

代数ビジョンにおける再構成問題

植田一石

概要

本稿では、名古屋大学多元数理科学研究科の伊藤敦氏及び韓国高等科学院の三浦真人氏との共同研究 [IMU] に基づき、代数ビジョンにおける再構成問題について、非専門家向けの概説を行う。

1 はじめに

デジタル写真や動画から、計算機を用いて情報を取り出すことを研究する学問をコンピュータービジョン (computer vision) と呼ぶ。これは人間が視覚によって行えるタスク (例えば写真や動画から 3 次元の物体の色や形、動きなどを把握したり、建物や人物を認識したりするなど) を計算機で実行することを一つの大きな目標にしているが、それにとどまらず、人間の視覚には不可能なことも含めて、画像 (これには写真のみならず、動画や CT も含まれる) から情報を引き出したり、修正を加えたりすること (例えば照明を変更したり、重要な部分を強調したり、そこに存在しない物体を重ねて表示したりするなど) も含み、工学、情報学、数学、物理学、医学などに跨る学際的な分野を形成している。

代数ビジョン (algebraic vision) は、代数幾何の手法を用いたコンピュータービジョンの研究に対して与えられた新しい名称である。例えば [AST13] は明らかに代数ビジョンに関する論文であるが、この論文の中には代数ビジョンという言葉は登場しない。代数ビジョンという言葉は 2015 年のベルリン工科大学 (Technische Universität Berlin) における研究集会 “Meeting on Algebraic Vision 2015” で導入されたようである。翌 2016 年には San Jose にある American Institute of Mathematics で研究集会 “Algebraic vision” が開かれている。

2 代数ビジョンにおけるカメラ

3 次元シーンを複数のカメラの画像から再構成する問題 (reconstruction problem) は、代数ビジョンにおける典型的な問題の一つである。現実の世界は 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ でよく近似され、カメラはこれを長方形のスクリーンに投影していると考えられるが、代数ビジョンにおいては、世界を 3 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ として考え、カメラはこれを 2 次元射影平面 $\mathbb{R}P^2$ に射影するものとして捉える事が多い。射影空間はアファイン空間^{*1}に無限遠超平面を加えたものであり、アファイン空間と違ってコンパクトであるので、理論的な考察に都合が良い。例えば、アファイン平面上では相異なる 2 直線は平行であるか、もしくは 1 点で交わるが、射影平面上では、相異なる 2 直線は必ず 1 点で交わる^{*2}ので、アファイン平面上で必要な場合分けが射影平面上では不要になる。

$\mathbb{R}P^n$ 上の点は、 $n + 1$ 個の実数の組を用いて $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ と表される。ただし、全ての x_i が 0 であるような実数の組は $\mathbb{R}P^n$ 上の点には対応しない;

$$[0 : 0 : \cdots : 0] \notin \mathbb{R}P^n. \quad (2.1)$$

^{*1} 本稿では Euclid 空間と言う時には Euclid 計量 (内積) を込めて考え、内積を考えない時にはアファイン空間と呼ぶ。アファイン空間はベクトル空間から原点の情報を忘れたものである。

^{*2} アファイン平面上の相異なる平行な 2 直線は、無限遠直線上の 1 点で交わる。

また、全ての x_i を一斉に定数倍して得られる実数の組は $\mathbb{R}P^n$ 上の同じ点を表す;

$$\text{任意の } \lambda \neq 0 \text{ に対して } [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \cdots : \lambda x_n]. \quad (2.2)$$

$\mathbb{R}P^3$ から $\mathbb{R}P^2$ への線形射影 (linear projection) は、 3×4 行列

$$A = [R \mid t], \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

を用いて

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

と表される。ここで、大雑把に言うと

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

はカメラの向き (回転) を表し、

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

はカメラの位置 (平行移動) を表している。^{*3} $[y_0 : y_1 : y_2] = [0 : 0 : 0]$ は $\mathbb{R}P^2$ の点を表さないので、線形射影 (2.4) は

$$A \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

を満たす $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}P^3$ に対しては定義されない。 A の階数 (rank) が 3 であれば、このような $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ は唯一つに決まり、カメラの焦点 (focal point) と呼ばれる。すなわち、代数ビジョンにおけるカメラは、 $\mathbb{R}P^3$ から焦点を除いた空間から $\mathbb{R}P^2$ への写像を与える。^{*4}

