ドミノによるタイル張り

植田 一石
京都大学理学研究科

概 要

平面の中の与えられた格子領域を大きさ 1×2 の長方形で隙間無く埋めることをドミノによるタイル張り（domino tiling）と言う．例えば、領域として大きさ 2×3 の長方形を取ると、3 通りのドミノによるタイル張りが可能である．このドミノによるタイル張りの、領域を大きくする極限の話題から初めて、Laurent 多項式に対して定まる Mahler 測度と呼ばれる量に関する紹介をしたい．

1 ドミノによるタイル張り

$(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ に対し、T_{mn} を $(m,n),(m+1,n),(m,n+1),(m+1,n+1)\in\mathbb{R}^2$ を頂点とする $\mathbb{R}^2$ の中の辺の長さが 1 の正方形とする．$\mathbb{Z}^2$ の部分集合 Λ に対し、

$$R(\Lambda):=\bigcup_{(m,n)\in\Lambda}T_{mn}$$

を Λ が定める格子領域と呼ぶ．つまり、格子領域とは格子点を頂点とし、辺が常に x 軸または y 軸に平行な多角形で囲まれるような $\mathbb{R}^2$ の領域のことである．$R(\Lambda)$ が連結でない場合には各連結成分ごとに議論すれば良いので、以下では $R(\Lambda)$ は常に連結であると仮定する．格子領域 R を大きさが 1×2 の長方形で隙間無く覆うことをドミノによるタイル張り（domino tiling）と言い、その場合の数を $Z(R)$ で表す．$Z(R)$ を分配関数（partition function）、$\log Z(R)$ をエントロピー（entropy）と呼ぶ．例えば、$\Lambda=\{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1),(2,1)\}$ の時、そのドミノによるタイル張りは 3 通りある（図 1）．

もう少し一般の領域として、自然数 n に対して大きさが $2\times n$ の長方形領域 R_n を考え、この領域のドミノによるタイル張りの場合の数 $Z_n=Z(R_n)$ の n を大きくしたときの漸近挙動を調べよう．R_n の左上のマスにはドミノを縦向きに置くか横向きに置くかで 2 通りの選択肢があるが、ここにドミノを縦に置いたときの残りの領域は R_{n-1} と一致するので、R_n の左上のマスにドミノを縦向きに置く場合の数は Z_{n-1} である．一方、同じ場所にドミノを横向きに置くと、左下のマスにはドミノを横向きに置くしかないので、残りの領域は R_{n-2} になる．こうして、有名な Fibonacci 数列の漸化式

$$Z_n=Z_{n-1}+Z_{n-2}$$

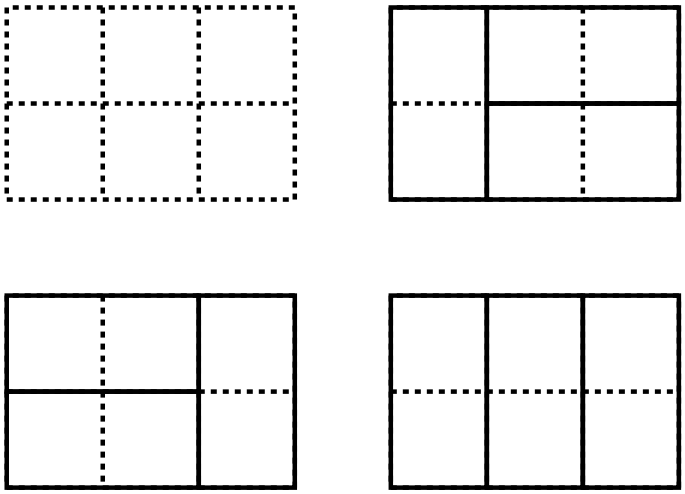

図 1: 大きさ 2×3 の矩形領域とそのドミノによるタイル張り

を得る．最初の数項は

$$Z_1 = 1,\ Z_2 = 2,\ Z_3 = 3,\ Z_4 = 5,\ Z_5 = 8,\ Z_6 = 13,\ \ldots$$

一般項は

$$Z_{n+2} = \frac{1}{\alpha - \beta}\{2(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)\}$$

である．ただし、

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とおいた．従って、ドミノ 1 個当たりのエントロピーの極限は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log Z_n}{n} = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.481212 \tag{1}$$

となる．

2 Kasteleyn の定理

さて、より一般の格子領域に対してエントロピーを計算し、その漸近的な振る舞いを調べたい．そのために有用なのが Kasteleyn 行列の方法である．まず、格子領域 R に対し、その双対グラフ（dual graph）を G とおく．ここで、$G = (V, E)$ がグラフであるとは、V が集合であり、$E \subset V^{(2)}$ は V の 2 次の対称積の部分集合であることを指す．但し、V の 2 次の対称積 $V^{(2)}$ は、直積 $V \times V$ を、2 つの成分の置換 $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$ で生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用で割ったものである．この時、V の元を G の頂点、E の元を G の辺と呼ぶ．$(v, w) \in V \times V$ に対し、これの代表する $V^{(2)}$ の元を $\{v, w\}$ で表す．$\{v, w\} \in E$ の時、2 つの頂点 v と w は辺で結ばれているといい、またこの時、v と w

を辺 $\{v, w\}$ の端点と呼ぶ．$\mathbb{Z}^2$ の部分集合 Λ で指定される格子領域 $R(\Lambda)$ の双対グラフは、頂点の集合が Λ であり、２つの頂点 (m, n) と (k, l) は対応する正方形 T_{mn} と T_{kl} が隣接している（すなわち、$|m-n| = 1$ かつ $k = l$、または $m = n$ かつ $|k-l| = 1$）時に辺で結ばれているとして定義される．

$G = (V, E)$ を頂点の集合 V が有限であるようなグラフ、$n = \#V$ をその頂点の個数とする．頂点に適当な番号を付けて $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とおくと、G の隣接行列（adjacency matrix）と呼ばれる n 次の正方行列 M が

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ と } v_j \text{ が辺で結ばれている時,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定まる．

格子領域 R に対し、その双対グラフの隣接行列の成分に重みを付けたもの $K(R)$ を

$$(K(R))_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ と } v_j \text{ が水平な辺で結ばれている時,} \\ \sqrt{-1} & v_i \text{ と } v_j \text{ が垂直な辺で結ばれている時,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義し、格子領域 R に対する Kasteleyn 行列と呼ぶ．

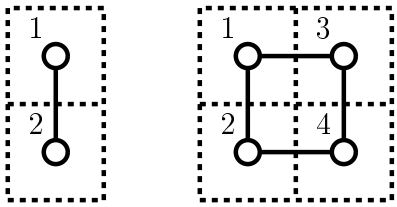

図 2: 格子領域 R_1, R_2 とその双対グラフの頂点の番号付け

例えば、格子領域 R_1, R_2 の双対グラフの頂点に図 2 にあるように番号を付けると、対応する Kasteleyn 行列は

$$K(R_1) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$K(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 1 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 1 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

次の定理は Kasteleyn による [12]：

定理 1 (Kasteleyn). R を単連結な格子領域、$K(R)$ を対応する Kasteleyn 行列とすると、

$$Z(R) = \sqrt{|\det K(R)|}.$$

証明. 格子領域 R に対し、その双対グラフ $G(R)$ は頂点を適当に塗り分けることによって常に 2 色グラフ（bipartite graph）にできる．ここで 2 色グラフとは、グラフであって、頂点の集合 V が $V = V_1 \coprod V_2$ と 2 つの非連結和に分解されていて、全ての辺は V_1 と V_2 の元を結んでいる（すなわち、V_1 の元どうしや V_2 の元どうしを結んでいる辺は存在しない）ものを指す．例えば、大きさ 3×4 の矩形領域の双対グラフは、図 2 の様にして 2 色グラフになる．ここで、V_1 に属する頂点を白丸で、V_2 に属する頂点を黒丸で表した．

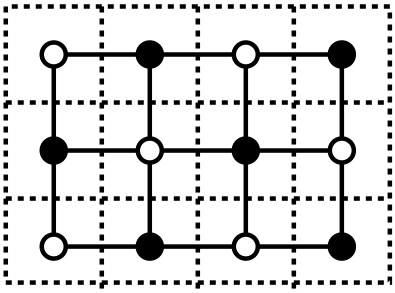

図 3: 大きさ 3×4 の矩形領域の双対グラフ

さて、R のドミノによるタイル張りは、次のようにして定義される $G(R)$ のダイマー配置（dimer configuration）と 1 対 1 に対応する：グラフ G の辺の集合 E の部分集合 D がダイマー配置であるとは、任意の G の頂点 $v \in V$ に対して、v を端点として持つ D の元がただ一つ存在することを言う．R のドミノによるタイル張りが与えられたとき、$G(R)$ の辺の集合で、ドミノの境界と交わらないものを D とおくと、D はダイマー配置になる（図 2）．ちなみに、ダイマーとは二量体を指す化学用語である（単量体だとモノマー，重合体だとポリマーになる）．上のような対象は、ダイマーの非常に単純化された統計力学的な模型と考えることができる．

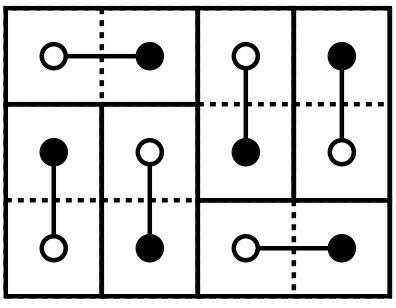

図 4: ドミノによるタイル張りと双対グラフのダイマー配置の対応

ドミノによるタイル張りが可能であるためには、V_1 と V_2 に属する頂点の数が同じでなければならない．この数を n とおき、$G(R)$ の頂点に、v_1 から v_n が V_1 の元で、v_{n+1}

から v_{2n} が V_2 の元であるように番号を付けると、対応する Kasteleyn 行列は

$$K(R) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{K}(R) \\ \overline{K}(R) & 0 \end{pmatrix}$$

の形になる．ここで、$\overline{K}(R)$ は n 次の正方行列であり、0 は n 行 n 列の零行列である．従って、

$$|\det K(R)| = \left|\det \overline{K}(R)\right|^2$$

となる．さて、$G(R)$ のダイマー配置 D から、$i = 1, \ldots, n$ に対し、v_i を頂点として含む辺で D に属するもののもう一方の頂点を $v_{\sigma(i)+n}$ と定めることによって $\mathfrak{S}_n$ の元を定めることができる．これによってダイマー配置のなす集合は $\mathfrak{S}_n$ の部分集合になるが、

$$\overline{K}_\sigma(R) = \operatorname{sgn}\sigma\, \overline{K}_{1\sigma(1)}(R) \cdots \overline{K}_{n\sigma(n)}(R)$$

とおくと、Kasteleyn 行列の定義から、

$$\left|\overline{K}_\sigma(R)\right| = \begin{cases} 1 & \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ がドミノによるタイル張りに対応する時、} \\ 0 & \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ がドミノによるタイル張りに対応しない時、} \end{cases}$$

となる．一方、任意の単連結な格子領域のドミノによる任意の 2 つのタイル張りは、大きさ 2×2 の正方形領域のタイル張りに対する図 2 に示したような操作の繰り返しによって互いに移り合う．

