ミラー対称性と McKay 対応

植田 一石
京都大学理学研究科

G を $SL_3(\mathbb{C})$ の有限部分群で，G の $\mathbb{C}^3$ への自然な作用が原点のみを固定点に持つようなものとする．この時，商空間 $\mathbb{C}^3/G$ はクレパントな特異点解消 X を持ち，X の例外因子に台を持つ連接層の導来圏 $D^b\mathrm{coh}_0 X$ は，$\mathbb{C}^3$ の原点に台を持つ G 同変な連接層の導来圏 $D^b\mathrm{coh}_0^G\mathbb{C}^3$ と三角圏として同値になる（[3] とその参考文献を参照）：

$$D^b\mathrm{coh}_0 X \cong D^b\mathrm{coh}_0^G\mathbb{C}^3.$$

これを McKay 対応と言う．これは，標語的に言うと，特異点を持つ複素解析空間 $\mathbb{C}^3/G$ の幾何を調べる際に，単にその上の連接層（これは複素部分多様体や正則ベクトル束の一般化である）を考えたのでは有限の射影的分解が取れないなどの不都合が生じるので，クレパントな特異点解消 X を取ってその上の連接層を考える方法や，割る前の $\mathbb{C}^3$ の上で G 同変に考える（これは商空間を軌道体として考えることに相当する）などの方法があるが，導来圏まで行けばどちらも同じである（三角圏として同値な圏を与える）ことを意味する．ここで導来圏を考えるのは本質的であり，アーベル圏のレベルでは $\mathrm{coh}_0 X$ と $\mathrm{coh}_0^G\mathbb{C}^3$ は同値にならない．

さて，三角圏を使った定式化が本質的であるもう 1 つの例として，Kontsevich [8] が 1994 年の国際数学者会議で提出した次の予想がある：

予想（ホモロジー的ミラー予想）. 任意の 3 次元 Calabi-Yau 多様体 M に対し，ある 3 次元 Calabi-Yau 多様体 W が存在して，M の連接層の導来圏と W の深谷圏の導来圏が三角圏として同値になる：

$$D^b\mathrm{coh} M \cong D^b\mathfrak{Fuk} W.$$

ここで，W の深谷圏とは，対象が W の Lagrange 部分多様体で，射が Lagrange 部分多様体の Floer コホモロジーであるような A_∞ 圏であるが，これを定義することは難しい問題である（[4] を見よ）.

このホモロジー的ミラー予想は，1994 年の段階で既に存在した位相的ミラー予想（これは任意の 3 次元 Calabi-Yau 多様体 M に対してある 3 次元 Calabi-Yau 多様体が存在して，それらの Hodge 数の間に

$$h^{i,j}(M) = h^{3-i,j}(W)$$

なる関係がある事を主張する）や，古典的ミラー予想（上のような組 (M,W) で，さらに M の周期と W の Gromov-Witten 不変量の間に不思議な関係があるよう

なものの存在を主張する）などの背後にある最強の予想として提出されたもので，三角圏を空間と思ってその幾何を研究するという全く新しい視点を提供する．この予想は，McKay 対応が連接層の導来圏を考える限りにおいては $\mathbb{C}^3$ 上で G 同変に考えることと $\mathbb{C}^3/G$ のクレパントな特異点解消の上で考えることの間に区別がないことを主張するように，ミラーをなす組 (M, W) においては，M の複素幾何（連接層の導来圏）と W のシンプレクティック幾何（深谷圏の導来圏）を考えることの間に区別はなく，一方における問題は他方の問題に置き換えて考えることができることを主張する．もちろん M の複素幾何的な問題が全て W のシンプレクティック幾何的な問題に翻訳できるわけではないし，逆に W のシンプレクティック幾何的な問題で対応する M の複素幾何的な問題が存在しないようなものもあるが，そういった問題は，合同変換で不変でない図形の性質が Euclid 幾何における研究の対象にはなり得ないように，ホモロジー的ミラー的な意味では真に幾何学的な問題ではないと考えられる．

