ミラー対称性とLagrangeトーラスファイブレーション

植田一石

1. 導入

高次元の多様体を調べる典型的な方法の1つは、ファイブレーションを考えることである。厳密な意味でのファイバー束の構造を持つ多様体は多くないが、特異ファイバーを許すことで適用範囲は飛躍的に広がる。

シンプレクティック多様体にファイブレーションの構造を入れる際には、ファイバーにも何らかのシンプレクティック幾何的な条件を課して考えるのが自然である。シンプレクティック多様体のシンプレクティック幾何的な部分多様体としてすぐに思いつくものとしては、シンプレクティック部分多様体とLagrange部分多様体がある。

シンプレクティック多様体のシンプレクティック部分多様体によるファイブレーションで最も重要なものはシンプレクティックLefschetzファイブレーションである。これは非退化な特異点のみを許したファイバー束の一般化であり、Morse関数の概正則幾何的な類似でもある。ここで概複素多様体からRiemann面への概正則写像が非退化であるとは、概複素局所座標を上手く取ると$(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^2 + \cdots + z_n^2$の形に表せることを指す。また、シンプレクティック多様体にはシンプレクティック構造と整合的な概複素構造を与えておくものとする。Donaldsonによる有名な定理によって、任意のシンプレクティック多様体はシンプレクティックLefschetz束(symplectic Lefschetz pencil)の構造を持ち、適当に爆発することでシンプレクティックLefschetzファイブレーションの構造を入れることができる。

シンプレクティック多様体のシンプレクティック部分多様体は、シンプレクティック形式の制限が非退化であることで定義されるが、Lagrange部分多様体の概念はこれとある意味で対極にあり、シンプレクティック形式の制限が零であることで定義される。非退化性が開条件なのに対し、零であることは閉条件なので、部分多様体がLagrangeであることは、シンプレクティックであることに比べてずっと厳しい条件である。シンプレクティック部分多様体は少し変形してもシンプレクティック部分多様体であるが、Lagrange部分多様体は少し変形するとLagrange部分多様体で無くなってしまう。

Lagrange部分多様体によるファイブレーションの中でも、一般のファイバーがトーラスであるようなものは特に重要である。その根拠の1つがLiouville-Arnoldの定理であり、Liouvilleの意味での完全可積分系が、適当な条件の下でLagrangeトーラスファイブレーションを与えることを主張する。もう1つの根拠は、シンプレクティック多様体の幾何学的量子化によって得られるHilbert空間が、Lagrangeトーラスファイブレーションの Bohr-Sommerfeldファイバーを基底とするベクトル空間と密接に関わることである。この関係はトーリック多様体に於いて最も顕著であるが、旗多様体やRiemann面上の階数2のベクトル束のモジュライに於いても類似の構造を見出すことが出来る。以下では、このLagrangeトーラスファーブレーションがミラー対称性とも深く関わる事を紹介したい。

2. ミラー対称性

ミラー対称性の源流は、トーラス上の弦理論の研究の過程で発見された、弦が点粒子とは全く異なる仕方でこの世界を見ているという認識にまで遡ることができる。半径$2\pi R$の円周$T = \mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$上を運動する自由粒子に対する、時間に依存しないSchrödinger方程式

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) = E\,\Psi(x) \tag{1}$$

の解は、運動量$m \in \mathbb{Z}$を用いて$\Psi(x) = \exp\left(\sqrt{-1}mx/R\right)$と書かれ、その時のエネルギーは$E = m^2/R^2$で与えられる。一方、$T$の上の古典的な弦の運動を記述するために、エネルギーとして汎関数

$$\mathrm{Map}(S^1, T) \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \int_{S^1} \left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2 \frac{d\theta}{2\pi} \tag{2}$$

を考えると、与えられた巻き数$w \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(T)$に於いてエネルギーを最小にする配位は$\gamma(\theta) = Rw\theta$であり、その時のエネルギーは$R^2w^2$で与えられる。$T$上を運動する量子論的な弦は運動量と巻き数の両方を持ち、そのエネルギーは

$$E = \frac{m^2}{R^2} + R^2w^2 \tag{3}$$

で与えられる。ここで、半径Rを$1/R$に置き換えると同時に運動量と巻き数を入れ替えると、弦のエネルギーは不変に保たれることが分かる。この議論は本質的に非相対論的である上に、弦の状態を記述するには運動量と巻き数以外にも、弦の振動モードを指定する無限個の自然数が必要である点でも不正確であるが、より精密に調べても、半径Rの円周上の弦理論と半径$1/R$上の円周上の弦理論は区別できないことが知られている。これはT双対性(T-duality)と呼ばれ、

- 点粒子の理論には無い弦理論特有の現象であり、
- 古典論には無い量子論的な現象である。

より一般に、n次元Euclid空間$\mathbb{R}^n$を階数nの離散部分群$N \subset \mathbb{R}^n$で割って得られるトーラスを$T := \mathbb{R}^n/N$とすると、T上を運動する弦は、Tの指標群$M = \mathrm{Hom}(T, S^1) \cong \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$に値を取る運動量に加えて、$M$の双対群$N \cong \pi_1(\mathbb{T})$に値を取る巻き数を持ち、弦の力学は運動量と巻き数を入れ替えると同時にトーラス$T = N_{\mathbb{R}}/N$と双対トーラス$\check{T} = M_{\mathbb{R}}/M$を入れ替える操作によって不変である。言い換えると、弦理論にとってはトーラスTと双対トーラス$\check{T}$は見分けがつかない。

