楕円モジュラー関数jとBORCHERDS Φ-関数

吉川　謙一
(京都大学 大学院理学研究科)

この文章で述べる結果は, 川口周氏（大阪大学）と向井茂先生（京都大学）との研究に基づく. 本文中の細かい所で（もしかすると細かく無い所でも）間違いが有るかも知れないが, それは筆者の誤解と浅学の為である. 当然であるが, この文章中の誤りの全ての責任は筆者にある. 細かな間違いは大目に見て頂けると有難い.

Contents

1. 序 …… 楕円モジュラー関数 j の差に対する積公式

$\mathfrak{H} \subset \mathbf{C}$を複素上半平面とする. 楕円モジュラー関数$j$は, 以下の式で定義される$\mathfrak{H}$上の$SL_2(\mathbf{Z})$-不変な正則関数の事である:

$$j(\tau) := \frac{(1 + 240\sum_{n>0}\sigma_3(n)\, q^n)^3}{q\prod_{n>0}(1-q^n)^{24}} = q^{-1} + 744 + 196884q + \cdots$$

ここで, $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$, $q = e^{2\pi i\tau}$ である. 古典的な事実として良く知られているが, 楕円モジュラー関数jは以下の同型を誘導し, 楕円曲線のモジュライ空間を与える.

$$j\colon (SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}) \cup \{\infty\} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{P}^1.$$

楕円モジュラー関数 j に対して, 三種類の積公式がこれまでに知られている [3]. (三番目の等式の発見者の名前のリストは完全で無いかも知れない.)

- (Gross-Zagier [9]) E と E' は CM 楕円曲線(虚数乗法を持つ楕円曲線)で, それぞれ代数体 K, K' 上で定義される時,
$$\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbf{C}),\,\sigma'\in\mathrm{Hom}(K',\mathbf{C})}(j(E_\sigma)-j(E'_{\sigma'}))$$
の明示公式が与えられる. 簡単の為, $d_1, d_2 < -4$ を平方因子を持たない互いに素な奇数とし, $E=\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\tau_1\mathbf{Z}$, $E=\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\tau_2\mathbf{Z}$, τ_1, τ_2 をそれぞれ判別式 d_1, d_2 の虚二次無理数とする時, Gross-Zagier は
$$\prod_{[\tau_1],[\tau_2],\,\mathrm{disc}(\tau_i)=d_i}(j(\tau_1)-j(\tau_2))=\pm\prod_{x^2<d_1d_2,\,x^2\equiv d_1d_2 \mod 4}F\left(\frac{d_1d_2-x^2}{4}\right)$$
を示した. ここで, 左辺の積は判別式が d_i に等しい虚二次無理数の同値類 $[\tau_i]\in PSL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}$, 即ち
$$a\tau_i^2+b\tau_i+c=0, \qquad a,b,c\in\mathbf{Z}, \qquad (a,b,c)=1, \qquad d_i=b^2-4ac$$
を充たす虚二次無理数のモジュラー群 $SL(2,\mathbf{Z})$ に関する同値類を渡る. 又,
$$F(m):=\prod_{nn'=m,\,n,n'>0}n^{\epsilon(n')}\in\mathbf{Z}_{>0}, \qquad \epsilon(n)=\pm1$$
である. ($\epsilon(n)$ の定義は省略する.)
- (Borcherds [3]) E を代数体 K 上定義された CM 楕円曲線, $\tau\in\mathfrak{H}$ は $\Im\tau\gg0$ を充たす尖点の近傍の点とする時,
$$\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})}(j(\tau)-j(E_\sigma))=q^{-H(-D)}\prod_{n>0}(1-q^n)^{c_0(n^2)}.$$
ここで, $c_0(n)$ の定める母関数 $\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_0(n)q^n$ は $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $1/2$ のモジュラー形式で, $q^D+O(q)$ の形をしており, さらに $c_0(n)$ は $n\equiv 0,1 \mod 4$ 以外では零である. ただし, CM 楕円曲線 E が虚二次無理数 τ_0 を用いて $E=\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\tau_0\mathbf{Z}$ と表される時, $D<0$ は τ_0 の判別式であり, $H(-D)$ は Huruwitz 類数である.
- (Borcherds [2]) $\tau,\tau'\in\mathfrak{H}$ が $\Im\tau\gg0$, $\Im\tau'\gg0$ を充たす尖点の近傍の点の時,
$$j(\tau)-j(\tau')=\frac{1}{q}\prod_{m>0,\,n\in\mathbf{Z}}(1-q^m q'^n)^{c(mn)}.$$
ここで, $c(n)$ の母関数は $\sum_n c(n)q^n=j(\tau)-744=q^{-1}+196884q+\cdots$ である.