ここで重要なのは，ミラー対称性によって問題の難しさが保存されないことであり，一方において困難な問題が他方では易しくなることによって，様々な応用が期待される．これは McKay 対応でも同様で，例えば $\mathbb{C}^3/G$ のクレパントな特異点解消の K 群やその上の Euler 形式（Ext の次元の交代和）などが有限群 G の表現論から容易に求まる（例えば [7] などを見よ）．

さて，McKay 対応において G が Abel 群 A の時には，商空間 $\mathbb{C}^3/A$ はトーリック多様体になる．一方，トーリック多様体に対しては Batyrev [2]，Givental [5]，Hori-Vafa [6] などによって標準的な方法でミラーを作ることができる．従って，このミラーの深谷圏と $\mathbb{C}^3$ 上の A 同変な連接層の導来圏（これは上の McKay によって $\mathbb{C}^3/A$ のクレパントな特異点解消 X の連接層の導来圏と言っても良い）との関係が自然に問題になる．

問題をより正確に定式化しよう．$SL_3(\mathbb{C})$ の有限 Abel 部分群は随伴作用によって極大トーラスの中の

$$A = \left\{ \operatorname{diag}(x, y, x^{-1}y^{-1}) \in SL_3(\mathbb{C}) \,\middle|\, (x^n, y^n) \in \langle (\zeta_{a+b+1}^a, \zeta_{a+b+1}^b) \rangle \right\}$$

という形の部分群に移せる．ここで，a, b, n は自然数，ζ_{a+b+1} は 1 の原始 $a+b+1$ 乗根，そして $\langle (\zeta_{a+b+1}^a, \zeta_{a+b+1}^b) \rangle$ は $(\zeta_{a+b+1}^a, \zeta_{a+b+1}^b)$ で生成される $\mathbb{Z}/(a+b+1)\mathbb{Z}$ と同型な $(\mathbb{C}^\times)^2$ の部分群である．商空間 $\mathbb{C}^3/A$ はトーリック多様体であり，扇と呼ばれる組み合わせ論的な対象（$\mathbb{R}^3$ の中の錐体の集合）によって完全に記述される．トーリック多様体に対する扇は $SL_3(\mathbb{Z})$ による作用の分の自由度があるので一意には定まらないが，ここでは $\mathbb{C}^3/A$ に対する扇として，扇の 1 次元錐の生成元の集合を $\{\overline{v}_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3})\}_{i=1}^3$ としたときに，任意の i に対して $v_{i,3} = 1$ であり，かつ $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}) \in \mathbb{Z}^2$ とおいたときに，$\{v_i\}_{i=1}^3$ を頂点とする $\mathbb{R}^2$ の中の三角形が原点を内点に含むようなものを取る．この「原点を内点に含む」という仮定によって，孤立していない不動点を持つ $n=1$ かつ $ab=0$ の場合と，例外的な場合として $n=2$ かつ $a=b=0$ の場合が排除される．上のような $\{\overline{v}_i\}_{i=1}^3$ とし

て，例えば $n > 2$ かつ $a = b = 0$ の時には

$$\overline{v}_1 = (n-1, -1, 1),\ \overline{v}_2 = (-1, n-1, 1),\ \overline{v}_3 = (-1, -1, 1)$$

が取れる．

さて，このようにトーリック多様体 $\mathbb{C}^3/A$ に対する扇が与えられたとき，その1次元錐の生成元の最初の2つの成分への射影の集合 $\{v_i\}_{i=1}^3$ を頂点とするような $\mathbb{R}^2$ の中の三角形を Δ とおき，Δ を Newton 多角形とするような2変数 Laurent 多項式 $W(x, y) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を1つ選んで固定する．ここで，Laurent 多項式

$$\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$$

の Newton 多角形は，$a_{i,j} \neq 0$ となるような (i, j) たちのなす $\mathbb{Z}^2$ の部分集合の $\mathbb{R}^2$ における凸包として定義される．この状況で，W が定義する写像 $W : (\mathbb{C}^\times)^2 = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}^3/A$ のミラーと呼ぶ．