超弦理論は10次元のみに存在し、I型超弦理論、IIA型超弦理論、IIB型超弦理論、$SO(32)$混成弦理論、$E_8 \times E_8$混成弦理論の5つに分類される。そのうちの1つである$E_8 \times E_8$混成弦理論を、実4次元の時空$\mathbb{R}^4$と複素3次元のCalabi-Yau多様体Mの直積$\mathbb{R}^4 \times M$の上で考えたものが、素粒子論の標準模型に近い模型を与えることが分かって、3次元Calabi-Yau多様体上の弦理論の研究が盛んになった。ここでCalabi-Yau多様体とは、Ricci曲率が零のKähler多様体を指すものとする。これは正則体積形式ΩとKähler形式ωの間に

$$\frac{1}{n!}\omega^n = (-1)^{n(n-1)/2}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega \wedge \overline{\Omega} \tag{4}$$

という関係があることと同値である。ミラー対称性は、大雑把に言うと、任意のCalabi-Yau多様体Yに対して、そのミラー多様体と呼ばれる別のCalabi-Yau多様体$\check{Y}$が存在して、Y上のIIA型超弦理論と$\check{Y}$上のIIB型超弦理論が適当な意味で同型であることを指す。「Y上のIIA型超弦理論」や「$\check{Y}$上のIIB型超弦理論」という概念は未だ数学的に厳密に定式化できていないので、ミラー対称性を数学的な予想として定式化するには、数学的に厳密に定式化できる対象で、超弦理論の持っている情報の一部を取り出していると期待されるものを用いる必要がある。その典型例が位相的弦理論と呼ばれるもので、その更に一部がGromov-Witten不変量や量子コホモロジーの理論として数学的に厳密に定式化された。この文脈でのミラー対称性に関する予想のうちで最も有名なものが古典的ミラー対称性(classical mirror symmetry)であり、任意のCalabi-Yau多様体Yに対してあるCalabi-Yau多様体$\check{Y}$が存在して、YのGromov-Witten不変量と$\check{Y}$の周期積分(Hodge構造の変形)の間に不思議な関係があることを主張する。この予想はGiventalやLian-Liu-Yauらによって、トーリック多様体の中の完全交差として与えられるCalabi-Yau多様体に対しては証明されたが、その証明はトーラス作用に関する同変コホモロジーの局所化に基いており、このような関係が存在する根源的な理由は謎のまま残された。

ミラー対称性に対する概念的な理解を与えることを目指してKontsevich [Kon95]によって提唱されたのがホモロジー的ミラー対称性(homological mirror symmetry)である。これは任意のCalabi-Yau多様体Yに対して、あるCalabi-Yau多様体$\check{Y}$が存在して、Yの深谷圏の導来圏と$\check{Y}$の連接層の導来圏が三角圏として同値であることを主張する;

$$D^b \mathfrak{Fuk}\, Y \cong D^b \operatorname{coh} \check{Y}. \tag{5}$$

ホモロジー的ミラー対称性から古典的ミラー対称性が従う事も現時点では予想である。

ホモロジー的ミラー対称性は、三角圏を空間と見てその幾何学を研究するという斬新な視点を提供する。一方、ミラー対称性に対するより幾何学的なアプローチとして、任意のCalabi-Yau多様体は特殊Lagrangeトーラスファイブレーションを持ち、このファイブレーションにおいてファイバーであるトーラスを双対トーラスに置き換えることでミラー多様体が得られるという描像がStrominger-Yau-Zaslow [SYZ96]によって提唱された。これはしばしばSYZ予想と呼ばれ、その正確な定式化と証明はCalabi-Yau多様体の幾何における中心的な問題の1つである。ここで、Calabi-Yau多様体の部分多様体Lが特殊Lagrange部分多様体(special Lagrangian submanifold)であるとは、LがLagrange部分多様体であって、正則体積形式の虚部のLへの制限が恒等的に消えることを指す; $\mathfrak{Im}\,\Omega|_L = 0$. 正則体積形式の実部は校正形式(calibration)であり、特殊Lagrange部分多様体はこの校正形式に関する校正部分多様体(calibrated submanifold)になっている。特に、特殊Lagrange部分多様体は極小部分多様体である。K3曲面に対しては、Lが特殊Lagrange部分多様体であることと、超Kähler回転によって複素部分多様体になることは同値である。この意味で、特殊Lagrangeトーラスファイブレーションは楕円曲面の概念の実および高次元への一般化であり、SYZ予想はCalabi-Yau多様体に対するある種の構造定理を与える予想であると考えることができる。また、後述するように、SYZ予想から、ファイバーに沿ったある種のFourier変換(SYZ変換と呼ばれ、族のFloerコホモロジーと密接な関係がある)によってホモロジー的ミラー予想(5)が従うということも期待されている。

3. トーリックCalabi-Yau多様体とそのミラー

ミラー対称性はもともとはコンパクトなCalabi-Yau多様体に対して考えられたが、コンパクトとは限らないCalabi-Yau多様体やFano多様体、一般型の多様体、そして特異点などの様々な対象に対しても拡張された。コンパクトでないCalabi-Yau多様体として最も重要な例は、いわゆるトーリックCalabi-Yau多様体であろう。ここで「いわゆる」と言ったのは、通常はRicci平坦Kähler計量ではなく単にKähler計量を考えることと、しばしばトーリック多様体そのものではなくその中の反正準因子の補集合を考えるからである。Kähler多様体とその上の正則体積形式の組を概Calabi-Yau多様体(almost Calabi-Yau manifold)と呼ぶ。概Calabi-Yau多様体上では、どこでも零にならない関数fが存在して、(4)の代わりに

$$f^n \frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{n(n-1)/2} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^n \Omega \wedge \overline{\Omega} \tag{6}$$