3 マルチビュー多様体と再構成問題

一つのシーン (scene) を複数のカメラで撮影したり、あるいは同じカメラで配置を変えて何度も撮影したりして得られた画像の組から、元のシーンを再構成 (reconstruct) するのは興味深い問題である。これは次のようにして数学の問題として定式化される。

まず、体を $\mathbb{R}$ に限定するのをやめて、一般の体 $\mathbf{k}$ 上の射影空間 $\mathbb{P}^n$ を考える。さらに次元も一般化して、階数 $m+1$ の $(m+1) \times (n+1)$ 行列によって定まる線形射影 $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ をカメラと呼ぶことにする。 r 個のカメラ

$$\varphi_i: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.1)$$

^{*3} 「回転」と言っても、一般の設定では R を直交行列に限るわけではない。

^{*4} 代数多様体 X の Zariski 開集合から別の代数多様体 Y への正則写像 (regular map) の、Zariski 開集合への制限が一致することによって定義される同値関係に関する同値類のことを、 X から Y への有理写像 (rational map) と呼び、破線の矢印を用いて $X \dashrightarrow Y$ と表す。代数ビジョンにおけるカメラは、 $\mathbb{R}P^3$ から $\mathbb{R}P^2$ への有理写像 $\mathbb{R}P^3 \dashrightarrow \mathbb{R}P^2$ を与える。

が与えられた時、これらを並べて得られる写像

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r): \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{\mathbf{m}} := \prod_{i=1}^r \mathbb{P}^{m_i} \quad (3.2)$$

を考え、この像^{*5}をマルチビュー多様体 (multiview variety) と呼ぶ。マルチビュー多様体を知ることは、同一のシーンに対する複数の画像がある時に、ある画像のどの点か他の画像でどの点に対応しているかを知ることと同値である。画像の中に特徴的な点があれば、それらを異なる画像の間で同定する事ができる。以下では $|\mathbf{m}| := m_1 + \dots + m_r$ が n より大きく、しかも φ が十分に一般であると仮定する。この時、マルチビュー多様体は $\mathbb{P}^n$ と双有理同値^{*6}な $\mathbb{P}^{\mathbf{m}}$ の部分多様体になり、その上の有限個の一般の位置にある点から一意的に定まる。^{*7}マルチビュー多様体から写像 φ を求める問題を再構成問題 (reconstruction problem) と呼ぶ。

定理 3.1 ([HS09]([IMU, Theorem 1.1] も参照)). 次が成り立つ:

1. $\mathbf{m} \neq (1^{n+1}) := (1, \dots, 1)$ であれば、一意的な再構成が可能である。すなわち、与えられたマルチビュー多様体に対し、対応するカメラ配置はただ一つである。
2. $\mathbf{m} = (1^{n+1})$ であれば、2:1 の再構成が可能である。すなわち、与えられたマルチビュー多様体に対し、対応するカメラ配置はちょうど 2 つ存在する。

この定理はもともと [HS09] で具体的な行列の計算によって示されたが、[IMU] ではこの定理の代数幾何的な定式化と、純粋に代数幾何的な手法を用いた全く新しい証明を与えた。この定理において n が 3 以上の場合を考える我々にとっての動機は、高次元のデータの可視化 (visualization) にある。^{*8}工学や医学における様々な実質的な問題において、取り扱うデータはしばしば非常に高い次元を持つ (例えば、複数のセンサーがある時、それらの出力を並べたものは、センサーの個数分の次元を持つベクトルになる) が、これを視覚的に表すには、1 次元、2 次元あるいは 3 次元に射影したものをたくさん並べるという方法が考えられる。上の定理は、どのような状況でもとの n 次元の空間が射影による像から復元できるかという問いに対する答えを与えている。

例えば、 $n = 3$ かつ $\mathbf{m} = (2, 2)$ の時、マルチビュー多様体 X は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の中の 2 重次数 (bidegree) $(1, 1)$ の超曲面であり、通常 2 重点を一つ持つ。3 次元の通常 2 重点は 2 通りのクレパント解消を持つが、そのうちの片方のみが $\mathbb{P}^3$ への双有理収縮 (birational contraction) を持つ。この双有理収縮は $\mathbb{P}^3$ の 2 点における爆発である。