$W(x, y)$ の係数は「ミラーの複素構造」の変形のパラメータであり，$\mathbb{C}^3/A$ のクレパントな特異点解消のシンプレクティック構造の変形に対応する．ここで,「ミラーの複素構造」と括弧をつけた理由は，今の場合ミラーは普通の意味の空間ではなく $(\mathbb{C}^\times)^2$ 上の関数 W だからである．ここで例えば W のファイバー $W^{-1}(0)$ に注目することにすると，$W(x, y)$ の係数は普通の意味で $W^{-1}(0)$ の複素構造の変形のパラメータになっている．以下では W 側でシンプレクティック幾何を考えるので，$W(x, y)$ の係数としては（十分一般である限り）何を取っても良い．

この状況で，$(\mathbb{C}^\times)^2$ に

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{dx \wedge d\overline{x}}{|x|^2} + \frac{dy \wedge d\overline{y}}{|y|^2}\right)$$

によって自然なシンプレクティック構造を入れると，

$$W : (\mathbb{C}^\times)^2 \to \mathbb{C}$$

は Seidel [12] の意味での完全 Morse ファイブレーションになる．ここで n 次元 Kähler 多様体 E から開 Riemann 面 S への正則写像 W が完全 Morse ファイブレーションであるとは，大雑把に言うと，E の Kähler 形式が完全形式（ここから E は必然的に開多様体になる）であり，W が有限個の非退化な臨界点のみを持つ（すなわち，W の臨界点と臨界値の周りで E と S の正則局所座標を適当に取って，$W = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ とできる）ことを指す．

完全 Morse ファイブレーション $W : E \to S$ において，W の臨界値と交わらないような経路 $c : [0, 1] \to S$ と，W の $c(0)$ におけるファイバーの点 $p \in W^{-1}(c(0))$ に対し，p から始まる c の持ち上げ $\widetilde{c}_p : [0, 1] \to E$ が，E の Kähler 形式 ω を使って，$\widetilde{c}_p$ の微分が常に W のファイバーの接空間と ω に関して直交するという条件によって定義される．

W の臨界点の集合に適当な順序を入れたものを $(p_i)_{i=1}^N$ とし，W の正則値 t_0 を 1 つ選んで固定する．ここで，N は W の臨界点の個数である．さらに，$i = 1, 2, \ldots, N$ に対して，S の t_0 から $W(p_i)$ に至る滑らかな経路 $c_i : [0,1] \to S$ で，しかるべき性質を満たすもの（a distinguished set of vanishing paths と呼ばれる．例えば [1] を見よ）を選ぶと，対応する消滅サイクルたち $(C_i)_{i=1}^N$ が

$$C_i = \{p \in W^{-1}(t_0) \mid \lim_{t \to 1} \widetilde{c}_p(t) = p_i\}.$$

によって定義される．これらの C_i たちは $W^{-1}(t_0)$ に ω の制限によってシンプレクティック構造を入れたとき，その Lagrange 部分多様体になる．

さらに，全ての $i = 1, \ldots, N$ に対して，C_i の適当な次数付け（grading）（例えば [11] を見よ）とスピン構造を 1 つ選んで固定しておく．次数付けは Floer コホモロジーの次数を定めるために，そしてスピン構造は概正則写像のモジュライ空間の向き付けのために必要である．この時，完全 Morse ファイブレーション $W : E \to S$ の有向深谷圏（directed Fukaya category）と呼ばれる A_∞ 圏（A_∞ 圏は通常の圏の拡張であり，射がコチェイン複体で，射の合成がコホモロジーのレベルでしか結合的にならない）$\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ が次のようにして定まる：