が成り立つ。概Calabi-Yau多様体上の特殊Lagrange部分多様体は、Calabi-Yau多様体の時と同様にして定義される。概Calabi-Yau多様体上の特殊Lagrange部分多様体は、もともとのRiemann計量gに関して極小とは限らないが、$\mathfrak{Re}\,\Omega$はgと共形同値なRiemann計量fgに関して校正形式になっており、特殊Lagrange部分多様体はこの校正形式に対応する校正部分多様体になっている。

n次元のトーリックCalabi-Yau多様体Xに対して、直和分解$M \cong \overline{M} \oplus \mathbb{Z}$と格子多面体$\Delta \subset \overline{M}_{\mathbb{R}}$を上手く取ることによって、$X$の扇多面体(fan polytope、すなわち扇$\Sigma$の一次元錐の原始的な生成元の凸包)を$\Delta \times \{1\}$と書くことが出来る。この座標に関して$(\mathbf{0}, 1) \in N \cong \overline{N} \oplus \mathbb{Z}$に対応するトーラスの指標$\chi_{(\mathbf{0},1)} \colon T \to \mathbb{C}^\times$は、$X$上の正則関数$w_n$に一意的に拡張される。この指標の核を$T_0 := \operatorname{Ker} \chi_{(\mathbf{0},1)}$とおき、Lie環の埋め込み$\iota_* \colon \overline{M}_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$に双対な全射を$\iota^* \colon N_{\mathbb{R}} \to \overline{N}_{\mathbb{R}}$で表すと、$X$への$T_0$作用の運動量写像は、$T$作用の運動量写像$\mu \colon X \to N_{\mathbb{R}}$を用いて$\mu_0 := \iota^* \circ \mu \colon X \to \overline{N}_{\mathbb{R}}$で与えられる。$\mu_0$の臨界点は$X$のトーラス不変な余次元2の部分多様体の合併集合$X^{(n-2)}$であり、臨界値はその$\mu_0$による像$\Pi_0 := \mu_0 \left(X^{(n-2)} \right)$である。さらに、$p := \chi_{\mathbf{e}_n} - 1 = 0$で定義される$X$の因子を$\check{D}$とおき、$\check{Y} := X \setminus \check{D}$と定義する。$p$は$X$上の関数であるが、$X$の正準束が自明なので、反正準束の切断と見なすことができ、$\check{Y}$はXの反正準因子の補集合となる。Xはトーラス不変なアファイン開集合$X \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$を貼り合わせて得られ、各開集合上で$dz_n \wedge \cdots \wedge dz_n$と書かれるような自然な正則体積形式$\Omega_X$を持つ。これを用いて、$\check{Y}$の正則体積形式を$\Omega_{\check{Y}} := p^{-1} \Omega_X$で定義する。これと$X$の適当なKähler形式$\omega_X$の$\check{Y}$への制限$\omega_{\check{Y}} := \omega_X|_{\check{Y}}$によって、$\check{Y}$は概Calabi-Yau多様体になる。写像$\pi_{\check{Y}} := (\mu_0, |w|) \colon \check{Y} \to B := \overline{N}_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{>0}$は概Calabi-Yau多様体$\check{Y}$上の特殊Lagrangeトーラスファイブレーションになり、その判別式集合は$\Pi_0 \times \{1\}$で与えられる。

この$\check{Y}$のミラーは2次曲線をファイバーとする$\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} := \overline{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$上のファイブレーションの構造を持つアファイン多様体

$$Y := \left\{ (\boldsymbol{x}, u, v) \in \overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}^2 \;\middle|\; h(\boldsymbol{x}) = uv \right\} \tag{7}$$

で与えられる。ここで、$h(\boldsymbol{x})$は$\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$上のLaurent多項式で、そのNewton多面体が$\Delta \subset \overline{M}_{\mathbb{R}}$に一致するようなものである。Laurent多項式$h(\boldsymbol{x})$の係数は$Y$の複素構造のパラメーターであり、$\check{Y}$のシンプレクティック構造と対応している。以下では$Y$上でシ

ンプレクティック幾何学を、$\check{Y}$ 上では複素幾何学を考えるので、Y が滑らかになる限りにおいて、$h(\boldsymbol{x})$ の係数は任意にとって良い。$\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}^2$ の自然な Kähler 形式

$$\omega_{\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}^2} := \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\left((\log|x_1|)^2 + \cdots + (\log|x_{n-1}|)^2 + |u|^2 + |v|^2\right) \tag{8}$$

を制限することによって Y はシンプレクティック多様体となるが、[AAK] で指摘されたように、Y 上に Lagrange トーラスファイブレーションを作るには、Y を $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}$ の $Z \times 0$ に沿ったシンプレクティック爆発

$$\begin{aligned}\overline{Y} &:= \mathrm{Bl}_{Z\times 0}(\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}) \\ &:= \left\{(\boldsymbol{x}, u, [v_0 : v_1]) \in \overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \;\middle|\; h(\boldsymbol{x})v_0 = uv_1\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