別の例として、 $n = 2$ かつ $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$ の場合を考えよう。この時のマルチビュー多様体は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の多重次数 (multidegree) $(1, 1, 1)$ の滑らかな超曲面であり、その反正準因子の多重次数は $(1, 1, 1)$ である。この因子の自己交点数は 6 であり、この超曲面は $\mathbb{P}^2$ の 3 点爆発になる。ここから (-1) 曲線を収縮して $\mathbb{P}^2$ を得る方法はちょうど 2 通りあり、それらは Cremona 変換

$$[x : y : z] \mapsto \left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right] = [yz : zx : xy] \quad (3.3)$$

で繋がっている。

^{*5} 有理写像の像は、定義域である Zariski 開集合の像の Zariski 閉包として定義される。

^{*6} 代数多様体 X と Y の間に有理写像 $f: X \dashrightarrow Y$ と $g: Y \dashrightarrow X$ があって、 $f \circ g = \text{id}_Y$ かつ $g \circ f = \text{id}_X$ が成り立つ時、 X と Y は双有理同値であるという。

^{*7} マルチビュー多様体を研究する分野はマルチビュー幾何 (multiview geometry) と呼ばれる。マルチビュー多様体を決定するのに必要な点の個数を求めることは典型的なマルチビュー幾何の問題である。マルチビュー多様体の次元や多重次数、Hilbert 多項式、それに Cohen–Macaulay 性などが [Li] で調べられている。

^{*8} [HS09] では一般の次元における再構成の応用として、動的シーン (dynamic scene) の解析や歪曲収差 (radial distortion) の補正などを挙げている。

さらに別の例として、 $n = 3$ かつ $m = (1, 1, 1, 1)$ の場合を考えよう。この時のマルチビュー多様体は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の多重次数 $(1, 1, 1, 1)$ の超曲面であり、 $\mathbb{P}^3$ を 4 本の直線に沿って爆発したものを、4 本の直線を通る 2 本の直線の厳密変換に沿って収縮したものである。収縮によってできる通常 2 重点はそれぞれ 2 通りのクレパント解消を持つが、そうしてできる 4 つの滑らかな多様体のうち 2 つのみが $\mathbb{P}^3$ への収縮を持ち、残りの 2 つは固有だが射影的でない代数多様体の例を与える。^{*9}

4 モジュライ空間

代数幾何における基本問題は、与えられたクラスの代数多様体を分類する事である。代数幾何における分類問題では、対象をある程度「大らかに」分類して、同値類の集合に代数多様体の構造を得ることがしばしば行われる。ここで「大らかに」という言葉は、全ての対象を分類する事を諦めて「良い (半安定な)」対象だけを分類する事と、同型よりも少し弱い同値関係で分類するという 2 点を指している。こうして得られる「同値類のなす空間」をモジュライ空間 (moduli space) と呼ぶ。マルチビュー幾何においては、カメラ配置のモジュライ空間と、マルチビュー多様体のモジュライ空間が重要な研究対象になる。

$\mathbb{P}^3 \dashrightarrow (\mathbb{P}^2)^r$ の例では、各々のカメラは 3×4 行列で表されるが、各々の行列をスカラー倍しても線形射影は変わらないので、カメラ配置には全体として $11r$ 次元の自由度がある。さらに、 $\mathbb{P}^3$ の射影変換 (これは 4×4 行列 up to スカラー倍で 15 次元の自由度がある) で移り合うカメラ配置は同一視して考えることにすると、カメラ配置のモジュライ空間 (カメラ配置の同値類のなす空間) は $11r - 15$ 次元の代数多様体になることが期待される。カメラ配置のモジュライを Grassmann 多様体 $\text{Gr}(4, 3r)$ の $(\mathbf{k}^\times)^r$ 作用に関する GIT 商として定義すると、それがある多重次数付き Hilbert 概形 (multigraded Hilbert scheme) の既約成分と一致するというのが [AST13] の主結果である。また、関手的 (functorial) な観点からカメラ配置のモジュライを調べた文献として [LVM] がある。