- 対象の集合は消滅サイクルたちである：

$$\mathfrak{Ob}(\mathfrak{Fuk}^{\to} W) = (C_1, \ldots, C_N),$$

- C_i と C_j の間の射は

$$\mathfrak{Fuk}^{\to} W(C_i, C_j) = \begin{cases} 0 & i > j, \\ \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_{C_i} & i = j, \\ \bigoplus_{p \in C_i \cap C_j} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{p\} & i < j \end{cases}$$

  で与えられる．

- 正の自然数 k と $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leq N$ なる消滅サイクルの列 $C_{i_0}, \ldots, C_{i_k}$，それにそれらの間の射の集合 $p_l \in C_{i_{l-1}} \cap C_{i_l}, l = 1, 2, \ldots, k$ に対し，射の合成 $\mathfrak{m}_k$ は

$$\mathfrak{m}_k(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{p_0 \in C_{i_0} \cap C_{i_k}} \#\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \ldots, C_{i_k}; p_0, \ldots, p_k) p_0$$

  で与えられる．

ここで，$\#\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \ldots, C_{i_k}; p_0, \ldots, p_k)$ は以下を満たす組 $((D^2, (z_0, \ldots, z_k)), \varphi)$ のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1}(C_{i_0}, \ldots, C_{i_k}; p_0, \ldots, p_k)$ の安定コンパクト化の元の個数である（モジュライ空間の仮想次元が零でないときは 0 とする）: $(D^2, (z_0, \ldots, z_k))$ は閉円盤 $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とその境界 ∂D^2 の上の反時計回りに並んだ $k+1$

個の点の組で，$\varphi : D^2 \to W^{-1}(0)$ は $\varphi(\partial_l D^2) \subset C_{i_l}$ 及び $\varphi(z_l) = p_l$ を任意の l に対して満たす正則写像であり，組 $((D^2, (z_0, \ldots, z_k)), \varphi)$ の自己同型群は有限である．ここで $l = 0, 1, \ldots, k$ に対し，z_l と z_{l+1} で挟まれた ∂D^2 の区間（ただし，$z_{k+1} = z_0$ とする）を $\partial_l D^2$ とおいた．詳しくは [4]，[12]，[13] などを見よ．標語的に言うと，深谷圏における射の合成（あるいは Floer コホモロジーの積といっても同じことだが）は概正則円盤の数え上げで得られる．

「有向」と呼ぶのは，対象の集合に順序が入っていて，$i > j$ ならば $\mathfrak{Fuk}^{\to} W(C_i, C_j) = 0$ であることによる．Seidel [12] は消滅サイクルの distinguished basis の取り替えによる有向深谷圏 $\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ の変化が Rudakov ら（[9] を見よ）の意味での mutation であることを示した．特に，有向深谷圏の導来圏は消滅サイクルの distinguished basis の取り方によらずに定まる．

さて，$W : (\mathbb{C}^\times)^2 \to \mathbb{C}$ が $\mathbb{C}^3/A$ のミラーの時，適当に臨界値と消滅サイクルを選ぶと，$\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ は A_∞ 圏としての高次の演算を持たず，単に次数付き圏になる事が分かる．この圏が $D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3$ （あるいは $\mathbb{C}^3/A$ のクレパントな特異点解消 X に対して，$D^b \mathrm{coh}_0 X$ と言ってもよいが）と密接に関係していることを期待したいのだが，$D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3$ は有向ではない．それどころか，Serre 双対性によって，$D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3$ の任意の 2 つの対象 $\mathcal{E}$ と $\mathcal{F}$ と任意の整数 k に対して

$$\mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong (\mathrm{Ext}^{3-k}(\mathcal{F}, \mathcal{E}))^\vee$$

が成り立つ．ここで，$(\bullet)^\vee$ は相対ベクトル空間を表す．そこで，$\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ から $D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3$ と同値な圏を構成するために，Seidel [10]，(10a) にある trivial extension という概念を使う．これは一般に，

$$i > j \text{ の時} \quad \mathrm{Ext}^*(C_i, C_j) = 0$$

を満たす有向（あるいは「Fano 的」な）圏と自然数 d から，射の集合を 2 倍にすることによって

$$\mathrm{Ext}^m(C_i, C_j) = (\mathrm{Ext}^{d-m}(C_j, C_i))^\vee$$

を満たす「d 次元 Calabi-Yau 的」な圏を作る手法であり，これによって $\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ を拡大したものを $\mathfrak{Fuk} W$ と呼ぶ．この時，次が成り立つ：