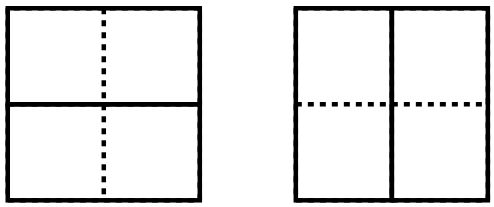

図 5: 大きさ 2×2 の正方形領域のタイルの張り替え

しかも、この操作によって $\overline{K}_\sigma(R)$ が変わらないことは容易に確かめられるので、

$$Z(R) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left|\overline{K}_\sigma(R)\right| = \left|\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \overline{K}_\sigma(R)\right| = \left|\det \overline{K}(R)\right| = \sqrt{|\det K(R)|}$$

を得る． □

3 矩形領域のエントロピー

さて、この Kasteleyn の定理を使って大きさが $m \times n$ の矩形領域 $R_{m,n}$ のエントロピーを計算しよう．この時、Kasteleyn 行列は mn 行 mn 列の正方行列になり、その

$((s,t),(u,v))$ 成分 $K_{(s,t),(u,v)}$ は

$$K_{(s,t),(u,v)} = \begin{cases} 1 & |s-u| = 1 \text{ かつ } t = v \text{ の時}, \\ \sqrt{-1} & s = u \text{ かつ } |t-v| = 1 \text{ の時}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

となる．$K \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ を、$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ の標準的な基底 $e_u \otimes e_v$ と $e_s \otimes e_t$ の間の行列要素が $K_{(s,t),(u,v)}$ であるような線形写像とする．ここで、整数 j と k に対しベクトル f_{jk} を

$$f_{ij} = \sum_{u=1}^{m} \sum_{v=1}^{n} \sin \frac{\pi j u}{m+1} \sin \frac{\pi k v}{n+1} e_u \otimes e_v$$

で定めると、これは Kasteleyn 行列の固有ベクトルになる：

$$K f_{jk} = \left(2\cos \frac{j\pi}{m+1} + 2\sqrt{-1} \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) f_{jk}.$$

$\{f_{jk}\}_{j=1,\ldots,m k=1,\ldots,n}$ が $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ の基底になるので、

$$\det K = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(2\cos \frac{j\pi}{m+1} + 2\sqrt{-1} \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

となる．これから、ドミノ一個当たりのエントロピーの極限は

$$\begin{aligned}
\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{2nm} \log Z(R_{m,n}) &= \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{4nm} \log |\det K| \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{4nm} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \log \left| 2\cos \frac{j\pi}{m+1} + 2\sqrt{-1} \cos \frac{k\pi}{n+1} \right| \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{4nm} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \log \Big| \exp[\frac{j\pi}{m+1}\sqrt{-1}] + \exp[-\frac{j\pi}{m+1}\sqrt{-1}] \\
&\qquad + \exp[\frac{k\pi}{n+1}\sqrt{-1}] + \exp[-\frac{k\pi}{n+1}\sqrt{-1}] \Big| \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 d\theta \int_0^1 d\phi \log \left| (e^{\sqrt{-1}\pi\theta} + e^{-\sqrt{-1}\pi\theta}) + \sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}\pi\phi} + e^{-\sqrt{-1}\pi\phi}) \right| \\
&= \frac{1}{16} \int_{-1}^1 d\theta \int_{-1}^1 d\phi \log \left| (e^{\sqrt{-1}\pi\theta} + e^{-\sqrt{-1}\pi\theta}) + \sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}\pi\phi} + e^{-\sqrt{-1}\pi\phi}) \right|
\end{aligned}$$

となる．ここで、

$$x = e^{\sqrt{-1}\pi\theta}, \quad y = \sqrt{-1} e^{\sqrt{-1}\pi\phi}$$

とおくと、

$$d\theta = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \frac{dx}{x}, \quad d\phi = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \frac{dy}{y}$$

より、

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{nm}\log Z(R_{m,n}) = -\frac{1}{16\pi^2}\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}\int_{|y|=1}\frac{dy}{y}\log\left|x+\frac{1}{x}+y-\frac{1}{y}\right|$$
$$= -\frac{1}{16\pi^2}\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}\int_{|y|=1}\frac{dy}{y}\log\left|\frac{(x+1)^2}{x}+\frac{(y-1)^2}{y}\right|$$
$$= -\frac{1}{16\pi^2}\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}\int_{|y|=1}\frac{dy}{y}\log\left|\frac{(x+1)^2}{x}+\frac{(y+1)^2}{y}\right| \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

となる.

4 高さ関数

さて、より一般に、矩形とは限らない格子領域のドミノによるタイル張りの数の漸近挙動を調べたい．そのために重要なのが、ドミノによるタイル張りから定まる高さ関数（height function）の概念である [18], [3], [13]．R を格子領域とし、対応する双対グラフを 2 色に塗り分ける仕方（2 通りある）が 1 つ指定されているとする．この時、R のドミノによるタイル張りと、R の高さ関数と呼ばれる R の格子点の集合 $\widetilde{\Lambda}$ から整数の集合 $\mathbb{Z}$ への写像の同値類が 1 対 1 に対応する．ここで、格子領域 R の格子点とは、R の境界または内部にある格子点を指す．格子領域 R が有限集合 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^2$ によって $R=R(\Lambda)$ と表されているとき、格子点の集合は

$$\widetilde{\Lambda} = \bigcup_{(m,n)\in\Lambda}\{(m,n),(m+1,n),(m,n+1),(m+1,n+1)\}$$

となる．関数 $h:\widetilde{\Lambda}\to\mathbb{Z}$ が高さ関数であるとは、隣接する格子点 $u,v\in\widetilde{\Lambda}$ に対し、

$$h(v)-h(u) = \begin{cases} -1 \text{ または } 3, & \text{辺 } uv \text{ の左側の面が白色の時、} \\ 1 \text{ または } -3, & \text{辺 } uv \text{ の左側の面が黒色の時、} \end{cases}$$

であり、しかも

$$|h(v)-h(u)| = 1, \quad \text{辺 } uv \text{ が } R \text{ の境界に属する時、}$$

を満たすことを指す．ここで、辺 uv の左側の面とは、u を下、v を上と思ったときに左側に来る面を指す．2 つの高さ関数 $h,h':\widetilde{\Lambda}\to\mathbb{Z}$ が同値であるとは、ある整数 $k\in\mathbb{Z}$ が存在して、任意の $p\in\widetilde{\Lambda}$ に対して $h(p)-h'(p)=k$ が成り立つことを指す．R の格子点の上の高さ関数 h に対して、対応するドミノによるタイル張りを、

$$|h(v)-h(u)| = \begin{cases} 1, & \text{辺 } uv \text{ がドミノの境界になる時、} \\ 3, & \text{辺 } uv \text{ をドミノが横切る時、} \end{cases} \tag{4}$$

を満たすように定義すると、この対応で R のドミノによるタイル張りと R の格子点の上の高さ関数の同値類が 1 対 1 に対応する（図 4）.

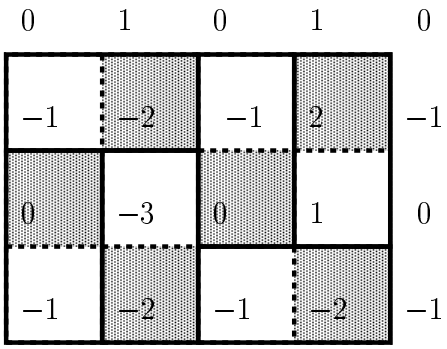

図 6: ドミノによるタイル張りと高さ関数の対応

5 高さ関数と Conway のタイル張り群

さて、ここで Thurston [18] による高さ関数の取り扱いを紹介しよう．有限生成な群 G とその生成元 $g_1, g_2, \ldots, g_n$ が与えられたとき、G の $g_1, g_2, \ldots, g_n$ に関する Cayley グラフと呼ばれる有向グラフで、辺に n 個の色が付いたもの $\Gamma(G) = (V, E_1, \ldots, E_n)$ が次のように定義される：頂点の集合は G 自身（すなわち $V = G$）であり、$i = 1, 2, \ldots, n$ と $(g, h) \in V \times V$ に対し、

$$h = gg_i$$

となるとき g から h に向かう i 番目の色の辺が存在する（すなわち $(g, h) \in E_i$）．ここで、$G = (V, E)$ が有向グラフであるとは、V が集合で E が $V \times V$ の部分集合であることを指す．この状況で、2 つの $v, w \in V$ に対し、$(v, w) \in E$ ならば v から w に向かう辺が存在するという．さらに、辺の集合 E が

$$E = E_1 \coprod E_2 \coprod \cdots \coprod E_n$$

と共通部分を持たない和集合に分割されているとき、辺が n 色に色分けされているという．群 G の Cayley グラフ $\Gamma(G)$ は生成元 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ の取り方に依存する．

任意の $g \in G$ に対し、それが定義する Cayley グラフ $\Gamma(G) = (V, E_1, \ldots, E_n)$ の変換

$$V \ni h \mapsto gh \in V,$$
$$E \ni (k, h) \mapsto (gk, gh) \in E,$$

は $\Gamma(G)$ の自己同型なので、G は G 自身の Cayley グラフに作用し、しかもこの作用は頂点の集合に対して推移的である（つまり、群の Cayley グラフは常に等質グラフになる）．また逆に、この性質は群の Cayley グラフを特徴づける：n を自然数とし、ある有向グラフ Γ の辺が n 色に塗り分けられていて、任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ と任意の Γ の頂点 g に対し、g から出る辺で i 番目の色を持つものがただ一つ存在する時、このグラフが適当な群 G とその適当な生成元 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ に対する Cayley グラフであることの必要十分条件は、Γ の任意の 2 つの頂点 g, h に対し、g を h に移すような Γ の自己同型が存在することである．

ここで、G がさらに有限表示である（つまり、$g_1, g_2, \ldots, g_n$ からなる有限個の語（すなわち、$g_1, g_2, \ldots, g_n$ で生成される自由群の元）$R_1, R_2, \ldots, R_k$ があって、G が

$$G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \ldots, R_k = 1 \rangle$$

と表示されている）と仮定すると、G の $g_1, g_2, \ldots, g_n$ に関する Cayley グラフ $\Gamma(G)$ の語 $R_1, R_2, \ldots, R_k$ に対応するサイクルに 2 次元の円盤を張り付けることによって、2 次元の複体 $\Gamma^2(G)$ を作ることができる．$\Gamma(G)$ のループに対応する G の元は単位元なので、必ず $R_1, R_2, \ldots, R_k$ の積で与えられ、このことから複体 $\Gamma^2(G)$ は単連結であることが分かる．