の $v_0 \neq 0$ で定義されるアファイン部分集合と見なすのが都合が良い。ここで、$Z := \left\{\boldsymbol{x} \in \overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \;\middle|\; h(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ である。$Z \times 0$ の $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}$ における管状近傍を U とおき、U に台を持つ $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}$ 上の滑らかな関数で、U に含まれる $Z \times 0$ の管状近傍上で恒等的に 1 になるようなものを χ とおくと、十分小さな ϵ に対して

$$\omega_\epsilon := p^*\omega_{\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}} + \frac{\sqrt{-1}\epsilon}{2\pi}\partial\overline{\partial}\left(\chi(\boldsymbol{x}, u)\log\left(|u|^2 + |h(\boldsymbol{x})|^2\right)\right) \tag{10}$$

は $\overline{Y}$ 上のシンプレクティック形式を定める。ここで、$p \colon \overline{Y} \to \overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}$ はシンプレクティック爆発の構造射である。Y は S^1 作用 $(\boldsymbol{x}, u, v) \mapsto (\boldsymbol{x}, e^{\sqrt{-1}\theta}u, e^{-\sqrt{-1}\theta}v)$ を持ち、その運動量写像は

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{\epsilon}{2\pi}|u|\frac{\partial}{\partial|u|}\left(\chi(\boldsymbol{x}, u)\log\left(|h(\boldsymbol{x})|^2 + |u|^2\right)\right) &(11)\\ &= \begin{cases}\pi\dfrac{1}{2}|u|^2 + \dfrac{\epsilon}{2\pi}\dfrac{|u|^2}{|h_{t,1}(\boldsymbol{x})|^2 + |u|^2} & \chi \equiv 1 \text{ の時}, \\ \pi\dfrac{1}{2}|u|^2 & \chi \equiv 0 \text{ の時}\end{cases} &(12)\end{aligned}$$

で与えられる。μ_Y の臨界点は S^1 作用の固定点 $\{(\boldsymbol{x}, u, v) \in Y \mid h(\boldsymbol{x}) = u = v = 0\}$ で与えられ、臨界値 ϵ を持つ。自然な射影 $Y \to \overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$ によって、$\lambda \neq \epsilon$ におけるシンプレクティック商 $Y_{\mathrm{red},\lambda} := \mu_Y^{-1}(\lambda)/S^1$ は $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$ と自然に同一視される。この同一視はシンプレクティック形式を保たないが、$\lambda \in (0, \epsilon) \cup (\epsilon, \infty)$ に滑らかに依存する $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$ の微分自己同相の族 ϕ_λ で、簡約シンプレクティック形式 $\omega_{\mathrm{red},\lambda}$ と $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$ 上のトーラス不変なシンプレクティック形式 $\omega_{\overline{N}_{\mathbb{C}^\times},\lambda}$ を結び付けるものが存在する。この時、$(\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}, \omega_{\overline{N}_{\mathbb{C}^\times},\lambda})$ のトーラス作用に関する運動量写像を ϕ_λ で引き戻したものは、$Y_{\mathrm{red},\lambda}$ の Lagrange トーラスファイブレーション $\pi_\lambda \colon Y_{\mathrm{red},\lambda} \to \overline{M}_{\mathbb{R}}$ を与える。この写像は $\lambda = \epsilon$ に連続に拡張するが、S^1 作用の固定点で滑らかにならない。写像 $\pi_Y \colon Y \to \overline{M}_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{>0}$ を、$y \in \mu_Y^{-1}(\lambda)$ を $\pi(y) = (\pi_\lambda([y]), \lambda)$ に送る写像として定義すると、これは Y 上の Lagrange トーラスファイブレーションを与え、その臨界値は $\Pi_\epsilon \times \{\epsilon\}$ で与えられる。ここで、$\Pi_\epsilon := \pi_\epsilon(Z)$ は ϕ_ϵ によって補正された Z のアメーバである。

(8) を制限して得られるシンプレクティック形式と比較した時の、(10) で定義されるシンプレクティック形式 ω_ϵ の利点の 1 つは、$Z \times 0$ の管状近傍 U の外では $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}$ の標準的なシンプレクティック形式と一致する事である。従って、Z (より正確には、U の $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$ への射影) と交わらない $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$ の Lagrange 部分多様体 $\overline{L}$ に対し、$L := \overline{L} \times \mathbb{R}^{>0} \subset \overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}$ は自然に Y の Lagrange 部分多様体を定める。

4. SYZ変換

Liouville-Arnoldの定理により、Lagrangeトーラスファイブレーション$\pi_Y \colon Y \to B$があると、その正則値の集合B^{sm}には局所的に作用座標(action coordinate)と呼ばれる座標が、トロピカルアファイン変換($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$の作用を実アファイン変換、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$の作用をトロピカルアファイン変換、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$の作用を整アファイン変換と呼ぶのであった) を除いて一意的に定まる。この作用座標とYのシンプレクティック構造に関して共役な座標がファイバーの角座標(angle coordinate)である。これらの局所座標はトロピカルアファイン変換によって貼り合わされ、B^{sm}にトロピカルアファイン構造を定める。B^{sm}の接束TB^{sm}と余接束T^*B^{sm}には自然にn階の整局所系$T_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$と$T^*_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$が定まり、ファイバー毎に商を取ることによって、互いに双対なトーラスファイバー束$X(B^{\mathrm{sm}}) := T^*B^{\mathrm{sm}}/T^*_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$と$\check{X}(B^{\mathrm{sm}}) := TB^{\mathrm{sm}}/T_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$を得る。$X(B^{\mathrm{sm}})$は自然なシンプレクティック構造を持ち、$\pi_Y$がLagrange切断を持てば$\pi_Y^{-1}(B^{\mathrm{sm}})$とシンプレクティック同相になる。一方、$\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$は自然な複素構造を持つが、これを$B$上のトーラスファイブレーションを持つ複素多様体に(部分)コンパクト化するには、この自然な複素構造に量子補正を加えなければならない。この量子補正はπ_YのLagrangeファイバーに境界を持つ正則円盤を数え上げることによって得られ、Bのトロピカル幾何の言葉で記述されると期待されているが、その詳細は未だ発展途上である。