定理 1. 上の状況で，三角圏の同値

$$D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3 \cong D^b \mathfrak{Fuk} W$$

が存在する．

証明は具体計算による．方針はどの場合も同じなので，$a = b = 0$ の場合を説明する．この時，W としては

$$W = \frac{x^{n-1}}{y} + \frac{y^{n-1}}{x} + \frac{1}{xy}$$

が取れる．この W の臨界点は

$$x^n = y^n = \frac{1}{n-2}$$

を満たす n^2 個の点であるが，これらに名前をつけて，$0 \le i, j \le n-1$ に対し

$$p_{i,j} = \left(\left(\frac{1}{n-2} \right)^{1/n} \zeta_n^j, \left(\frac{1}{n-2} \right)^{1/n} \zeta_n^{i-j} \right),$$

但し $\zeta_n = \exp[2\pi\sqrt{1}/n]$，とおくと，対応する臨界値は

$$W(p_{i,j}) = \frac{n}{(n-2)^{1-2/n}} \zeta_n^{-i}$$

となる（図 1）．ここで原点が W の正則値なので，$t_0 = 0$ を基点に取り，臨界点の添字集合 $\{(i,j) | 0 \le i, j \le n-1\}$ に $i > k$ または $i = k$ かつ $j > l$ の時 $(i,j) > (k,l)$ という順序（辞書式順序）を入れて，$c_{i,j}$ を基点 t_0 から臨界値 $W(p_{i,j})$ までの直線として定義する（図 1）．

W の基点 $t_0 = 0$ でのファイバー $W^{-1}(0)$ は Fertmat 型の代数曲線

$$W^{-1}(0) = \{(x,y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 | x^n + y^n + 1 = 0\}$$

であり，第 2 成分への射影

$$\begin{array}{cccc} \pi: & W^{-1}(0) & \to & \mathbb{C}^\times \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

によって，$\mathbb{C}^\times$ の n 点 $\{y \in \mathbb{C}^\times | y^n + 1 = 0\}$ で分岐する n 重被覆として表せる．

消滅サイクル $C_{i,j}$ の π による像 $\pi(C_{i,j})$ は，任意の $j, k = 0, \ldots, n-1$ に対し $\pi(C_{i,j}) = \pi(C_{i,k})$ となって i にしかよらないので，これを C_i で表す（図 2 を見よ．ここで白丸は原点，黒丸は π の分岐点である）

W のファイバー $W^{-1}(0)$ は，π の分岐点から無限遠点までカットを入れた $\mathbb{C}^\times$ のコピーを n 枚用意して，分岐点の周りを反時計回りに一周するとき，カットを横切ると j 番目のシートから $j+1$ 番目のシートに移るように張り合わせたものになっている．この見方で消滅サイクル $C_{i,j}$ の周辺を拡大したものが図 3 である．細かい点線はカットであり，実線は消滅サイクルの j 番目のシートに乗っている部分を，そして粗い点線は $j+1$ 番目のシートに乗っている部分を表している．

一方，$D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3$ は n^2 個の生成元 $\{\mathcal{E}_{i,j}\}_{i,j=0}^{n-1}$ を持つ．ここで，$\mathcal{E}_{i,j}$ は原点の構造層 $\mathcal{O}_0$ と $\rho_{i,j}(1,0) = \zeta_n^i$，$\rho_{i,j}(0,1) = \zeta_n^j$ で定まる $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の既約表現 $\rho_{i,j} : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^\times$ のテンソル積 $\mathcal{O}_0 \otimes \rho_{i,j}$ である．$\mathcal{O}_0$ を Koszul 分解することによって，

$$\mathrm{Ext}^m(\mathcal{E}_{i,j}, \mathcal{E}_{k,l}) = \mathrm{Hom}_A(\wedge^m \rho_{\mathrm{Nat}} \otimes \rho_{i,j}, \rho_{k,l})$$