さて、$\mathbb{Z}^2$ の生成元 $g_1 = (1, 0), g_2 = (0, 1)$ に対応する Cayley グラフ $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ は、$\mathbb{Z}^2$ の隣接点を左から右、下から上に結んだ有向グラフになる（図 5）．$\mathbb{Z}^2$ の生成元 g_1, g_2 の間の関係式は

$$R_1 = g_1 g_2 {g_1}^{-1} {g_2}^{-1}$$

で与えられ、対応する $\Gamma^2(\mathbb{Z}^2)$ は $\mathbb{R}^2$ と同相になる．

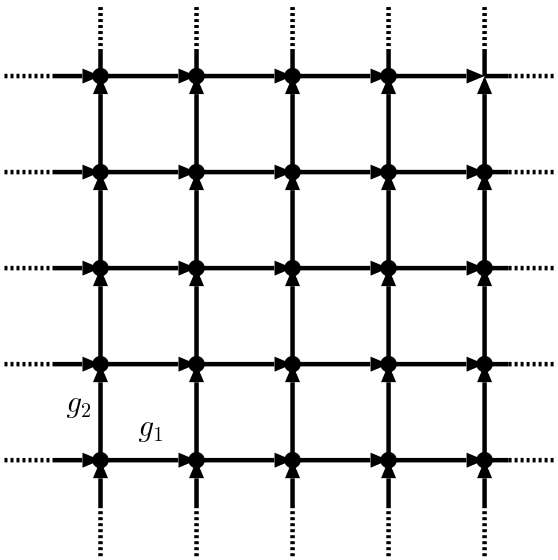

図 7: $\mathbb{Z}^2$ に対する Cayley グラフ

ここで、単連結な格子領域 R を与えると、その境界 ∂R をなぞることによって自由群 $F = \langle g_1, g_2 \rangle$ の元 $B(R)$ が定まる．この境界 ∂R が閉曲線であることから、射影 $F \to \mathbb{Z}^2$ による $B(R)$ の像が単位元 $0 \in \mathbb{Z}^2$ であることが分かる．ここで、R が 1 つのドミノで覆われる領域の時、$B(R)$ はこのドミノが縦に置かれているか横に置かれているかによって

$$D_1 = g_1 {g_2}^2 {g_1}^{-1} {g_2}^{-2}$$

または

$$D_2 = {g_1}^2 g_2 {g_1}^{-2} {g_2}^{-1}$$

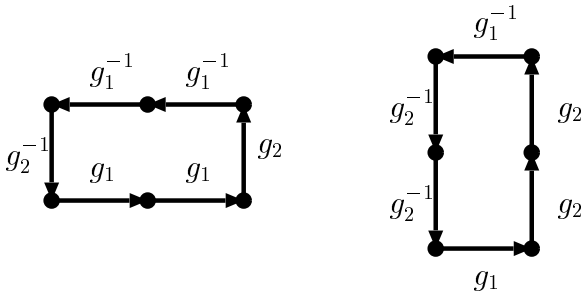

図 8: ドミノ 1 個で覆われる領域

となる（図 5）.

ここで、ドミノ群 D を、g_1 と g_2 で生成される自由群を関係式 D_1 と D_2 で割った群として導入する：

$$D = \langle g_1, g_2 \mid D_1 = 1, D_2 = 1 \rangle$$

この時、与えられた格子領域 R がドミノによるタイル張りを持つための必要条件は、R の境界から定まる語 $B(R)$ が D で単位元に等しいことである．また、格子領域のドミノによるタイル張りに限らず、より一般の Cayley グラフの中の与えられた領域が適当な図形によってタイル張りされるための必要条件が、その領域の境界から定まる語が、タイル張りに使う図形から定まる群（これを Conway のタイル張り群（Conway's tiling group）という）において単位元になることとして与えられる．

このドミノ群 D を使うことによって、高さ関数を次のように理解することができる．$\mathbb{Z}^2$ は D の商群なので、自然な射影 $\pi : D \to \mathbb{Z}^2$ が存在し、これを Cayley グラフに持ち上げることによって、D の g_1, g_2 に関する Cayley グラフ $\Gamma(D)$ から $\mathbb{Z}^2$ の g_1, g_2 に関する Cayley グラフ $\Gamma(\mathbb{Z})$ への自然な射影が存在する．π の核は $g_1 g_2 {g_1}^{-1} {g_2}^{-1}$ で生成されており、$\mathbb{Z}$ と同型なので、$\Gamma(D)$ の頂点は $\Gamma(\mathbb{Z})$ の頂点 (m, n) と $\mathbb{Z}$ の元 k の組 $(m, n, k) \in \mathbb{Z}^3$ として与えられる．ここで、$\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ の 2 色グラフとしての構造を 1 つ選んで固定する（辺ではなく頂点を色分けする）．この時、$\Gamma(D)$ の頂点 (m, n, k) から出る 2 本の辺は、(m, n) が白い頂点の時、g_1 に対応する $(m+1, n, k+1)$ に向かう辺と、g_2 に対応する $(m, n+1, k-1)$ に向かう辺からなり、(m, n) が黒い頂点の時、g_1 に対応する $(m+1, n, k-1)$ に向かう辺と、g_2 に対応する $(m, n+1, k+1)$ に向かう辺からなる．この状況で、格子領域 R のドミノによるタイル張りは、R に対応する $\Gamma(\mathbb{Z}^2)$ の部分グラフ $G'(R) = R \cap \Gamma(\mathbb{Z}^2)$（これは R の双対グラフ $G(R)$ とは異なることに注意）の上での π の切断（すなわち、写像 $h : G'(R) \to \pi^{-1}(G'(R))$）で、合成 $\pi \circ h$ が $G'(R)$ の恒等写像になるもの）と 1 対 1 に対応している．この h がドミノによるタイル張りに対応する高さ関数である．また、高さ関数のこの Thurston による解釈は、ドミノとは限らないより一般の図形によるタイル張りにも一般化することができ、重要である．

6　高さ関数の漸近挙動と変分原理

高さ関数は、ドミノの配置という組み合わせ論的な量を格子点上の関数というより扱いやすい量に置き換えることによって、矩形とは限らない一般の領域のドミノによるタイル張りの漸近挙動を調べる基本的な道具を提供する．例えば、ドミノによるタイル張りが 2 つ与えられたとき、その間の距離というものをどうして定義すればいいかはあまり明らかではないが、高さ関数の観点からは、対応する 2 つの高さ関数の差の最大値を取ることが自然であると考えられる．

さて、「ドミノによるタイル張りの漸近挙動」という言葉で何を指すのかを明確にしよう．$\mathcal{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の領域で、その境界 $\partial\mathcal{R}$ が区分的に滑らかな単純閉曲線であるものとし、さらに $\mathcal{R}$ の境界 $\partial\mathcal{R}$ 上の 2-Lipschitz 関数

$$h_b : \partial\mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

で、$\mathcal{R}$ 上の 2-Lipschitz 関数に拡張できる（すなわち、$\mathcal{R}$ 上の 2-Lipschitz 関数 $h : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ で境界 $\partial\mathcal{R}$ への制限 $h|_{\partial\mathcal{R}}$ が h_b と等しいものが存在する）もの（このような h_b を $\mathcal{R}$ の漸近境界高さ関数（asymptotic boundary height function）と呼ぶ）が 1 つ固定されているとする．ここで、$\mathbb{R}^2$ の部分集合 S 上の実数値関数 $h : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ が 2-Lipschitz 関数であるとは、S の開円盤による被覆が存在して、その被覆に属する任意の開円盤 U に対して、$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U \cap S$ ならば

$$|h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)| \leq 2\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

が成り立つことを指す．

この時、適当な自然数 n に対し、大きさを $1/n$ 倍した格子 $(1/n\mathbb{Z}) \times (1/n\mathbb{Z})$ を考え、その上の単連結な格子領域 R を取る．以下、格子領域には常に白と黒の市松模様（checkerboard pattern、双対グラフの頂点を 2 色に塗り分けると言っても同じことである）が指定されているとする．ここで、組 (P, h_P) が部分高さ関数（partial height function）であるとは、P が R の格子点の部分集合であり、h_P は P 上の整数値関数

$$h_P : P \to \mathbb{Z}$$

であって、P に属する 2 つの格子点 $u, v \in P$ が隣接している時、

$$h_P(v) - h_P(u) = \begin{cases} -1 \text{ または } 3, & \text{辺 } uv \text{ の左側の面が白色の時、} \\ 1 \text{ または } -3, & \text{辺 } uv \text{ の左側の面が黒色の時、} \end{cases}$$

を満たすことを指す．特に、P が R の境界 ∂R の上にある全ての格子点の集合 P_B の時に、(P_B, H_B) が部分高さ関数になるような H_B を R の境界高さ関数（boudary height function）と呼び、P が R の上の全ての格子点の集合 $\widetilde{\Lambda}$ である時、$(\widetilde{\Lambda}, H)$ が部分高さ関数になるような H を R の完全高さ関数（complete height function）と呼ぶ．R の完全高さ関数 h は (4) によって R のドミノによる自由タイル張り（free domino tiling あ

るいは domino tiling with free boundary conditions)、すなわち、R を部分集合として含む適当な格子領域のドミノによるタイル張りで、任意のドミノの内点の集合と R の内点の集合の共通部分が空集合ではない（言い換えると、任意のドミノの少なくとも半分は R に含まれている）ようなものと 1 対 1 に対応している.

さらに、上の状況で、部分高さ関数 (P, h_P) に対して h_P を格子の大きさに応じてスケールしたもの $(P, h_P/n)$ を正規化された部分高さ関数（normalized partial height function）と呼ぶ. 境界高さ関数や完全高さ関数も同様の方法で正規化する.

この準備のもとで、正の実数 $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ に対し、$(1/n\,\mathbb{Z}) \times (1/n\,\mathbb{Z})$ の格子領域 R と R の正規化された境界高さ関数 $(P_B, H_B/n)$ が領域 $\mathcal{R}$ とその漸近境界高さ関数 h_b の ϵ 近傍にあるとは、任意の $x \in \partial\mathcal{R}$ に対してある $y \in P_B$ が存在して、x と y の $\mathbb{R}^2$ の Euclid 計量に関する距離が ϵ 未満（すなわち、$\partial\mathcal{R}$ と ∂R が $\mathbb{R}^2$ の閉部分集合に対する Hausdorff 距離に関して ϵ 以内）になり、しかもそのような x と y に対して

$$\left| h_b(x) - \frac{1}{n} H_B(y) \right| < \epsilon$$

となることを指す.

ここで、次のような問題を考えよう：$\mathcal{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の領域で、その境界 $\partial\mathcal{R}$ が区分的に滑らかな単純閉曲線であるものとし、$h_b : \partial\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{R}$ の漸近境界高さ関数とする. $\{(R_n, H_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を $(1/n\,\mathbb{Z}) \times (1/n\,\mathbb{Z})$ の格子領域 R_n とその境界高さ関数 (P_B, H_n) の組の列で、正規化した境界高さ関数の列 $\{(R, (P_B, H_n/n))\}$ が上のような位相に関して $(\mathcal{R}, h_b)$ に収束するものとする. この時、R_n のドミノ 1 個当たりのエントロピーの極限を求めよ.

上の問いに対する答えは Cohn-Kenyon-Propp の変分原理によって与えられる. これを述べるために、エントロピー汎関数を導入しよう.

まず、$|s| + |t| \leq 2$ を満たす実数 s と t に対し、その局所エントロピー $\mathrm{ent}(s, t) \in \mathbb{R}$ を

$$\mathrm{ent}(s, t) = \frac{1}{\pi} \left(L(\pi p_a) + L(\pi p_b) + L(\pi p_c) + L(\pi p_d) \right) \tag{5}$$

で定義する. ここで、$L(\cdot)$ は

$$L(z) = -\int_0^z \log|2 \sin t| dt$$

で定義される Lobachevsky 関数であり、p_a, p_b, p_c, p_d は上のような s, t から

$$2(p_a - p_b) = t, \tag{6}$$

$$2(p_d - p_c) = s, \tag{7}$$

$$p_a + p_b + p_c + p_d = 1, \tag{8}$$

$$\sin(\pi p_a) \sin(\pi p_b) = \sin(\pi p_c) \sin(\pi p_d) \tag{9}$$

によって定まる.