$(\mathbb{P}^1)^{n+1}$ の多重次数 (1^{n+1}) の超曲面は、 V を $\mathbf{k}$ 上の 2 次元のベクトル空間とした時、 $V^{\otimes(n+1)}$ の元を up to scalar 倍で考えたものと 1 対 1 に対応する。そのモジュライ空間は $V^{\otimes(n+1)}/(\text{GL}(V))^{n+1}$ で与えられるが、これは量子情報理論において $(n+1)$ -qubit の SLOCC (stochastic local operation and classical communication) 同値類の空間と呼ばれるものと一致し、盛んに調べられている (例えば [BDD⁺10, BDL12, DVC00, HLT12, Kly, Lév06, LT03, OU, VDDMV02] などを見よ)。 $n+1$ 個の $\text{GL}(V)$ は中心の作用を共有しているので、モジュライ空間の期待される次元は $2^{n+1} - 3(n+1) - 1$ で与えられ、 $n=2$ の時 -2 、 $n=3$ の時 3 となる。

$n=2$ の時 (つまり、 $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合)、 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ への自然な $\text{GL}(V_1) \times \text{GL}(V_2) \times \text{GL}(V_3)$ 作用の軌道は、次の 5 つに分類される:

1. 零ベクトルからなる軌道。
2. 3 つのベクトルテンソル積からなる軌道。
3. ベクトルと既約な (つまり、2 つのベクトルの積に分解できない) 2 階のテンソルの積からなる軌道。 V_1, V_2 および V_3 の置換に対応して、このタイプの軌道は 3 つある。
4. $x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3$ の軌道。これは量子情報理論において W 状態 (W state) と呼ばれている。
5. $x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3$ の軌道。これは量子情報理論において Greenberger–Horne–Zeilinger 状態 (Greenberger–Horne–Zeilinger state) として知られている。

$x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3$ の零点として定義される $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の超曲面は滑らかであり、 $x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3$

^{*9} 4 本の直線を通る 2 本の直線の厳密変換は数値的に同値であるが、このうち一方をフロップするとこれらの数値的同値類は互いに逆符号になる。従って、これらの両方と正に交わる因子は存在しない。

の零点は $([x_1 : y_1], [x_2 : y_2], [x_3 : y_3]) = ([0 : 1], [0 : 1], [0 : 1])$ に通常 2 重点を持つので、W 状態と GHZ 状態は判別式 (discriminant) (今の場合は Cayley の $2 \times 2 \times 2$ 超行列式 (hyperdeterminant) で与えられる) によって区別できる。

$n = 3$ の時 (つまり $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合)、カメラの焦点は点ではなく直線になる。 $\mathbb{P}^3$ の直線を与えることと、線型射影 $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ up to $\mathbb{P}^1$ の射影変換を与えること (すなわち、カメラを up to スクリーンの座標変換で考えること) は同値である。線型射影 $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ は階数 2 の 2×4 行列 up to スカラー倍と 1 対 1 に対応しており、これを $\text{Aut } \mathbb{P}^1 \cong \text{PGL}_2$ で割ったものは $\text{Gr}(2, 4) := \text{Mat}(2, 4) // \text{PGL}_2$ で与えられる。カメラの焦点の配置空間 ($\mathbb{P}^3$ の 4 直線の配置空間) は $\text{Gr}(2, 4)^4$ を $\text{Aut } \mathbb{P}^3 \cong \text{PGL}_4$ で割ったものとして定義される。この空間の期待される次元は

$$4 \dim \text{Gr}(2, 4) - \dim \text{PGL}_4 = 4 \times 4 - 15 = 1 \quad (4.1)$$

であるが、実際には 2 次元であることが次のようにして分かる。

V を 2 次元のベクトル空間、 W を 4 次元のベクトル空間とする。上で述べたように、 $\mathbb{P}(W)$ の上の直線のモジュライ空間は、Grassmann 多様体