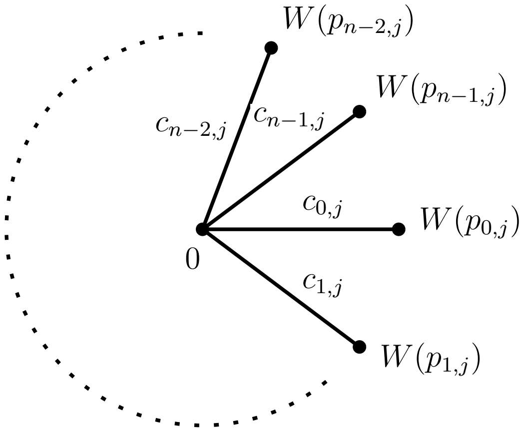

図 1: W の臨界値

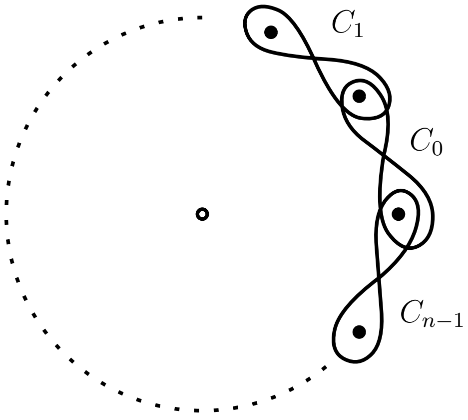

図 2: 消滅サイクルの π による像

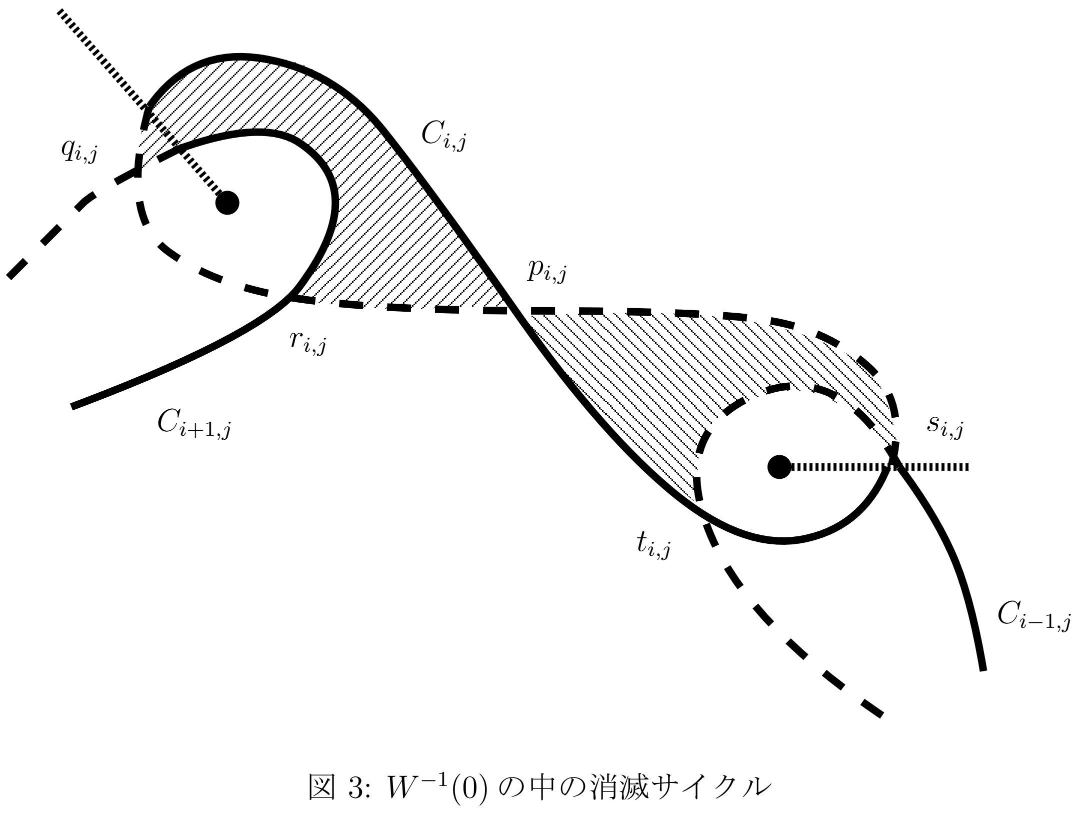

図 3: $W^{-1}(0)$ の中の消滅サイクル

を得る．ここで，ρ_{Nat} は包含写像 $A \hookrightarrow SL_3(\mathbb{C})$ が定める A の 3 次元表現であり，$\wedge^m \rho_{\mathrm{Nat}}$ はその m 次外積表現を表す．これから，$k = 0, 3$ に対して

$$\mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}_{i,j}, \mathcal{E}_{k,l}) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = k, j = l \text{ の時}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

であり，$k = 1$ に対して

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{i,j}, \mathcal{E}_{k,l}) = \begin{cases} \mathbb{C} & (k,l) = (i+1, j), (i, j+1), (i-1, j-1) \text{ の時}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

$k = 2$ に対して

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_{i,j}, \mathcal{E}_{k,l}) = \begin{cases} \mathbb{C} & (k,l) = (i-1, j), (i, j-1), (i+1, j+1) \text{ の時}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

となる．

一方，図 3 から読み取れるように，ミラー側では $(i,j) \neq (k,l)$ なる $i, j, k, l = 0, \dots, n-1$ に対し，$C_{i,j}$ と $C_{k,l}$ が交わるのは

$$(k,l) = (i-1, j-1), (i-1, j), (i, j-1), (i, j+1), (i+1, j), (i+1, j+1)$$