さて、$\mathcal{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の領域で、その境界 $\partial\mathcal{R}$ が区分的に滑らかな単純閉曲線であるものとする．このとき、$\mathcal{R}$ 上の実数値 2-Lipschitz 関数 $h : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ に対し、そのエントロピー $\mathrm{Ent}(h) \in \mathbb{R}$ が

$$\mathrm{Ent}(h) = \frac{1}{\mathrm{Area}(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} \mathrm{ent}(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}) dx\, dy$$

で定義される．ここで、$\mathrm{Area}(\mathcal{R})$ は $\mathcal{R}$ の面積である．任意の 2-Lipschitz 関数 h はほとんど至るところ微分可能であり、微分可能な点において

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| \leq 2$$

を満たすので、上の式は正しく定義されている．

定理 2 (Cohn-Kenyon-Propp [7]). $\mathcal{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の領域で、その境界 $\partial\mathcal{R}$ が区分的に滑らかな単純閉曲線であるものとし、$h_b : \partial\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ を漸近境界高さ関数とする．さらに、$\{(R_n, (P_B, H_n))\}_{n=1}^{\infty}$ を $(1/n\,\mathbb{Z}) \times (1/n\,\mathbb{Z})$ の格子領域 R_n とその境界高さ関数 (P_B, H_n) の組の列で、正規化した組の列 $\{(R_n, (P_B, H_n/n))\}$ が $(\mathcal{R}, h_b)$ に収束するものとする．このとき、$\mathcal{R}$ 上の 2-Lipschitz 関数 $h : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ で境界への制限 $h|_{\partial\mathcal{R}}$ が h_b と一致するもの全体のなす空間の上でエントロピー汎関数はただ 1 つの最大値を持ち、R のドミノ 1 個あたりの自由エネルギーは $n \to \infty$ でこの最大値に収束する．

さて、上の定理の証明の概要を述べよう．エントロピー汎関数の最大値の存在は $\mathcal{R}$ 上の 2-Lipschitz 関数で境界への制限が h_b と一致するもの全体のなす空間が一様収束位相に関してコンパクトであることから、一意性はエントロピー汎関数の凸性

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) > \frac{\mathrm{Ent}(f_1) + \mathrm{Ent}(f_2)}{2}$$

から従う．エントロピー汎関数の凸性は局所エントロピー関数の凸性から来るのだが、局所エントロピー関数の凸性は、$|s| + |t| \leq 2$ を満たす任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{ent}_{ss}(s,t) < 0, \quad \mathrm{ent}_{tt}(s,t) < 0, \quad \mathrm{ent}_{ss}(s,t)\,\mathrm{ent}_{tt}(s,t) - \mathrm{ent}_{st}(s,t)^2 > 0$$

となることを直接計算で示すことによって証明される．

従って、問題はエントロピー汎関数がどこから来て、何故それがドミノによるタイル張りの漸近挙動を支配しているかである．これを説明するために、まず正方形領域 $R_{2n,2n}$ の対辺を同一視して得られるトーラス上の格子領域を T_n とし、その双対グラフの辺を図 6 のように a, b, c, d の 4 種類に分ける．そして、このダイマー配置 D に対し、D に含まれる辺 a, b, c, d の数をそれぞれ $N_a(D), N_b(D), N_c(D), N_d(D)$ とおいて、次の重み付きの分配関数を考える：

$$Z_n(a,b,c,d) = \sum_{D: T_n \text{ 上のダイマー配置}} a^{N_a(D)} b^{N_b(D)} c^{N_c(D)} d^{N_d(D)}$$

ここで、a, b, c, d は辺のラベルであると同時に変数であるとも考えている．

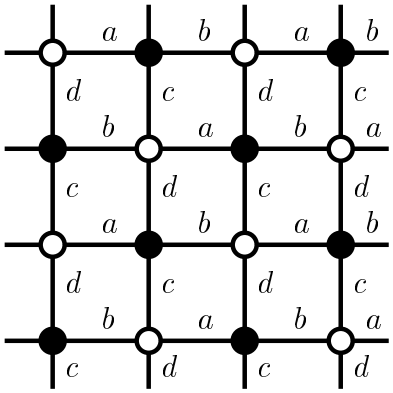

図 9: T_2 の双対グラフとその辺の重み

ここで、a, b, c, d が正の実数の時には、ダイマー配置 D の現われる確率が $a^{N_a(D)}b^{N_b(D)}c^{N_c(D)}d^{N_d(D)}$ に比例するとしてダイマー配置全体の集合（これは n に依存する有限集合である）に確率測度を入れることができる．統計力学の観点からは、$\log a, \log b, \log c, \log d$ が辺 a, b, c, d の化学ポテンシャル（chemical potential）に対応する．この確率測度は a, b, c, d を一様に定数倍しても変わらない．また、$ab = cd$ の時、T_n の単連結な部分格子領域 R と、R の外側のドミノによるタイル張りを 1 つ固定すると、重み a, b, c, d から決まる T_n 上の確率測度が内側の領域のドミノによるタイル張り全体のなす集合に誘導する条件付き確率は一様分布になる（証明は単連結な格子領域のドミノによるタイル張りが図 2 にある操作の繰り返しで互いに移り合うことによる）．これを条件付き一様性（conditional uniformity）といい、この条件 $ab = cd$ を課すことで、ダイマー配置の重みの実質的な自由度は a, b, c, d を一斉に定数倍する自由度を除いて 2 次元になる．

さて、N_a は確率変数になり、その期待値は

$$\begin{aligned} E(N_a) &= \sum_{D:T_n \text{ 上のダイマー配置}} N_a \frac{a^{N_a(D)}b^{N_b(D)}c^{N_c(D)}d^{N_d(D)}}{Z_n(a,b,c,d)} \\ &= \frac{a}{Z_n}\frac{\partial Z}{\partial a} \end{aligned}$$

となる．従って、特定の a 型の辺がランダムなダイマー D に含まれる確率を全ての a 型の辺に渡って平均したものは

$$p_a(n) = \frac{a}{2n^2 Z_n}\frac{\partial Z}{\partial a}$$

である．$p_b(n), p_c(n), p_d(n)$ も同様に定義する．正の実数 $\epsilon > 0$ に対し、

$$\begin{aligned} U_\epsilon = \{D \mid & D \text{ は } |N_a(D) - E(N_a)| < \epsilon E(N_a), |N_b(D) - E(N_b)| < \epsilon E(N_b), \\ & |N_c(D) - E(N_c)| < \epsilon E(N_c), |N_d(D) - E(N_d)| < \epsilon E(N_d) \text{ をみたす} \\ & T_n \text{ 上のダイマー配置} \} \end{aligned}$$

とおき、U_ϵ の元の個数を M_n とおく：

$$M_n = \#U_\epsilon.$$

Cohn-Kenyon-Propp [7] の Theorem 1.3 で述べられているように、十分大きな自然数 n に対し、T_n のドミノによるタイル張りの圧倒的多数は U_ϵ に入り、U_ϵ に入らないタイル張りの個数は n^2 に関して指数関数的に少ない（すなわち、適当な正の実数 $r < 1$ に対して r^{n^2} で上から押さえられる）．従って、分配関数は

$$Z \approx M_n a^{E(N_a)} b^{E(N_b)} c^{E(N_c)} d^{E(N_d)}$$

と近似され、

$$\log M_n \approx \log Z - E(N_a)\log a - E(N_b)\log b - E(N_c)\log c - E(N_d)\log d$$

となる．ここで、辺 a, b, c, d の含まれる個数が平均値に近いものの数 M_n の対数をドミノの個数で割った

$$\mathrm{ent}(a,b,c,d) = \frac{1}{2n^2}\log M_n$$

をエントロピーと呼ぶ．さらに、分配関数の対数

$$F_n(a,b,c,d) = \log Z_n(a,b,c,d)$$

を自由エネルギーと呼び、ドミノ 1 つあたりの自由エネルギーを

$$f_n(a,b,c,d) = \frac{1}{2n^2}F_n(a,b,c,d)$$

とおく．すると、

$$p_a(n) = \frac{\partial f_n}{\partial a}$$

であり、$\mathrm{ent}_n(a,b,c,d)$ は $f_n(a,b,c,d)$ を Legendre 変換することによって得られる：

$$\mathrm{ent}_n(a,b,c,d) = f_n(a,b,c,d) - p_a(n)\log(a) - p_b(n)\log(b) - p_c(n)\log(c) - p_d(n)\log(d).$$

さて、トーラスが単連結ではないので、T_n のダイマー配置に対応する高さ関数は一般には定義できない（一価にならない）．しかし、T_n のダイマー配置は、その普遍被覆である $\mathbb{Z}^2$ の Cayley グラフのダイマー配置で周期 $2n$ を持つものと 1 対 1 に対応し、後者に対しては高さ関数を対応させることができる．こうして得られる高さ関数 $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ は一般には周期的にはならず、$4n$ 個の整数 $h_{x,1}, h_{x,2}, \ldots, h_{x,2n}, h_{y,1}, h_{y,2}, \ldots, h_{y,2n}$ が存在して、

$$h(k+2n, l) = h(k,l) + h_{x,l}$$
$$h(k, l+2n) = h(k,l) + h_{y,k}$$

となる．ここで、この高さ関数の変化の合計を

$$H_x = h_{x,1} + h_{x,2} + \cdots + h_{x,n}$$
$$H_y = h_{y,1} + h_{y,2} + \cdots + h_{y,n}$$

とおくと、高さ関数とドミノによるタイル張りの関係から、H_x, H_y は辺 a, b, c, d がダイマー配置に含まれている個数 N_a, N_b, N_c, N_d と

$$H_x = 2(N_d - N_c)$$
$$H_y = 2(N_a - N_b)$$

という関係にある．従って、x 軸及び y 軸に沿った単位長さ当たりの高さ関数の変化の期待値 s 及び t はそれぞれ

$$s = 2(p_d(n) - p_c(n))$$
$$t = 2(p_a(n) - p_b(n))$$

となる．

さて、ここで n が大きくなる極限を考察しよう．Kasteleyn 行列の方法は T_n の場合にも拡張され、

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} \log Z_n(a,b,c,d) \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \log \left| \frac{(a+bx)^2}{x} + \frac{(c+dy)^2}{y} \right| \end{aligned} \tag{10}$$

となる．さらに、

$$\begin{aligned} p_a &= \lim_{n\to\infty} p_a(n) = \frac{\partial f}{\partial a} \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \frac{a + b/x}{(a+bx)^2/x + (c+dy)^2/y}, \end{aligned}$$

であり、また p_b, p_c, p_d に関しても同様である．これから

$$\mathrm{ent}(a,b,c,d) = f(a,b,c,d) - p_a \log a - p_b \log b - p_c \log c - p_d \log d$$

となり、これを高さ関数の平均的変化 s と t の関数として表すと、多少の計算の後に (5) を得る．ここで、(6)、(7)、(8)、(9) における p_a, p_b, p_c, p_d は辺の重み a, b, c, d と

$$a = \sin(\pi p_a),\ b = \sin(\pi p_b), c = \sin(\pi p_c),\ d = \sin(\pi p_d),$$

で関係している．(6) と (7) は辺の含まれる確率と高さ関数の変化の期待値の関係であり、(8) は任意の頂点が必ず a, b, c, d のどれかの辺の端点になっているという条件、そして (9) は条件付き一様性である．

$$a + b + c + d = 1$$

を満たす正の実数 a, b, c, d がさらにどの数も残りの 3 つの数の和よりも小さいという条件、すなわち

$$\begin{aligned} a &< b + c + d, \\ b &< c + d + a, \\ c &< d + a + b, \\ d &< a + b + c, \end{aligned}$$

を満たすとき、辺の長さが a, b, c, d の 4 角形で、円に内接するものが存在する（図 6）．この時、a, b, c, d と p_a, p_b, p_c, p_d の関係は、長さが a, b, c, d の辺が切り取る円弧の角度が