問題 1 (Borcherds [3], p211 問題 9)**.** 楕円モジュラー関数 j に対する上の三つの積公式は相互に関係しているのか？

この問を動機として, この文章では以下の項目を解説する. 証明には一切立ち入らない. 詳細は現在準備中の論文 [11] で与える予定である.

(I) Borcherds Φ-関数を用いた新しい $j(\sigma)-j(\tau)$ の積公式. この積公式は, 一般の直積型 Kummer 曲面上に 15 個の異なる Enriques 構造が入る事から導かれる.

(II) $j(\sigma)-j(\tau)$ の新しい積公式を通して Gross-Zagier の公式を理解するために, Borcherds Φ-関数のノルムの値の算術的性質と「代数的」表示を与える.

これらの研究は（少なくとも筆者にとっては）Gross-Zagier の公式を算術的 Riemann-Roch 定理と $K3$ 曲面を通して理解できるかも知れないという期待と, あわよくば上記 Borcherds の問題に対して何等かの寄与をする事ができるかも知れないという期待から出発したのであるが, 結局これらの当初の目論見に対してはあまり見るべき成果を得るに至っていない. やはり, これらの公式は $K3$ 曲面の公式と見ずに楕円曲線の公式と見るのが正しいのであろうか...

2. 直積型 Kummer 曲面上の Enriques 構造

$K3$ 曲面 X に対して, その Picard（又は Néron-Severi）格子と超越格子は以下の様に定義されていた.

$$N_X := H^2(X,\mathbf{Z})\cap H^{1,1}(X,\mathbf{R}), \qquad\qquad T_X := N_X^{\perp_{H^2(X,\mathbf{Z})}}.$$

Abel 曲面 A に対して, $\mathrm{Km}(A)$ により A に付随する Kummer 曲面を表す. A が二つの楕円曲線の直積の時, $\mathrm{Km}(A)$ を直積型 Kummer 曲面と言う.

事実 2. 一般の直積型 *Kummer* 曲面について, 以下の特徴付けが知られている.

(1) 点 $(\sigma,\tau)\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ が一般の点ならば,

$$T_{\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)}\cong\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2).\quad ただし,\quad \mathbb{U}(N):=(\mathbf{Z}^2,\begin{pmatrix}0 & N\\ N & 0\end{pmatrix}).$$

(2) 逆に, $K3$ 曲面 X が条件 $T_X\cong\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)$ を充たすならば, 点 $(\sigma,\tau)\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ が存在して,

$$X\cong\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau).$$

以下, 固定点の無い対合を自由対合と呼び, $K3$ 曲面とその上の自由対合の組の同型類を $K3$ 曲面の Enriques 構造と呼ぶ.

定理 3 (向井 [16], 大橋 [18])**.** 点 $(\sigma,\tau)\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ が

$$T_{\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)}\cong\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)$$

という意味で $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ の一般の点ならば, 次の三つの集合の間に一対一対応が存在する.

(i) $\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)$ 上の *Enriques*構造. 即ち, $\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)$ 上の自由対合の $\mathrm{Aut}(\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau))$ における共役類.