$\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$の複素構造の量子補正を考える代わりに、[AAK]は次のようにしてYのミラー多様体$\check{Y}$を構成した: まず、$\pi_Y(p^{-1}(U_Z \times \mathbb{C}))$を$B$から取り除いて得られる部分集合$B^{\mathrm{reg}}$を考える。ここで、$U_Z$は$U_Z \times \mathbb{C}$が$\chi$の台$U$を含むような$Z$の管状近傍である。$Z$の定義方程式を上手く取った上で、$U_Z$を十分小さく取ることにより、$B^{\mathrm{reg}}$の連結成分が$\Delta \cap \overline{M}$の元と1対1に対応するようにできる。各$\alpha \in \Delta \cap \overline{M}$に対応する$B^{\mathrm{reg}}$の連結成分$U_\alpha$に対してトーラス$\widetilde{U}_\alpha := \operatorname{Spec} \mathbb{C}\left[z_{\alpha,1}^{\pm 1}, \dots, z_{\alpha,n-1}^{\pm 1}, z_{\alpha,n}^{\pm 1}\right]$を用意し、$\alpha, \beta \in \Delta \cap \mathbb{Z}^{n-1}$に対する$\widetilde{U}_\alpha$と$\widetilde{U}_\beta$を

$$\begin{aligned} z_{\alpha,1} &= (1 + z_{\beta,n})^{\beta_1 - \alpha_1} z_{\beta,1}, \\ &\vdots \\ z_{\alpha,n-1} &= (1 + z_{\beta,n})^{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}} z_{\beta,n-1}, \\ z_{\alpha,n} &= z_{\beta,n}. \end{aligned} \tag{13}$$

で貼り合わせた上で適当に部分コンパクト化することにより、$\check{Y}$を得ることができる。(13)は正則円盤の数え上げによって得られ、深谷圏における壁越え公式になっている。

ホモロジー的ミラー対称性によって、$X(B^{\mathrm{sm}}) \to B^{\mathrm{sm}}$のLagrange切断と$\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$上の直線束は次の様に関係していると期待されている: B^{sm}のトロピカルアファイン座標を$(x_i)_{i=1}^n$とおくと、局所系$T_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$と$T^*_{\mathbb{Z}}B^{\mathrm{sm}}$は$\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^n$および$\{dx_i\}_{i=1}^n$で生成されている。$(x_i)_{i=1}^n$に対応する$TB^{\mathrm{sm}}$のファイバーの座標を$(y_i)_{i=1}^n$とおくと、$\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$の自然な複素構造に関して

$$z_i = \exp 2\pi \left(x_i + \sqrt{-1} y_i\right), \qquad i = 1, \dots, n \tag{14}$$

が複素座標になる。$X(B^{\mathrm{sm}}) \to B^{\mathrm{sm}}$の切断$s$を$T^*B^{\mathrm{sm}} \to B^{\mathrm{sm}}$に持ち上げたものは、$B^{\mathrm{sm}}$上の1次微分形式$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i(\boldsymbol{x}) dx_i$を定める。この時、$\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$上の自明な直線

束に

$$\nabla := d + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{x}) dy_i \tag{15}$$

で接続を入れたものを s の SYZ 変換 (SYZ transform) と呼ぶ。∇ の曲率は

$$F_\nabla = 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i,j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dy_j \tag{16}$$

で与えられ、その $(2,0)$ 成分は

$$F_\nabla^{(2,0)} = \pi \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) dz_i \wedge dz_j \tag{17}$$

となるので、s が Lagrange 切断である事と、∇ が正則構造を定める事は同値である。

接続 ∇ を $\check{X}(B^{\mathrm{sm}}) \to B^{\mathrm{sm}}$ の $\boldsymbol{x} \in B^{\mathrm{sm}}$ 上のファイバー $\check{L}_{\boldsymbol{x}}$ に制限したものは平坦接続になり、この平坦接続が自明になるための必要十分条件は、$X(B^{\mathrm{sm}}) \to B^{\mathrm{sm}}$ の零切断 s_0 が s と $\boldsymbol{x} \in B^{\mathrm{sm}}$ において交わることである。特に、∇ が定める $\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$ 上の直線束 $\mathcal{L}_\nabla$ が豊富であって、その第1Chern 形式が $\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$ のシンプレクティック形式を与えているなら、∇ の $\check{L}_{\boldsymbol{x}}$ への制限が自明であることは、$\check{L}_{\boldsymbol{x}}$ が Bohr-Sommerfeld ファイバーであることの定義である。ここで、もし圏の同値 $D^b \mathfrak{Fuk}\, X(B^{\mathrm{sm}}) \cong D^b \operatorname{coh} \check{X}(B^{\mathrm{sm}})$ で、零切断 s_0 を $\mathcal{O}_{\check{X}(B^{\mathrm{sm}})}$ に送り、切断 s を $\mathcal{L}_\nabla$ に送るようなものがあれば、

$$\mathrm{HF}^*(s_0, s) \cong \mathrm{Hom}^*(\mathcal{O}_{\check{X}(B^{\mathrm{sm}})}, \mathcal{L}_\nabla) \cong H^*(\mathcal{L}_\nabla) \tag{18}$$