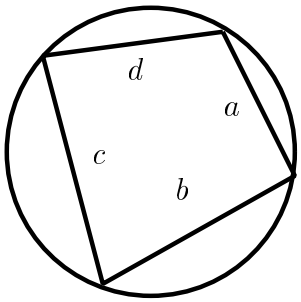

図 10: 円に内接する 4 角形

それぞれ $2\pi p_a, 2\pi p_b, 2\pi p_c, 2\pi p_d$ となることで与えられる．

さらに、上半空間

$$\mathbb{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

を Poincaré 計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

によって双曲多様体と思い、その境界 $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ の中の $\mathbb{R}^2$ に上の 4 角形を描いて、その 4 つの頂点と無限遠点 ∞ を頂点とするような上半空間上の理想 5 面体を V とおくと、$\mathrm{ent}(a, b, c, d)$ は V の体積を π で割ったものになっている．特に、$a = b = c = d = 1$ とおくと、

$$\mathrm{ent}(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{\pi}\left(4L(\pi/4)\right)$$

となる．ここで、Lobachevsky 関数の展開

$$L(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{k^2}$$

を使うと、G を Catalan 定数

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

としたときに

$$\mathrm{ent}(1,1,1,1) = \frac{2G}{\pi} \approx 0.583122$$

となることが分かる．これは (1) で与えられる $2 \times n$ の矩形領域のドミノ 1 個当たりのエントロピーの極限よりも少し大きくなり、細長い領域に比べて縦も横も大きな領域の方がドミノによるタイル張りの平均的な自由度が大きいことが見て取れる．

これまでの議論から、$|s| + |t| \leq 2$ を満たす実数 s と t が与えられたとき、この s と t を高さ関数の変化の期待値として持つような T_n のドミノによるタイル張りの個数は、

$$s = 2(p_d(n) - p_c(n)),$$
$$t = 2(p_a(n) - p_b(n)),$$

かつ条件付き一様性

$$ab = cd$$

を満たすような a, b, c, d を用いて

$$\exp[2n^2 \,\mathrm{ent}(a,b,c,d)]$$

で与えられる．また、n が大きいときにはドミノによるタイル張りの数に対する境界の影響は小さいので、矩形領域 $R_{2n,2n}$ のドミノによる自由タイル張りで、高さ関数の変化の期待値 s と t が与えられたものの個数も全く同じ式で与えられると考えられる．さらに、一般の領域 $\mathcal{R}$ と、その上の 2-Lipschitz 関数 h に対しても、その領域を格子のスケール $1/n$ よりは十分大きく、しかも関数 h の変化のスケールよりは十分小さな矩形領域の合併集合で近似しておいて、それぞれの矩形領域の上で h を線形関数で近似し、近似的にそのような高さ関数を持つドミノによるタイル張りを与えるような辺の重み a, b, c, d で条件付き一様性を満たすものを求めて、その a, b, c, d に対してエントロピーを計算し、このエントロピーを足し上げることによって、$\mathcal{R}$ を近似するような格子領域のドミノによるタイル張りで、与えられた 2-Lipschitz 関数 h に近い高さ関数を持つものの個数を計算することができる．これがエントロピー汎関数の意味である．従って、ドミノによるタイル張りの高さ関数の期待値は $n \to \infty$ でエントロピー汎関数を最大にするような 2-Lipschitz 関数に漸近し、ドミノ 1 つ当たりのエントロピーは対応するエントロピー汎関数の最大値に収束することが分かる．

7 Mahler 測度

n 変数の Laurent 多項式 $P(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$ に対し、その対数的 Mahler 測度 $m(P)$ を

$$m(P) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{|x_1|=1} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \int_{|x_n|=1} \frac{dx_n}{x_n} \log |P(x_1, \cdots, x_n)|$$

で定義する．さらに、$M(P) = \exp[m(P)]$ とおいて、P の Mahler 測度と呼ぶ．(10) より、2 変数 Laurent 多項式

$$P(x, y) = \frac{(a + bx)^2}{x} + \frac{(c + dy)^2}{y}$$

に対し、その Mahler 測度が定数倍を除いてトーラスのドミノによるタイル張りにおけるドミノ 1 個当たりの自由エネルギーの極限と一致することが分かる．

$n = 1$ の時、正の実数 R に対し

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 \prod_{i=1}^{d} (x - a_i), \\ |a_i| &\le R \quad i = 1, \ldots, N, \\ |a_i| &> R \quad i = N, \ldots, d, \end{aligned}$$

とおくと、Jensen の公式（例えば Ahlfors [1] 参照）より、

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|x|=R} \log |P(x)| \frac{dx}{x} = N \log R + \log |P(0)| - \sum_{i=1}^{N} \log \frac{|a_i|}{R}$$

であるので、特に $R = 1$ とおいて

$$m(P) = \log |a_0| + \sum_{i=1}^{d} \log^+ |a_i|$$

を得る．ただし、$\log^+ |a_i| = \max\{\log |a_i|, 0\}$ とおいた．

さて、次の定理は [19] で Kronecker の定理と呼ばれている．ここでの証明は [15]、Lemma 19.1 に従った．

定理 3. 最高次の項の係数が 1 の整係数 Laurent 多項式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$ の対数的 Mahler 測度が零になるための必要十分条件は、$P(x)$ が単項式といくつかの円分多項式の積の形

$$P(x) = x^k c_1(x) c_2(x) \cdots c_r(x)$$

に書けていることである．ここで、$k \in \mathbb{Z}$、$r \in \mathbb{N}$ であり、$i = 1, 2, \ldots, r$ に対し、$c_i(x)$ は円分多項式（すなわち、1 の冪根の最小多項式）である．

証明. Jensen の公式から十分性は明らかなので、必要性を示す．まず、適当な $k \in \mathbb{Z}$ に対して $x^{-k} P(x)$ を考えることにより、$P(x)$ の最低次の項は 0 次であると仮定して良い．

$$P(x) = x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \cdots + a_0 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_s)$$

とおく．Jensen の公式により、$m(P) = 0$ ならば $P(x)$ の全ての根の絶対値が 1 以下である：

$$|\alpha_i| \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

ここで、解と係数の関係から

$$\alpha_1 \cdots \alpha_s = a_0 \in \mathbb{Z}$$

である．$a_0 \neq 0$ なので、$a_0 = 1$ であり、$i = 1, \ldots, s$ に対して $|\alpha_i| = 1$ が従う．$P(x)$ が実係数の多項式なので、任意の $i = 1, \ldots, s$ に対し α_i の複素共役 $\overline{\alpha_i}$ も $P(x)$ の根である．ここで、$\overline{\alpha_i} = {\alpha_i}^{-1}$ なので、$P(x)$ の最小分解体を K、その整数環を $\mathcal{O}_K$ とおくと、α_i と ${\alpha_i}^{-1}$ がともに $\mathcal{O}_K$ に入る．従って、K の任意の素点 v に対し、$|\alpha_i|_v = 1$ となる．さて、K のアデール環を $\mathbb{A}_K$ とおき、K を $\mathbb{A}_K$ に対角に埋め込むと、K は $\mathbb{A}_K$ の中で離散になるので、$P(x)$ の根 $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ で乗法的に生成される K の部分群 $G = \langle \alpha_i \rangle_{i=1}^s$ の $\mathbb{A}_K$ における像も離散になる．一方、K の任意の素点 v に対し、$|\alpha_i|_v = 1$ なので、G の $\mathbb{A}_K$ における像は $\mathbb{A}_K$ のコンパクト集合 $\prod_{v:K \text{ の素点}} \{a_v \in K_v \mid |a_v|_v \leq 1\}$ に入る．コンパクト集合の離散部分集合は有限集合なので、G は有限群になり、G の元が全て 1 の冪根になることが分かる．従って、$P(x)$ は円分多項式の積で書ける． □

円分多項式以外の整係数多項式に関しては、次の予想がある：

予想 4 (Lehmer). ある正の実数 c が存在して、任意の $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ で、円分多項式と単項式の積ではないものに対して

$$m(P) > c$$

が成り立つ.

この予想は未解決であるが、Lehmer が提出した

$$L(x) = x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1,$$
$$m(L) = 0.162357\ldots$$

よりも小さい対数的 Mahler 測度を持つ整係数多項式は見つかっていない.

多項式 $P(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ は、$i = 0, 1, \ldots, s$ に対し $a_i = a_{s-i}$ を満たすとき、回文的（reciprocal）という．Smyth は 1971 年の博士論文 [16] において、回文的でない整係数の 1 変数多項式の対数的 Mahler 測度の最小値は

$$m(x^3 - x - 1) = 0.281199\ldots$$

であることを示した.

8 Mahler 測度と L 関数の特殊値

1981 年に Smyth は 2 変数の多項式

$$1 + x + y$$

の対数的 Mahler 測度を計算し、

$$m(1 + x + y) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) = L'(\chi_{-3}, -1) \tag{11}$$

を得た [17]．ここで、自然数 N と mod N の Dirichlet 指標 $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対し、対応する Dirichlet の L 関数 $L(\chi, s)$ が

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p\,:\,\text{素数}} \left(1 - \chi(p)p^{-s}\right)^{-1}$$

で定義される．また、χ_{-3} は次のようにして定義される mod 3 の Dirichlet 指標である：一般に、整数 m に対し

$$N = \begin{cases} |m| & m \equiv 1 \mod 4 \text{ のとき、} \\ |4m| & m \equiv 2, 3 \mod 4 \text{ のとき、} \end{cases}$$

とおくと、$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ は円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ の部分体になる．ただし、ζ_N は 1 の原始 N 乗根である．$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}) \cong \{\pm 1\}$、$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ であり、この同型によって制限写像 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q})$ に対応する $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の指標 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ を χ_m と呼ぶ．χ_m は具体的には、素数 p に対し、

$$\chi_m(p) = \begin{cases} 0 & (p) \text{ が } \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} \text{ で分岐するとき、} \\ 1 & (p) \text{ が } \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} \text{ で異なる 2 つの素イデアルの積に分かれるとき} \\ -1 & (p) \text{ が } \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} \text{ の素イデアルの時} \end{cases} \quad (12)$$

で与えられる．$m = -3$ の時、

$$\chi_{-3}(n) = \left(\frac{-3}{n}\right) = 0, 1, -1 \quad \text{if } n \equiv 0, 1, 2 \mod 3$$

は mod 3 の原始奇指標になり、対応する Dirichlet の L 関数は

$$\begin{aligned} L(\chi_{-3}, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{-3}(n) \frac{1}{n^s} \\ &= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \cdots \end{aligned}$$

となる．

注意 5. 代数体 K の Dedekind ゼータ関数を

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

で定義する．ただし、$\mathcal{O}_K$ は K の整数環で、$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{p}$ はそれぞれ $\mathcal{O}_K$ の零でないイデアルと零でない素イデアルを動くとする．すると、1 以外の平方数で割れない整数 m に対し、2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(s)$ は

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(s) = \zeta(s) L(\chi_m, s)$$