の時であり，これら全ての場合において交点はただ 1 点である．ここで，有向深谷圏 $\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ における 2 つの対象の間の射は消滅サイクルの交点を基底とするベクトル空間であることを思い出すと，$D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3$ と $\mathfrak{Fuk} W$ の間で，対象の対応を $i, j = 0, 1, \dots, n-1$ に対して $\mathcal{E}_{i,j}$ と $C_{i,j}$ が対応するようにつけると，これによって射の集合もきちんと対応することが分かる．$\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ における射の合成は，2 次元の円盤から $W^{-1}(0)$ への概正則写像で，境界が消滅サイクルに移るようなものを数え上げて得られるが，今の場合，$W^{-1}(0)$ が実 2 次元なので，この数え上げは $W^{-1}(0)$ の上での $C_{i,j}$ たちを境界とする「塗り絵」になる．図 3 で斜線を付けた 2 つの領域は $\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ における $\mathfrak{m}_2$ の計算に現われる概正則三角形であり，それぞれ $p_{i,j} \in \mathfrak{Fuk}^{\to}(C_{i,j-1}, C_{i,j})$ と $q_{i,j} \in \mathfrak{Fuk}^{\to}(C_{i,j}, C_{i+1,j})$ の合成が $r_{i,j} \in \mathfrak{Fuk}^{\to}(C_{i,j-1}, C_{i+1,j})$ になること，および $s_{i,j} \in \mathfrak{Fuk}^{\to}(C_{i-1,j-1}, C_{i,j-1})$ と $p_{i,j} \in \mathfrak{Fuk}^{\to}(C_{i,j-1}, C_{i,j})$ の合成が $t_{i,j} \in \mathfrak{Fuk}^{\to}(C_{i-1,j-1}, C_{i,j})$ になることを符合を除いて示している．符合は消滅サイクルのスピン構造から決まり，スピン構造として自明でないものを取ると，上の 2 つの積の一方は正，他方は負になることが分かり，$D^b \mathrm{coh}_0^A \mathbb{C}^3$ における Ext の米田積と一致する．