となる。特に、零切断 s_0 と切断 s が横断的に交わり、その Maslov 指数が全て 0 であるならば、s_0 と s の Floer コホモロジー $\mathrm{HF}^*(s_0, s)$ は次数 0 の部分のみを持ち、s_0 と s の交点を基底に持つベクトル空間になるが、これらの交点は上の対応で $\check{X}(B^{\mathrm{sm}}) \to B^{\mathrm{sm}}$ の Bohr-Sommerfeld ファイバーに移る。すなわち、$\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$ 上の正則直線束 $\mathcal{L}_\nabla$ の正則切断の空間は、$\check{X}(B^{\mathrm{sm}}) \to B^{\mathrm{sm}}$ の Bohr-Sommerfeld ファイバーに対応する基底を持つ。この主張にはミラー $X(B^{\mathrm{sm}})$ が現れないことに注意せよ。B がコンパクトで特異ファイファイバーを持たず、$\check{X}(B)$ が Abel 多様体になる時、この基底はテータ関数で与えられる。

$\check{X}(B^{\mathrm{sm}})$ ではなく $\check{Y}$ 上の直線束を得るためには、SYZ 変換の定義 (15) を壁越え公式 (13) と整合的になるように変更しなければならない。適切な変更を加えた上で、次を示すことができる:

定理 4.1 ([CPUa, Theorem 1.1])**.** $\check{Y}$ 上の任意の直線束 $\mathcal{F}$ に対し、π_Y の Lagrange 切断 $L_\mathcal{F}$ で、その SYZ 変換が $\mathcal{F}$ になるものが、Hamilton アイソトピーを除いて唯一つ存在する。

証明の本質的な部分は、[Abo09] のテクニックを用いることによって、$\check{Y}$ の直線束から、$\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$ の Lagrange 部分多様体 $\overline{L}$ で Z に交わらないものを構成する事である。Y が $\overline{N}_{\mathbb{C}^\times} \times \mathbb{C}$ の Z に沿ったシンプレクティック爆発の開部分集合なので、前述のように $\overline{L}$ に $\mathbb{R}^{>0}$ を直積することによって Y の Lagrange 部分多様体を作ることができる。また、少し違う設定における類似の結果が、[GM] の主定理である。

5. 巻かれたFloerコホモロジー

Yがコンパクトでないので、Yに対するホモロジー的ミラー対称性を議論するには、通常の深谷圏でなく巻かれた深谷圏(wrapped Fukaya category)を用いる必要がある。これはシンプレクティックコホモロジーのLagrange部分多様体に対する類似物であり、次のように定義される[AS10]: X^{in}がコンパクトな境界付き多様体であり、$\omega := d\theta$がX^{in}のシンプレクティック形式で、$\iota_{\mathfrak{Z}}\omega = \theta$で定義されるLiouvilleベクトル場$\mathfrak{Z}$が境界$\partial X^{\mathrm{in}}$の至る所で外向きである時、$(X^{\mathrm{in}}, \theta)$をLiouville領域と呼ぶ。この時、$(\partial X^{\mathrm{in}}, \theta|_{\partial X^{\mathrm{in}}})$は接触多様体になり、$-\mathfrak{Z}$を積分することによって、この接触多様体のシンプレクティック化の小さい方の半分$((0,1] \times \partial X^{\mathrm{in}}, d(r\theta))$が$X^{\mathrm{in}}$の襟(collar)になる。シンプレクティック化$((0,\infty) \times \partial X^{\mathrm{in}}, d(r\theta))$ のLiouvilleベクトル場は$\mathfrak{Z} = r\partial_r$で与えられることに注意せよ。この襟に$(\partial X^{\mathrm{in}}, \theta|_{\partial X^{\mathrm{in}}})$のシンプレクティック化の大きい方の半分$([1,\infty) \times \partial X^{\mathrm{in}}, d(r\theta))$を貼り合わせて得られる完全シンプレクティック多様体$(X, d\theta)$を$(X^{\mathrm{in}}, \theta)$の完備化と言い、Liouville領域の完備化として得られる完全シンプレクティック多様体をLiouville多様体と呼ぶ。Liouville多様体のLagrange部分多様体Lは、$\theta|_L$がコンパクト集合の外で消える時に無限遠でLegendreであると言う。Xの上の関数$H\colon X \to \mathbb{R}$で、コンパクト集合の外側で$H(r,y) = r^2$を満たすものを1つ選んで固定する。このHが生成する単位時間のHamilton流を$\varphi_1\colon M \to M$とおいた時、$L \cap \varphi_1(L)$の元をLのHamilton弦(Hamiltonian chord) と呼ぶ。これはHの生成するHamiltonベクトル場の積分曲線$\gamma\colon [0,1] \to M$で、$\gamma(0) \in L$かつ$\gamma(1) \in L$を満たすものと言っても同じことである。Hamilton弦γ_+とγ_-が与えられた時、帯状領域$S := \left\{ s + t\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \le t \le 1 \right\}$から$X$への写像$u\colon S \to X$で、Floer方程式

$$(du - X_H \otimes dt)^{0,1} = 0 \tag{19}$$

と境界条件$u(\partial S) \subset L$, $\lim_{s\to\pm\infty} u(s,t) = \gamma_\pm(t)$ を満たすものの数をn_{γ_-,γ_+}と書く。Hamilton弦で生成される自由加群$\mathrm{CW}^*(L)$に

$$\mathfrak{m}_1([\gamma]) = \sum_{\gamma'} n_{\gamma,\gamma'}[\gamma'] \tag{20}$$