と積に分解する．ここで、$\zeta(s)$ は Riemann のゼータ関数である．

Smyth の結果を受けて、1984 年に Chinburg が次の問題を提出した：

問題 6 (Chinburg). 正の自然数 f に対し、2 変数多項式 $P_f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ と零でない有理数 r_f で、

$$m(P_f) = r_f \frac{f\sqrt{f}}{4\pi} L(\chi_{-f}, 2)$$

を満たすものは存在するか？

11 節で見るように、この Chinburg の問題は、双曲幾何と密接に関係する．

さて、1997 年に Deninger は、n を任意の自然数とするとき、n 変数の整数係数 Laurent 多項式 $P(x_1, \ldots, x_n)$ がトーラス $T^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\}$ 上に零点を持たないとき、P の対数的 Mahler 測度 $m(P)$ が混合モチーフの Deligne 周期であることを示した [11]．これによって Mahler 測度と L 関数の特殊値の関係が、モチーフの周期と L 関数の特殊値の間の関係に関する Bloch-Beilinson 予想の文脈に位置づけられることになる．この Deninger の仕事に触発されて、Boyd は 2 変数 Laurent 多項式 $P(x,y) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ と $P(x,y) = 0$ の Jacobi 多様体の成分であるような楕円曲線 E、それに高さの小さな有理数 B の組 (P, E, B) で、数値的に高い精度で

$$L'(E, 0) \approx B\, m(P)$$

を満たすものを数百個見つけ、これが実際に

$$L'(E, 0) = B\, m(P) \tag{13}$$

を満たすことを予想した [4]．以下の 2 つの節では、Rodriguez Villegas の論説 [19] に沿って、この Boyd の予想に関する Rodriguez Villegas たちの仕事を紹介しよう．

9　楕円曲線とレギュレーター

E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とすると、その Néron モデル $\mathcal{E}$ と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 上の楕円曲線が定まり、$\mathcal{E}$ の素数 l を法とした還元は有限体 $\mathbb{F}_l$ 上の曲線を定める．この曲線 $\mathcal{E} \mod l$ が滑らかになるときに $\mathcal{E}$ は l で良い還元（good reduction）を持つと言い、$\mathcal{E} \mod l$ が特異点を持つとき、$\mathcal{E}$ は l で悪い還元（bad reduction）を持つと言う．$\mathcal{E}$ は l で悪い還元を持つ時、$\mathcal{E} \mod l$ の特異点が節点（node）であるか尖点（cusp）であるかによって $\mathcal{E}$ は l でそれぞれ乗法的還元（multiplicative reduction）、加法的還元（additive reduction）を持つと言う．$\mathcal{E}$ が l で乗法的還元を持つとき、節点での 2 本ある接線の傾きがともに $\mathbb{F}_l$ に入っていれば $\mathcal{E}$ は l で分裂乗法的還元（split multiplicative reduction）を持つと言い、そうでない（すなわち、$\mathbb{F}_l$ の拡大体にしか入らない）とき、非分裂乗法的還元（non-split multiplicative reduction）を持つと言う．

$\mathcal{E}(\mathbb{F}_l)$ を $\mathcal{E}$ の $\mathbb{F}_l$ 有理点の集合とする．$\mathcal{E}$ が l で良い還元を持つとき、整数 a_l を、$\mathcal{E}(\mathbb{F}_l)$ の元の個数 $\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_l)$ を使って

$$a_l = l + 1 + \#\mathcal{E}(\mathbb{F}_l)$$

で定める．この状況で、E の L 関数を

$$L(E,s)=\prod_{l:\text{良い還元}}\frac{1}{1-a_l l^{-s}+l^{1-2s}}\prod_{l:\text{分裂乗法的還元}}\frac{1}{1-l^{-s}}\prod_{l:\text{非分裂乗法的還元}}\frac{1}{1+l^{-s}}$$

で定義する．

さて、一般に F を体とするとき、その 2 次の K 群 $K_2(F)$ が、生成元を

$$\{x,y\},\quad x,y\in F^\times,$$

関係式を

$$\begin{aligned}\{x,1-x\}&=1,\quad x\neq 0,1,\\ \{x_1x_2,y\}&=\{x_1,y\}\{x_2,y\},\\ \{x,y_1y_2\}&=\{x,y_1\}\{x,y_2\},\end{aligned}$$

とする可換群として定義される（例えば Milnor [14] を見よ）．但し、$F^\times=F\setminus\{0\}$ は F の可逆元の集合である．

体 F に対し、$F^\times\times F^\times$ から可換群 A への関数 c で、

$$\begin{aligned}c(x,1-x)&=1,\quad x\neq 0,1,\\ c(x_1x_2,y)&=c(x_1,y)c(x_2,y),\\ c(x,y_1y_2)&=c(x,y_1)c(x,y_2),\end{aligned}$$

$c(x,1-x)=1$ を満たすものを Steinberg 記号（Steinberg symbol）と呼ぶ．ここで、A の演算を乗法的に表した．$K_2(F)$ の定義から、A に値をとる Steinberg 記号を与えることと $K_2(F)$ から A への準同型 c を与えることは同値である．

例 7. Hilbert 記号（Hilbert symbol）
$A=\{\pm1\}\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし、$a,b\in F^\times$ に対して、$c(a,b)$ を

$$c(a,b)=\begin{cases}1 & ax^2+by^2=1\text{ が }F\text{ で解を持つ時、}\\ -1 & ax^2+by^2=1\text{ が }F\text{ で解を持たない時、}\end{cases}$$

で定義すると、c は Steinberg 記号になる．これを Hilbert 記号という．

例 8. 馴指標（tame symbol）
v を F の離散付値とし、対応する整数環 $\mathcal{O}=\{x\in F\mid v(x)\geq 0\}$ の極大イデアル $\{x\in F\mid v(x)>0\}$ を $\mathfrak{m}$、剰余体 $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ を k とおく．Tate は v における馴記号

$$\lambda_v:K_2(F)\to k^\times$$

を、

$$F^\times\times F^\times\ni(x,y)\mapsto(-1)^{v(x)v(y)}\frac{x^{v(y)}}{y^{v(x)}}\mod\mathfrak{m}$$

で定義し、これを用いて

$$K_2(\mathbb{Q}) = A_2 \oplus A_3 \oplus A_5 \oplus \cdots$$

を示した．但し、$A_2 = \{\pm 1\}$ であり、奇素数 p に対し $A_p = \mathbb{F}_p^\times$ である．

さて、話を戻して、E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線、$E_{\mathbb{C}}$ を E の $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{C}$ への係数拡大、$\mathbb{C}(E)$ を $E_{\mathbb{C}}$ の有理関数体とする．$f, g \in \mathbb{C}(E)^\times$（つまり、恒等的に零ではない $E_{\mathbb{C}}$ 上の 2 つの有理関数）に対して、

$$\eta(f, g) = \log|f| d\arg g - \log|g| d\arg f$$

は、$E_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{C}$ 有理点の集合 $E(\mathbb{C})$ から f と g の極と零点の集合 S を除いた、コンパクトとは限らない Riemann 面 $E(\mathbb{C}) \setminus S$ 上の実数値 C^∞ 級微分形式を定める．定義から

$$\begin{aligned}
\eta(f, g) &= -\eta(g, f), \\
\eta(f_1 f_2, g) &= \eta(f_1, g) + \eta(f_2, g) \\
d\eta(f, g) &= Im(\frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}) = 0,
\end{aligned}$$

が容易に従う．さらに、Jensen の公式から、$w \in E(\mathbb{C})$ に対し、w を中心とする十分小さな円周 C を取ると

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \eta(f, g) = \log|(f, g)_w|$$

が確かめられる．但し、$(f, g)_w$ は点 $w \in E(\mathbb{C})$ に対応する $\mathbb{C}(E)$ の離散付値（つまり、$E_{\mathbb{C}}$ 上の有理関数に対してその w での極または零点の位数を対応させる写像）から決まる馴記号である．このことから、有限集合 $S \subset E(\mathbb{C})$ に対し

$$K_{2,S}(E) = \bigcap_{w \notin S} \mathrm{Ker}\lambda_w \subset K_2(\mathbb{C}(E))$$

と定義すると、写像 $(f, g) \mapsto \eta(f, g)$ は写像

$$\overline{r} : K_{2,S}(E) \to H^1(E(\mathbb{C}) \setminus S, \mathbb{R})$$

を定める事が分かる．さらに、E の $\mathbb{R}$ 有理点の集合に適当に向きを入れたもの $E(\mathbb{R})$ は $E(\mathbb{C})$ の実 1 次元のサイクルになり、$\alpha \in K_{2,\emptyset}(E)$ に積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E(\mathbb{R})} \overline{r}(\alpha)$$

を対応させることによって写像

$$K_{2,\emptyset}(E) \to \mathbb{R}$$

が出来る．さて、$K_2(E)$ と $K_2(\mathcal{E})$ をそれぞれ E と $\mathcal{E}$ の Quillen の 2 次の K 群とすると、$\mathbb{Q}$ をテンソル積すると同型になる写像

$$K_2(E) \to K_{2,\emptyset}(E) \subset K_2(\mathbb{Q}(E))$$

が存在して、$K_2(\mathcal{E})$ は、$\mathbb{Q}$ をテンソル積すると消える部分を除いて、分裂乗法的な還元を持つ素数 1 つごとに 1 つの条件で定義される $K_2(E)$ の部分群と同型になり、上の写像はレギュレーター写像

$$r : K_2(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$$

を定める.

予想 9 (Bloch-Beilinson 予想). E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線、$\mathcal{E}$ を E の Néron モデルとする. この時、$K_2(\mathcal{E})$ の Abel 群としての階数は 1 であり、ある $\alpha \in K_2(\mathcal{E}) \setminus K_2(\mathcal{E})_{\mathrm{tor}}$ とある零でない有理数 $B \in \mathbb{Q}^\times$ が存在して、

$$L'(E_k, 0) = B\, r(\alpha)$$

が成り立つ. ここで、$K_2(\mathcal{E})_{\mathrm{tor}}$ は $K_2(\mathcal{E})$ の捩れ部分群である.

2 変数 Laurent 多項式 $P(x, y)$ に対し、その Newton 多角形 $\Delta(P)$ を、$P(x, y)$ における $x^m y^n$ の係数が零でないような $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ たちのなす集合の $\mathbb{R}^2$ における凸包（つまり、そのような (m, n) たちを含む最小の凸集合）として定義する. Danilov-Khovansky [10] によって、代数的トーラス $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ の中で $P(x, y) = 0$ で定義されるアファイン代数曲線の種数は、$P(x, y)$ が Newton 多角形 $\Delta(P)$ を持つ Laurent 多項式のなす空間の一般の元であれば、$\Delta(P)$ の内部にある格子点の数に一致する. 例えば、一般の d 次多項式の Newton 多角形は頂点を $(0, 0), (d, 0), (0, d)$ とする 3 角形であり、その内部の格子点の個数は $(d-1)(d-2)/2$ である. 一方、超楕円曲線の Newton 多角形は頂点を $(0, 0), (d, 0), (0, 2)$ とする 3 角形であり、その内部の格子点の個数は $(d-1)/2$ である.

さて、Laurent 多項式 $P(x, y)$ の Newton 多角形 $\Delta(P)$ の辺 τ に対し、τ の上の格子点を、端から順に $\tau(0), \tau(1), ldots, \tau(s)$ と呼ぼう. ここで、$s \in \mathbb{N}$ は線分 τ の長さであり、τ のどちらの端点を $\tau(0)$ と定めても良い. さらに、$i = 0, 1, \ldots, s$ に対して $\tau(i) = (m, n)$ であるとき、c_i を $P(x, y)$ における $x^m y^n$ の係数として、1 変数多項式 $P_\tau(t)$ を

$$P_\tau(t) = \sum_{i=0}^{s} c_i t^i$$

で定義する. 2 変数 Laurent 多項式 $P(x, y)$ の Newton 多角形 $\Delta(P)$ の任意の辺 τ に対し、$P_\tau(t)$ の根が全て 1 の冪根であるとき、$P(x, y)$ は tempered であるという. 定理 3 により、これは $\Delta(P)$ の任意の辺 τ に対して P_τ の対数的 Mahler 測度が消えることと同値である. この概念の重要性は次の命題による：

命題 10 (Rodriguez Villegas, Bornhorn). $\{x, y\}^N \in K_{2,\emptyset}(E)$ となる自然数 N が存在するための必要十分条件は P が tempered であることである.