注意． $\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ を拡大した圏 $\mathfrak{Fuk} W$ は，

$$Y = \{(x, y, z, w) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \times \mathbb{C}^2 | W(x,y) - zw = 0\}$$

で定義される複素 3 次元空間 Y の「普通の意味の」（つまり，有向ではない）深谷圏と次のようにして一致すると期待される：写像 $Y \ni (x, y, z, w) \mapsto zw \in \mathbb{C}$ の

$t \in \mathbb{C}$ におけるファイバーは $W^{-1}(t) \in (\mathbb{C}^\times)^2$ と $Q_t = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 | zw = t\}$ の直積である．$W^{-1}(t)$ は t が W の臨界値 $W(p_{i,j})$ の時に特異点を持ち，Q_t は $t = 0$ の時に特異点を持つ．従って，t 平面で $t = 0$ から W の臨界値への道を選んで，その道に沿って Q_t の消滅サイクルと W の消滅サイクルの直積を並べると，区間 $[0,1]$ 上の $S^1 \times S^1$ 束で，区間の境界 0 の上では片方の S^1 が，境界 1 の上ではもう一方の S^1 が潰れているようなものが出来る．この $[0,1]$ 上の $S^1 \times S^1$ 束の全空間は S^3 と同相になり，しかも Y の適当なシンプレクティック構造に関して Lagrange 部分多様体になる．こうして W の消滅サイクルたちから Y の Lagrangian S^3 たちが作られるが，作り方からこれらの Lagrangian S^3 たちは $z = w = t = 0$ の上でしか交わらない．さらに，これらの Lagrangian S^3 たちを境界に持つ概正則円盤は必ず $W^{-1}(0) \times \{(0,0)\}$ に含まれる．何故なら，概正則円盤の (x,y) 成分への射影と W の合成写像による像は $\mathbb{C}$ への概正則円盤になるが，Lagrangian S^3 たちのこの合成写像による像は原点でしか交わらないので，最大値の原理によって定数でなければならないからである．あとは (z,w) 成分への射影に対して同じ議論をして，概正則円盤の (z,w) 成分が定数であることを見れば良い．このようにして，W の消滅サイクルから来る Lagrangian S^3 たちを対象の集合とする Y の深谷圏は $\mathfrak{Fuk}^{\to} W$ の 3 次の trivial extension になっていることが期待される．

参考文献

[1] V. I. Arnol′d, S. M. Guseĭn-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Vol. II*, volume 83 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1988. Monodromy and asymptotics of integrals, Translated from the Russian by Hugh Porteous, Translation revised by the authors and James Montaldi.

[2] Victor V. Batyrev. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. *J. Algebraic Geom.*, 3(3):493–535, 1994.

[3] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):535–554 (electronic), 2001.

[4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono. Lagrangian intersection Floer theory. preprint available at http://www.math.kyoto-u.ac.jp/˜fukaya/.

[5] Alexander B. Givental. Homological geometry and mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 472–480, Basel, 1995. Birkhäuser.

[6] K. Hori and C. Vafa. Mirror symmetry. hep-th/0002222.

[7] Yukari Ito and Hiraku Nakajima. McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three. *Topology*, 39(6):1155–1191, 2000.

[8] Maxim Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139, Basel, 1995. Birkhäuser.

[9] A. N. Rudakov. Exceptional collections, mutations and helices. In *Helices and vector bundles*, volume 148 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–6. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[10] P. Seidel. Homological mirror symmetry for the quartic surface. math.AG/0310414.

[11] Paul Seidel. Graded Lagrangian submanifolds. *Bull. Soc. Math. France*, 128(1):103–149, 2000.

[12] Paul Seidel. Vanishing cycles and mutation. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 65–85. Birkhäuser, Basel, 2001.

[13] 深谷賢治. **シンプレクティック幾何学**. 岩波講座現代数学の展開 21. 岩波書店, 2002.