$$\text{Gr}_2(W) = \text{Hom}(V, W) // \text{GL}(V) \quad (4.2)$$

で与えられる。 W が 2 次元のベクトル空間 W_1 と W_2 の直和として与えられるとし、 $\mathbb{P}(W)$ 内の 3 本の直線 $\mathbb{P}(W_1)$, $\mathbb{P}(W_2)$ 及び $\mathbb{P}(\Delta)$ を考える。ここで、 Δ は線型同型 $W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$ のグラフである。 $\text{GL}(W)$ は $\text{Gr}_2(W)$ に自然に作用し、2 点 $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \in \text{Gr}_2(W)$ の固定化部分群は $\text{GL}(W_1) \times \text{GL}(W_2) \subset \text{GL}(W)$ で与えられる。この部分群の作用に関する $\mathbb{P}(\Delta)$ の固定化部分群は同型 $W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$ を用いて $\text{GL}(W_1)$ と $\text{GL}(W_2)$ を同一視した時の対角部分群である。これを踏まえて、2 次元ベクトル空間 V と W に対して $\text{Gr}_2(W \oplus W) = \text{Hom}(V, W \oplus W) // \text{GL}(V)$ と置き、ここへの $\text{GL}(W)$ の対角な作用を考える。 $\text{Hom}(V, W \oplus W) \cong \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W)$ の一般の点は $\text{GL}(V) \times \text{GL}(W)$ の作用を用いて (I, φ) と置ける。ここで、 I は同型写像 $V \xrightarrow{\sim} W$ である。 V と W をこの同型写像を用いて同一視すれば、 I は恒等写像になる。 $\text{GL}(V) \times \text{GL}(W)$ における I の固定化部分群は $\text{GL}(V) \times \text{GL}(V)$ の反対角部分群と同一視され、これの $\text{Hom}(V, W)$ への作用は $\text{GL}(V)$ の $\text{Hom}(V, V)$ への共役による作用と同一視される。 $\text{GL}(V)$ の $\text{Hom}(V, V)$ への共役による作用に関する $\text{Hom}(V, V)$ の一般の元の固定化部分群は $\text{GL}(V)$ の極大トーラスであり、軌道は Jordan 標準型で分類される。特に、対角化可能な軌道は $\mathbb{A}^2 / \mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{A}^2$ (固有値 up to 対称群 (Weyl 群) の作用) と 1 対 1 に対応する。 $\text{GL}(V)$ の代わりに $\text{PGL}(V)$ の作用を考えると、一般の元の固定化部分群は 1 次元であり、これがモジュライ空間の実際の次元が期待される次元より 1 だけ大きいことに対応している。

$\mathbb{P}^3$ 上の一般の 4 直線の配置空間が $\mathbb{A}^2 / \mathfrak{S}_2$ で与えられることは、次のように理解することも出来る： $\mathbb{P}^3$ の一般の 3 直線は、 $\mathbb{P}^3$ の斉次座標 $[x : y : z : w]$ を上手く取って

$$l_1 : x = y = 0, \quad (4.3)$$

$$l_2 : z = w = 0, \quad (4.4)$$

$$l_3 : x = z, y = w \quad (4.5)$$

と表すことが出来る。これらの 3 直線を通る 2 次曲面はただ一つ存在し、

$$Q : xw = yz \quad (4.6)$$

と表される。 Q は Segre 埋め込み

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3, \quad ([s : t], [u : v]) \mapsto [su : sv : tu : tv] \quad (4.7)$$

の像であり、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と同型になる。もう一本の直線 $l_4 \subset \mathbb{P}^3$ は Q と 2 点で交わるが、その座標を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の座標を用いて $([s_1 : t_1], [u_1 : v_1]), ([s_2 : t_2], [u_2 : v_2])$ と書くと、一方の $\mathbb{P}^1$ の座標変換によって $[s_1 : t_1] = [0 : 1]$, $[s_2 : t_2] = [1 : 0]$ と置くことが出来る。ここで、こちらの $\mathbb{P}^1$ の座標変換には $\mathbb{G}_m$ 分の任意性が残る。 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の座標変換のうち、 $\mathbb{P}^3$ の座標変換から来るものはこれで尽るので、 $\mathbb{P}^3$ 上の 4 本の直線の配置空間は、 $\mathbb{P}^1$ 上の 2 点 $[u_1 : v_1], [u_2 : v_2]$ の配置空間と同一視され、 $\text{Sym}^2 \mathbb{P}^1 := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) / \mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{P}^2$ を与える。

$\text{Gr}(2, 4)$ の 4 点

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

の行ベクトルが表す点を通る $\mathbb{P}^3$ の 4 直線を焦点に持つ線形射影の像は

$$\begin{aligned} x_1 y_1 z_0 w_0 - v x_1 y_1 z_0 w_0 - x_1 y_0 z_1 w_0 + v x_0 y_1 z_1 w_0 \\ + u x_1 y_0 z_0 w_1 - x_0 y_1 z_0 w_1 + x_0 y_0 z_1 w_1 - u x_0 y_0 z_1 w_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