さて、$P(x, y)$ を 2 変数 Laurent 多項式とし、$P(x, y) = 0$ で定義される代数的トーラス $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ の中のアファイン代数曲線 C° は $\mathbb{Q}$ 上定義されていて、

$|x| = |y| = 1$ で定まる実トーラス $T \subset \mathbb{T}$ と交わらないとする．C を C° の $\mathbb{P}^2$ における閉包 $\overline{C^\circ}$ を正規化して得られる $\mathbb{Q}$ 上の非特異代数曲線とし、x, y を関数体 $\mathbb{Q}(C)$ の元と見なす.

定理 11 (Rodriguez Villegas). 上の状況で、ある $\gamma \in H_1(C; \mathbb{Z})$ が存在して

$$m(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \overline{r}(\{x, y\}).$$

が成り立つ.

さらに、C が楕円曲線なら γ が $E(\mathbb{R})$ の代表するホモロジー類の整数倍であることも知られている．従って、もし $\{x, y\} \in K_2(\mathbb{C}(E))$ が $K_2(\mathcal{E})$ に入れば、Boyd の予想が Bloch-Beilinson 予想から従うことが分かる．さらに、有理数倍は問題ではないので、たとえ $\{x, y\}$ が $K_2(\mathcal{E})$ に入らなくても、適当な自然数 N に対して、$\{x, y\}^N$ が $K_2(\mathcal{E})$ に入ればよい.

Danilov-Khovansky の定理と命題 10 を合わせると、$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E と $K_2(\mathcal{E})$ の元の組を作るには、格子点を頂点とし、内部に格子点をただ一つ含む多角形を選び、その多角形を Newton 多角形に持つ tempered な 2 変数 Laurent 多項式で、対応する楕円曲線が $\mathbb{Q}$ 上定義されているものを持ってくるという方法が有力である．格子点を頂点に持つ多角形 Δ が内部に格子点をただ一つ含むことの必要十分条件は、Batyrev [2] の意味で反射的である（すなわち、Δ の極双対（polar dual）Δ° を

$$\Delta^\circ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid up + vq \geq -1 \text{ for } \forall (p, q) \in \Delta\}$$

で定義すると、$(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$ となる）ことである.

注意 12. これは 2 次元の場合の特殊事情によるものであり、一般には反射的であることは内部に格子点をただ一つ含むことよりも真に強い．反射的な多面体はトーリック超曲面として表される Calabi-Yau 多様体のミラー対称性と深い関係がある．例えば Cox-Katz [9] の 4 章などを参照.

10 Mahler 測度と保型形式

前節を踏まえ、複素数 $k \in \mathbb{C}$ に対し

$$P_k(x, y) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - k$$

で定義される 2 変数 Laurent 多項式の対数的 Mahler 測度

$$m(P_k) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \log \left| k - (x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}) \right|$$

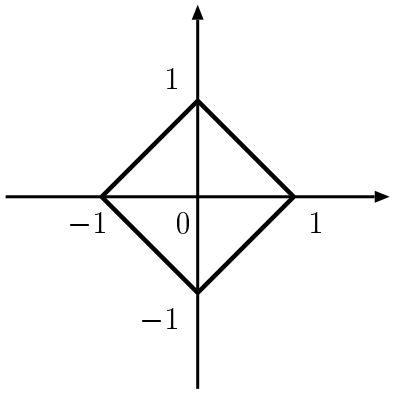

図 11: $P_k(x,y)$ の Newton 多角形

を考察しよう．任意の $k \in \mathbb{C}$ に対し $P_k(x,y)$ は tempered であり、対応する Newton 多角形は図 10 にあるように反射的になる．また、(10) に現われる Laurent 多項式において $a=b=c=d=1$ とおくと、これは $P_k(x,y)$ において $k=-4$ としたものと等しい：

$$P_{-4}(x,y) = \frac{(1+x)^2}{x} + \frac{(1+y)^2}{y}.$$

さて、

$$X = xy, \quad Y = \frac{x}{y}$$

と座標変換して、X, Y を改めて x, y とおくと、

$$m(P_k) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \log \left| k - (x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \right|$$

となる．さらに、$k \in \mathbb{R}$、$k > 4$ と仮定すると、

$$\begin{aligned}
m(P_k) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \log \left| k - (x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \right| \\
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \mathfrak{Re} \log \left[k - (x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \right] \\
&= \log k + \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \log \left[1 - \frac{1}{k}(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \right] \\
&= \log k + \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x} \int_{|y|=1} \frac{dy}{y} \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ \frac{1}{k}(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y}) \}^n \right] \\
&= \log k - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{a_n}^2}{nk^n}
\end{aligned}$$

となる．但し、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}(x+\frac{1}{x})^n \\ &= \left((x+\frac{1}{x})^n\text{の定数項}\right) \\ &= \begin{cases}\binom{n}{n/2} & n\text{が偶数の時,}\\ 0 & \text{その他}\end{cases} \end{aligned}$$

とおいた．ここで、対数的 Mahler 測度の正則版 $\widetilde{m}(P_k)$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{m}(P_k) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}\int_{|y|=1}\frac{dy}{y}\log\left[k-(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y})\right] \\ &= \log k - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{{a_n}^2}{nk^n} \end{aligned}$$

で定義すると、これは k の多価関数になる．この両辺を $\log k$ で微分し、微分と積分の順序交換をすると、

$$\begin{aligned} k\frac{d}{dk}\widetilde{m}(P_k) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}k\frac{d}{dk}\left(\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}\int_{|y|=1}\frac{dy}{y}\log\left[k-(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y})\right]\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}\int_{|y|=1}\frac{dy}{y}k\frac{d}{dk}\log\left[k-(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y})\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{|x|=1}\frac{dx}{x}\int_{|y|=1}\frac{dy}{y}\frac{k}{k-(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{|x|=|y|=1}\frac{kdxdy}{kxy-(x^2y+xy^2+x+y)} \end{aligned}$$

となる．楕円曲線 E_k を

$$\{(x,y)\in(\mathbb{C}^\times)^2 \mid P_k(x,y)=0\}$$

の $\mathbb{P}^2\supset(\mathbb{C}^\times)^2$ における閉包として定義すると、最後の行はこの楕円曲線 E_k の周期（つまり、正則微分形式の適当なサイクルでの積分）になっており、Laurent 多項式 $P(x,y)$ の対数的 Mahler 測度が $P(x,y)=0$ で定義される代数曲線の周期と密接に関係していることが窺える．

$\lambda=1/k$、$\mu=\lambda^2$ とおき、$\widetilde{m}(P_k)$ を $\log k$ で微分したものを μ の関数と見て

$$\begin{aligned} u_0(\mu) &= k\frac{d}{dk}\widetilde{m}(P_k) \\ &= -2\mu\frac{d}{d\mu}\widetilde{m}(P_k) \end{aligned}$$

とおくと、

$$u_0(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \mu^n$$
$$= F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 16\mu)$$

となる．E_k の周期の満たす Picard-Fuchs 方程式は、$\theta = \mu d/d\mu$ を使って表すと

$$\left[\theta^2 - 4\mu(2\theta+1)^2\right] u = 0. \tag{14}$$

となり、これの u_0 以外の解を Frobenius の方法（すなわち、$\epsilon^2 = 1$ となる ϵ を導入し、

$$u(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\epsilon)\mu^{n+\epsilon}, \quad \mu^\epsilon = 1 + \epsilon \log \mu, \quad a_0(\epsilon) = 1$$

とおいて上の微分方程式に代入し、形式解を求めて

$$u(\mu) = u_0(\mu) + u_1(\mu)\epsilon$$

とおく方法）によって求めると、

$$u_1(\mu) = u_0(\mu)\log\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(2k+1)(k+1)} \mu^n$$
$$= u_0(\mu)\log\mu + 8\mu + 84\mu^2 + \frac{2960}{3}\mu^3 + \cdots$$

となる．(14) は $\mu = 1/16$ と $\mu = \infty$ にも確定特異点を持ち、$\mu = 0, 1/16, \infty$ の周りを回る道に沿った、(14) の u_0 と $u_1/2\pi\sqrt{-1}$ を解の基底とするモノドロミー行列 M_0, M_1, M_∞ を計算すると

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_\infty = M_1 M_0$$

となる．これから、(14) のモノドロミー群が

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad - bc = 1 \text{ かつ } c \equiv 0 \mod 4 \right\}$$

であることが分かる．さて、楕円曲線 E_k の周期の 2 倍を

$$\tau = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{u_1}{u_0},$$

とおき、

$$q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$$

とする．さらに、q の関数 $\phi(q)$ を

$$\begin{aligned}\phi(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d|2n+1} d\, q^{2n+1} \\ &= q + 4q^3 + 6q^5 + 8q^7 + 13q^9 + \cdots\end{aligned}$$

で定義すると、μ を q の関数と思ったもの $\mu(q)$ は

$$\mu(q) = \frac{\phi(q)}{c(q)^2} = q - 8q^2 + 44q^3 - 192q^4 + \cdots$$

と表される．ここで、$c(q)$ は u_0 を q の関数と思ったもの

$$c(q) = u_0(\mu(q))$$

であり、次の Kronecker-Eisenstein 級数による表示を持つ：

$$c(q) = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \chi_{-4}(d) q^n. \tag{15}$$

ここで、χ_{-4} は (12) で定義された Dirichlet 指標であり、具体的には

$$\chi_{-4}(n) = \left(\frac{-4}{n}\right) = 0, 1, 0, -1, \qquad n \equiv 0, 1, 2, 3 \mod 4 \text{ の時}$$

で与えられる．さらに、関数 $e(q)$ を

$$e(q) = c\frac{q\, d\mu/dq}{\mu}$$

で導入すると、

$$\begin{aligned}e(q) &= 1 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \chi_{-4}(n) q^n}{1-q^n} \\ &= 1 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^2 \chi_{-4}(d) q^n \end{aligned} \tag{16}$$

となる．λ、c、e は Picard-Fuchs 方程式 (14) のモノドロミー群 $\Gamma_0(4)$ に関してウエイトがそれぞれ 0、1、3 の保型形式である．$e(q)$ の定義から

$$\begin{aligned}e(q) &= u_0(\mu(q))\frac{q d\mu/dq}{\mu} \\ &= u_0(\mu(q))\frac{d\log\mu}{d\log q} \\ &= -2\frac{d\widetilde{m}(P_k)}{d\log\mu}\frac{d\log\lambda}{d\log q} \\ &= -2\frac{d\widetilde{m}(P_k)}{d\log q}\end{aligned}$$

なので、これと (16) を合わせると、

$$2q\frac{d\widetilde{m}(P_k)}{dq} = -1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\chi_{-4}(n)q^n}{1-q^n}$$
$$= -1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} d^2\chi_{-4}(d)q^n$$

を得る．この式の両辺を $\log q$ で積分すると、

$$\widetilde{m}(P_k) = -\frac{1}{2}\log q - 2\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{-4}(n)\log(1-q^n)$$
$$= -\frac{1}{2}\log q - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{d|n} d^2\chi_{-4}(d)q^n$$

を得る．ただし、積分定数は $\mu = 0$ の周りでの振る舞い

$$\widetilde{m}(P_k) = -\frac{1}{2}\log(\mu) + O(\mu), \quad q = \mu + O(\mu^2),$$