で微分を入れたものを巻かれたFloer複体と呼び、そのコホモロジーを巻かれたFloerコホモロジーと呼ぶ。$\mathrm{CW}^*(L)$の次数付けはMaslov指数で定義される。3点付き円盤からMへの写像で、Floer方程式と適当な境界条件を満たすものを数え上げることによって、巻かれたFloerコホモロジーには次数付き環の構造が入る。

$\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$に対数的な極座標$(r_i, \theta_i)_{i=1}^{n-1}$を入れて、自然なシンプレクティック構造を$\omega = \sum_{i=1}^{n-1} dr_i \wedge d\theta_i$ とおこう。これは$\theta = \sum_{i=1}^{n} r_i d\theta_i$ をLiouville形式とするLiouville多様体になる。$\overline{L}_0 := \overline{N}_{\mathbb{R}^{>0}}$はLegendre条件$\theta|_{\overline{L}_0} = 0$を満たす$\overline{N}_{\mathbb{C}^\times}$のLagrange部分多様体になる。2次のHamilton関数を$H := \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}|^2 = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2)$ とおくと、単位時間のHamilton流は$\varphi_1\colon (r_i, \theta_i)_{i=1}^{n-1} \mapsto (r_i, \theta_i + r_i)_{i=1}^{n-1}$ となるので、$\overline{L}_0$のHamilton弦は格子点$\boldsymbol{n} \in \overline{N}$と一対一に対応する。全てのHamilton弦のMaslov指数は0であり、次数の理由からFloer複体の微分は0になる。巻かれたFleorコホモロジーの積構造も容易に計算することができ、$\overline{N}$の群環$\mathbb{C}[\overline{N}]$と環として同型になる。

一方、Yは$\overline{N} \times \mathbb{C}$のシンプレクティック爆発の開集合であり、$\overline{L}_0$が爆発の中心と交わらないので、$L_0 := \overline{L}_0 \times \mathbb{R}^{>0}$は自然に$Y$のLagrange部分多様体を定める。$Y$は$\overline{N} \times \mathbb{C}$

に比べて複雑なので、L_0 の巻かれたFloer コホモロジーを直接計算することは容易ではないが、Y の次元 n が3以下の時には、注意深くHamilton関数を選ぶことによって、巻かれたFloer コホモロジーの変種 $\mathrm{HW}^*_{\mathrm{ad}}(L_0)$ で、次を満たすものを定義することができる:

定理 5.1 ([CPUa, Theorem 1.2])**.** $\mathbb{C}$代数の同型 $\mathrm{HW}^*_{\mathrm{ad}}(L_0) \cong H^0(\mathcal{O}_{\check{Y}})$ が存在する。

定理5.1の証明は、等式の左辺と右辺の両方において、線形空間としての基底 $\{p_{\boldsymbol{n},i}\}_{(\boldsymbol{n},i)\in\overline{N}\times\mathbb{Z}}$ を上手く取ると、積構造が

$$p_{\boldsymbol{n},i}\cdot p_{\boldsymbol{n}',i'} = \sum_{j=0}^{\ell(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')}\binom{\ell(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')}{j}p_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}',i+i'+j} \tag{21}$$

と表されることを示すことによってなされる。ここで $\ell\colon \overline{N}\times\overline{N}\to\mathbb{N}$ は組合せ論的に定義されるある関数であり、Hamilton弦を結ぶFloer方程式の解と Z との交点数を与える。$\mathrm{HW}^*_{\mathrm{ad}}(L_0)$ において (21) が成り立つことは [Pas14, Proposition 4.4] から従う一方、$H^0\left(\mathcal{O}_{\check{Y}}\right)$ において (21) が成り立つことは簡単な組合せ論である。

トーリックCalabi-Yau多様体の例としては2次元の A_n 特異点の最小特異点解消や3次元の通常二重点(いわゆるコニフォールド)のクレパント解消があるが、これらの場合には、定理5.1より進んで、適切に定義された深谷圏がミラーの連接層の導来圏と同値であることを示すことが出来る。A_n 特異点の最小特異点解消 X は、1次元錐の生成元が $v_0=(0,1),\ v_1=(1,1),\ \cdots,\ v_n=(n,1)\in N\cong\mathbb{Z}^2$ で与えられるような扇 Σ に対応しており、この時の扇多面体は $\Delta=[0,n]$ である。Δ をNewton多面体に持つLaurent多項式 $f(z)=(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$ に対して、アファイン超曲面

$$Y=\left\{(z,u,v)\in\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^2 \;\middle|\; uv=f(z)\right\} \tag{22}$$