で定義される $\mathbb{P}_{[x_0:x_1]}^1 \times \mathbb{P}_{[y_0:y_1]}^1 \times \mathbb{P}_{[z_0:z_1]}^1 \times \mathbb{P}_{[w_0:w_1]}^1$ の超曲面である。不変式環

$$\text{Sym}^*(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4)^{\text{SL}(V_1) \times \text{SL}(V_2) \times \text{SL}(V_3) \times \text{SL}(V_4)} \quad (4.10)$$

は次数が 2, 4, 4, 6 の元で自由に生成される多項式環であり、[LT03] で与えられている具体的な生成元に (4.9) を代入すると

$$\begin{aligned} H &= 2 - u - v + 2uv, \\ L &= -(1 - u)(1 - v)(1 - uv), \\ M &= 1 - u - v, \\ D_{xt} &= (1 - u)(1 - v)(2 - u - v) \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。(2,2,2,2) 超行列式は 24 次の既約な不変式であり、ここに (4.11) を代入すると恒等的に零になる。 $(\mathbb{P}^1)^4$ 内の多重次数 (1, 1, 1, 1) の超曲面の幾何学的不変式論的なモジュライ空間は $\mathbb{P}(2, 4, 4, 6)$ であり、(4.11) はマルチビュー多様体のモジュライ空間から $\mathbb{P}(2, 4, 4, 6)$ の既約な 24 次超曲面への支配的 (dominant) な有理写像を与える。

参考文献

- [AST13] Chris Aholt, Bernd Sturmfels, and Rekha Thomas, *A Hilbert scheme in computer vision*, Canad. J. Math. **65** (2013), no. 5, 961–988. MR 3095002 1, 4
- [BDD⁺10] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, A. Marrani, and W. Rubens, *Four-qubit entanglement classification from string theory*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), no. 10, 100507, 4. MR 2720335 (2011g:81190) 4
- [BDL12] L. Borsten, M. J. Duff, and P. Lévy, *The black-hole/qubit correspondence: an up-to-date review*, Classical Quantum Gravity **29** (2012), no. 22, 224008, 80. MR 2994241 4
- [DVC00] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A (3) **62** (2000), no. 6, 062314, 12. MR 1804183 (2001j:81028) 4
- [HLT12] Frédéric Holweck, Jean-Gabriel Luque, and Jean-Yves Thibon, *Geometric descriptions of entangled states by auxiliary varieties*, J. Math. Phys. **53** (2012), no. 10, 102203, 30. MR 3050572 4

- [HS09] Richard I. Hartley and Frederik Schaffalitzky, *Reconstruction from projections using grassmann tensors*, International Journal of Computer Vision **83** (2009), no. 3, 274–293. 3
- [IMU] Atsushi Ito, Makoto Miura, and Kazushi Ueda, *Projective reconstruction in algebraic vision*, arXiv:1710.06205. 1, 3
- [Kly] Alexander Klyachko, *Coherent states, entanglement, and geometric invariant theory*, arXiv:quant-ph/0206012. 4
- [Lév06] Péter Lévay, *On the geometry of four-qubit invariants*, J. Phys. A **39** (2006), no. 30, 9533–9545. MR 2246703 (2007j:81037) 4
- [Li] Binglin Li, *Images of rational maps of projective spaces*, arXiv:1310.8453. 3
- [LT03] Jean-Gabriel Luque and Jean-Yves Thibon, *Polynomial invariants of four qubits*, Phys. Rev. A (3) **67** (2003), no. 4, 042303, 5. MR 2039690 (2004k:81098) 4, 6
- [LVM] Max Lieblich and Lucas Van Meter, *Two Hilbert schemes in computer vision*, arXiv:1707.09332. 4
- [OU] Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda, *Quantum entanglement, Calabi-Yau manifolds, and noncommutative algebraic geometry*, arXiv:1402.3768. 4
- [VDDMV02] F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moor, and H. Verschelde, *Four qubits can be entangled in nine different ways*, Phys. Rev. A (3) **65** (2002), no. 5, part A, 052112, 5. MR 1910235 (2003c:81033) 4