から決めた．これから Mahler 測度の正則版 $\exp[\widetilde{m}(P_k)]$ の無限積表示

$$\exp[\widetilde{m}(P_k)] = q^{-\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-2\chi_{-4}(n)}$$

を得る．$\widetilde{m}(P_k)$ を $\tau = \log q$ の関数と見たものを $G(\tau)$ で表す：

$$G(\tau) = -\pi\sqrt{-1}\tau + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{d|n} d^2\chi_{-4}(d)q^n \tag{17}$$
$$= \frac{16\mathfrak{Im}(\tau)}{\pi^2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)}\chi_{-4}(n)\frac{1}{(m4\tau+n)^2(m4\overline{\tau}+n)}. \tag{18}$$

すると、

$$m(P_k) = \mathfrak{Re}[G(\tau)]$$

である．

さて、E_k の Weierstrass 標準形は

$$y^2 = x^3 + \frac{k^2}{2}(\frac{k^2}{2}-1)x^2 + \frac{k^4}{16}x$$

なので、$k^2 \in \mathbb{Q}$ ならば E_k は $\mathbb{Q}$ 上定義されている．この E_k の L 関数と対数的 Mahler 測度の関係を議論しよう．

例 13. 退化した場合：
$k=\pm 4$ および $k=0$ の時、対応する τ はそれぞれ上半平面への $\Gamma_0(4)$ の作用に関する尖点 $\tau=0$ および $\tau=1/2$ になり、E_k は有理曲線に退化する．$k=\pm 4$ の時、(17) に形式的に $\tau=0$ を代入すると

$$G(0)=2L_4(1)$$

となる．ただし、$L_4(s)$ は $\mathfrak{Re}(s)>3$ なる $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$L_4(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\chi_{-4}(d)d^2\frac{1}{n^s}=\zeta(s)L(\chi_{-4},2-s), \tag{19}$$

で定義される．$\zeta(s)$ と $L(\chi_{-4},s)$ の関数等式から

$$L_4(1)=L'(\chi_{-4},-1)$$

である．同様の議論で

$$m(P_0)=0$$

が得られる．

例 14. 虚数乗法を持つ場合：
$k=4\sqrt{2}$ の時、$\tau=\sqrt{-1}/2$ であり、$E_{4\sqrt{2}}$ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ で虚数乗法を持つ．

$$\psi:\mathbb{A}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}\to\mathbb{C}^{\times}$$

を $E_{4\sqrt{2}}/\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に関する量指標とし、

$$L(\psi,s)=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\psi(\mathfrak{p})\#(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

を対応する Hecke の L 関数とすると、Deuring により

$$L(E_{4\sqrt{2}},s)=L(\psi,s)$$

となる．ψ は具体的には

$$\psi((2m\sqrt{-1}+n))=\chi_{-4}(n)(2m\sqrt{-1}+n)$$

で与えられ、この時、(18) から

$$\begin{aligned}m(P_{4\sqrt{2}})&=\frac{16}{\pi^2}L(E_{4\sqrt{2}},2)\\&=L'(E_{4\sqrt{2}},0)\end{aligned}$$

を得る．同様のことが $k=2\sqrt{2},\tau=(1+\sqrt{-1})/4$ に対しても成り立つ．

例 15. モジュラー曲線の場合：
$k = 3\sqrt{2}$ の時、$E_{3\sqrt{2}}$ はモジュラー曲線 $X_0(24) = H/\Gamma_0(24)$ と同型になる．ここで、

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\tau > 0\}$$

は上半平面、

$$\Gamma_0(24) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1,\ c \equiv 0 \mod 24 \right\}$$

は $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群である．この場合の Bloch-Beilinson 予想は Beilinson によって証明されており、

$$\frac{L'(E_{\sqrt{18}}, 0)}{m(P_{\sqrt{18}})} \in \mathbb{Q}^\times$$

が従う．

11 Mahler 測度と双曲多様体の体積

この節での記述は [5] および [6] を参考にした．上半空間

$$\mathbb{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

を、上半空間の Poincaré 計量に関する向きを保つ等長写像全体のなす群 $PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群 Γ で割った商空間 $X = \mathbb{H}/\Gamma$ を双曲多様体と呼ぶ．ここで、X がトーラスカスプを 1 つだけ持つ（すなわち、$\partial X = T^2$）と仮定しよう．この条件は、例えば X が S^3 から結び目を取り除いた補空間の時には自動的に満たされる．この時、$\pi_1(\partial T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ の生成元を μ, λ として、X の基本群の任意の表現 $\rho : \pi_1(X) \to SL_2(\mathbb{C})$ に対し、$\rho(\mu)$ と $\rho(\lambda)$ の固有値をそれぞれ $M, 1/M$ および $L, 1/L$ とおく．すると、Cooper-Culler-Gillet-Long-Shalen [8] によって、X, μ, λ から決まるある多項式 $A(x, y)$ が存在して、任意の $\pi_1(X)$ の表現 ρ に対して $A(L, M) = 0$ が成り立つ．この多項式 $A(x, y)$ を Alexander にちなんで A 多項式と呼ぶ（有名な結び目の不変量である Alexander 多項式とは別物である）．A 多項式はかならず整係数で tempered になる．$\pi_1(\partial X) \cong \mathbb{Z}^2$ の生成元 λ, μ の取り方には $\mathrm{Auto}(\mathbb{Z}^2) = SL_2(\mathbb{Z})$ の作用の分だけ任意性があるが、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して生成元を

$$\lambda \mapsto a\lambda + b\mu, \quad \mu \mapsto c\lambda + d\mu,$$

と変換すると、A 多項式は

$$A(L, M) \mapsto A(L^d M^{-b}, L^{-c} M^a)$$

と変換される．この変換で $A(x, y)$ の対数的 Mahler 測度 $m(A)$ は不変なので、$m(A)$ は $\pi_1(\partial X)$ の生成元 λ, μ の取り方によらず X のみから定まる．

X が結び目の補空間の時には、μ を結び目のメリディアンに取ると、$A(x,y)$ が y の偶関数になる．従って、ある多項式 $B(x,y)$ が存在して $A(x,y)=B(x,y^2)$ となる．

さて、K を図 11 にある 8 の字結び目（the figure eight knot）とし、$X=S^3\setminus K$ を 3 次元球面 S^3 から K を除いた補集合とする．このとき、X は双曲多様体になり、上半

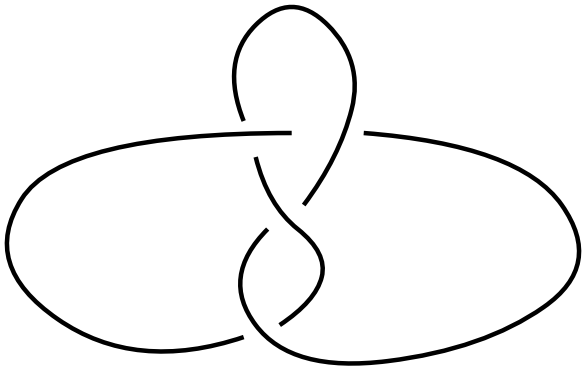

図 12: 8 の字結び目

空間 $\mathbb{H}$ を、$PSL(2,\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}])$ の指数 12 の部分群 Γ で割ったものと同相になることが知られている．双曲多様体に対してその体積は位相不変量になるが、特に上の X の場合には

$$\mathrm{Vol}(X)=2D(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})$$

で与えられる事が分かる．ここで $D(z)$ は、古典的な Euler の 2 重対数関数

$$\mathrm{Li}_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

によって

$$D(z)=\mathfrak{Im}\,\mathrm{Li}_2(z)+\arg(1-z)\log|z|$$

で定義される Bloch-Wigner の 2 重対数関数（dilogarithm）であり、その特殊値 $D(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})$ は、 mod 3 の指標 χ_{-3} に対する Dirichlet L 関数の 2 での値と

$$L(\chi_{-3},2)=\frac{4\sqrt{3}}{9}D(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})$$

という関係にある．一方、X に対する A 多項式

$$B(x,y)=-y^4+x(1-y-2y^2-y^3+y^4)-x^2$$

に対し

$$\mathrm{Vol}(X)=\pi m(B(x,y))$$

が Boyd によって証明されており、これらを組み合わせると、$f=3$ に対して Chinburg の問題が肯定的に解決される．

より一般に、

$$\Gamma = PSL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-f})})$$

をBianchi群といい、対応する双曲多様体$B_f = \mathbb{H}/\Gamma$をBianchi多様体という．Humbertによって1919年に

$$\mathrm{Vol}\, B_f = \frac{f\sqrt{f}}{24} L(\chi_{-f}, 2)$$

が示されているので、もしB_fが結び目の補空間として表され、しかもその体積がA多項式の対数的Mahler測度にπと適当な有理数を掛けたものになっていることが証明できれば、Chinburgの問題が肯定的に解決できることになる．この方針によって、Boyd、LongとReidによって、$f = 23$の場合のChinburgの問題が初めて肯定的に解決された．

参考文献

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] Victor V. Batyrev. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. *J. Algebraic Geom.*, 3(3):493–535, 1994.

[3] H. W. J. Blöte and H. J. Hilhorst. Roughening transitions and the zero-temperature triangular Ising antiferromagnet. *J. Phys. A*, 15(11):L631–L637, 1982.

[4] David W. Boyd. Mahler's measure and special values of L-functions. *Experiment. Math.*, 7(1):37–82, 1998.

[5] David W. Boyd. Mahler's measure and invariants of hyperbolic manifolds. In *Number theory for the millennium, I (Urbana, IL, 2000)*, pages 127–143. A K Peters, Natick, MA, 2002.

[6] David W. Boyd. Mahler's measure, hyperbolic geometry and the dilogarithm. *Canad. Math. Soc. Notes*, 34.2:3–4 & 26–28, 2002.

[7] Henry Cohn, Richard Kenyon, and James Propp. A variational principle for domino tilings. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2):297–346 (electronic), 2001. math.CO/0008220.

[8] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long, and P. B. Shalen. Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds. *Invent. Math.*, 118(1):47–84, 1994.

[9] David A. Cox and Sheldon Katz. *Mirror symmetry and algebraic geometry*, volume 68 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[10] V. I. Danilov and A. G. Khovanskiĭ. Newton polyhedra and an algorithm for calculating Hodge-Deligne numbers. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 50(5):925–945, 1986.

[11] Christopher Deninger. Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbf{Z}^n$-actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(2):259–281, 1997.

[12] P. W. Kasteleyn. Dimer statistics and phase transitions. *J. Mathematical Phys.*, 4:287–293, 1963.

[13] L. S. Levitov. Equivalence of the dimer resonating-valence-bond problem to the quantum roughening problem. *Phys. Rev. Lett.*, 64(1):92–94, 1990.

[14] John Milnor. *Introduction to algebraic K-theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Annals of Mathematics Studies, No. 72.

[15] Klaus Schmidt. *Dynamical systems of algebraic origin*, volume 128 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[16] C. J. Smyth. On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. *Bull. London Math. Soc.*, 3:169–175, 1971.

[17] C. J. Smyth. On measures of polynomials in several variables. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 23(1):49–63, 1981.

[18] William P. Thurston. Conway's tiling groups. *Amer. Math. Monthly*, 97(8):757–773, 1990.

[19] F. Rodriguez Villegas. Modular Mahler measures. I. In *Topics in number theory (University Park, PA, 1997)*, volume 467 of *Math. Appl.*, pages 17–48. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.