crepant resolutions. In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 749–770. Springer, Berlin, 2004.
- [40] 植田一石. ホモロジー的ミラー対称性と mckay 対応. 第 52 回幾何学シンポジウム予稿集, <http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kazushi/>よりダウンロード可能, 2005.
- [41] 植田一石. ダイマーと藻類. 数理解析講究録 1541, 2007.

[42] Anatol N. Kirillov and 前野俊昭. 素晴らしきアメーバたち. **数学**, 58:151–164, 2006.

[43] 塩田徹治. フェルマー多様体の幾何学. **数学**, 33:37–53.