を考える。この場合はシンプレクティック爆発を考える必要はなく、$\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^2$ の標準的なKähler形式を Y に制限して得られるシンプレクティック形式を用いて議論を進めることができる。Y には正則体積形式

$$\Omega=\mathrm{Res}\left[\frac{dz}{z}\wedge\frac{du\wedge dv}{uv-f(z)}\right]=\frac{dz}{z}\wedge\frac{du}{u} \tag{23}$$

によって概Calabi-Yau構造が入る。写像

$$\pi_Y\colon Y\to B:=\mathbb{R}^2,\quad (z,u,v)\mapsto\left(\log|z|,\frac{1}{2}\left(|u|^2-|v|^2\right)\right) \tag{24}$$

は特殊Lagrangeトーラスファイブレーションであり、その判別式集合は

$$\{(\log|\alpha_0|,0),\dots,(\log|\alpha_n|,0)\}\subset B \tag{25}$$

で与えられる。これらの臨界点は焦点-焦点特異点(focus-focus singularity)と呼ばれており、超Kähler回転によって小平の記号で I_1 型と呼ばれる最も基本的な楕円ファイブレーションの特異点に対応する(トーラスの1つのサイクルが潰れて、通常二重点を持つ有理曲線になる)。

Y のミラー $\check{Y}$ は X から反正準因子 $\check{D}:=\chi_{(0,1)}^{-1}(1)$ を取り除いたものになる。ここで、$\chi_{(0,1)}$ は $(0,1)\in M:=\mathrm{Hom}(N,\mathbb{Z})$ に対応するトーラスの指標に付随する X 上の関数であ

る。正準束が自明なので、関数の零点は反正準因子を与えることに注意せよ。$E_1, \dots, E_n$ を特異点解消の例外因子とすると、アーベル群の同型 $\operatorname{Pic} \check{Y} \to \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{L} \mapsto \left(\deg\left(\mathcal{L}|_{E_i}\right)\right)_{i=1}^n$ が存在する。この同型によって $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}^n$ に対応する直線束を $\mathcal{L}_{\boldsymbol{d}}$ と書く。

さて、簡単のために任意の i に対して α_i が負の実数であると仮定して、$\Gamma = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ とおく。$\mathbb{C}^\times \setminus \Gamma$ の上の道 $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times \setminus \Gamma$ で、$|\gamma| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |\gamma(t)|$ が単調増加な全単射であるようなものに対し、その巻き数を $\boldsymbol{w}(\gamma) = (w_1(\gamma), \dots, w_n(\gamma))$ とおく。但し、$w_i(\gamma)$ は γ と閉区間 $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ の交点数である。この γ に対し、2 次曲線をファイバーとするファイブレーション $Y \to \mathbb{C}^\times$, $(z, u, v) \mapsto z$ のファイバーの適当な Lagrange 部分多様体を Y のシンプレクティック形式を使って平行移動する事により、π_Y の Lagrange 切断を作ることができて、その SYZ 変換は $\mathcal{L}_{-\boldsymbol{w}(\gamma)}$ で与えられる [CU13, Theorem 1.1]。さらに、こうして得られる Lagrange 部分多様体たちのなす巻かれた深谷圏を $\mathcal{W}$ とおくと、圏同値

$$D^b \mathcal{W} \cong D^b \operatorname{coh} \check{Y} \tag{26}$$

がある [CU13, Theorem 1.2]。これらの結果は、

$$Y := \left\{ (z, u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^4 \;\middle|\; u_1 v_1 = z - a,\ u_2 v_2 = z - b \right\} \tag{27}$$

で定義されるアファイン多様体と、3 次元の通常二重点のクレパント解消 X の中の反正準因子 $\check{D}$ の補集合 $\check{Y} = X \setminus \check{D}$ の間のミラー対称性に拡張される [CPUb]。

[AAK] Mohammed Abouzaid, Denis Auroux, and Ludmil Katzarkov, *Lagrangian fibrations on blowups of toric varieties and mirror symmetry for hypersurfaces*, arXiv:1205.0053.

[Abo09] Mohammed Abouzaid, *Morse homology, tropical geometry, and homological mirror symmetry for toric varieties*, Selecta Math. (N.S.) **15** (2009), no. 2, 189–270. MR MR2529936

[AS10] Mohammed Abouzaid and Paul Seidel, *An open string analogue of Viterbo functoriality*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 2, 627–718. MR 2602848 (2011g:53190)

[CPUa] Kwokwai Chan, Daniel Pomerleano, and Kazushi Ueda, *Lagrangian sections on mirrors of toric Calabi-Yau 3-folds*, in preparation.

[CPUb] ———, *Lagrangian torus fibrations and homological mirror symmetry for the conifold*, accepted for publication in *Comm. Math. Phys.*, arXiv:1305.0968.

[CU13] Kwokwai Chan and Kazushi Ueda, *Dual torus fibrations and homological mirror symmetry for A_n-singlarities*, Commun. Number Theory Phys. **7** (2013), no. 2, 361–396. MR 3164868

[GM] Mark Gross and Diego Matessi, *On homological mirror symmetry of toric Calabi-Yau threefolds*, arXiv:1503.03816.

[Kon95] Maxim Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 120–139. MR MR1403918 (97f:32040)

[Pas14] James Pascaleff, *Floer cohomology in the mirror of the projective plane and a binodal cubic curve*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 13, 2427–2516. MR 3265556

[SYZ96] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1-2, 243–259. MR MR1429831 (97j:32022)