(ii) 格子の埋め込みの同型類 $\mathrm{emb}\{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)\hookrightarrow H^2_-(K3,\mathbf{Z})\}/O(H^2_-(K3,\mathbf{Z}))$. ここで,

$$H^2_-(K3,\mathbf{Z})\cong\Lambda:=\mathbb{U}\oplus\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(-2)$$

は $K3$ 格子 $H^2(K3,\mathbf{Z})$ の自由対合 ι に関する反不変部分

$$H^2_-(K3,\mathbf{Z}):=\{\ell\in H^2_-(K3,\mathbf{Z});\ \iota^*\ell=-\ell\}.$$

(堀川により, 格子 $H^2_-(K3,\mathbf{Z})$ の同型類は自由対合 ι の選び方に依らず Λ に等長である事が知られている. $\mathbb{E}_8$ は階数 8 の正定値偶ユニモジュラー格子.)

(iii) 集合 $A_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)}\setminus\{0\}$. ここで, $A_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)}$ は格子 $\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)$ の判別式群

$$A_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)}=(\mathbb{U}(2)^\vee\oplus\mathbb{U}(2)^\vee)/(\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2))\cong(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\oplus 4}.$$

この向井-大橋対応により, $\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)$ 上の Enriques 構造の奇偶を以下の様に定める. 判別式群 $A_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)}$ は $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-値二次形式を持っている:

$$q(\overline{x}):=\langle x,x\rangle_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)}\mod 2\mathbf{Z},\qquad \overline{x}:=x\mod\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2).$$

定義 1. 判別式群の元 $\gamma\in A_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)}\setminus\{0\}$ に対応する $\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)$ の自由対合を ι_γ で表す. 元 $\gamma\in A_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)}\setminus\{0\}$ に対応する自由対合 $\iota_\gamma\colon\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)\to\mathrm{Km}(E_\sigma\times E_\tau)$ に対して,

$$\iota_\gamma\ \text{は}\ \begin{cases}\text{even (又は Liberman)}\\ \text{odd (又は金銅-向井)}\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad q(\gamma)=\begin{cases}0\\ 1\end{cases}$$

Liberman 対合は 9 個存在し, 金銅-向井対合は 6 個存在する. 9 個の Liberman 対合には共通の構成方法が知られており, 同様に 6 個の金銅-向井対合にも共通の構成方法が知られている. Liberman 対合の構成法は容易であるが, 金銅-向井対合の構成は（少なくとも筆者には）あまり容易ではない. 詳しくは [17], [13], [16] を参照.

今まで述べなかったが, 以下の疑問は当然であろう.

問題 4. 直積型 Kummer 曲面族上の Enriques 構造から, 何故保型形式が生ずるのか？

この問題に答える為に, 以下の定理を思い出す.

定理 5 (Borcherds [4]). *Enriques* 曲面の周期領域 Ω_Λ 上には *Borcherds* Φ-関数と呼ばれる重さ 4 の保型形式 Φ が存在し, *Enriques* 曲面のモジュライ空間上で零点を持たない. 即ち, $\mathcal{D} \subset \Omega_\Lambda$ を *Enriques* 曲面の判別式軌跡とすれば,

$$\mathrm{div}(\Phi) = \mathcal{D}.$$

従って, Enriques 曲面の族が与えられた時, Borcherds Φ-関数の周期写像による引き戻しとしてパラメーター空間上に保型形式が定まる. 次の節で Borcherds Φ-関数を思い出す.

3. Borcherds Φ-関数

Borcherds Φ-関数を説明する為に, まず Enriques 曲面のモジュライ空間の構造を思い出す.

定理 6 (堀川 [10]). （普遍被覆 $K3$ 曲面の）周期写像により, *Enriques* 曲面のモジュライ空間は以下の直交型モジュラー多様体の *Zariski* 開集合に同型である

$$\Gamma \backslash (\Omega_\Lambda^+ - \mathcal{D}).$$

ここで, Ω_Λ は格子

$$\Lambda = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2), \qquad \mathrm{sign}(\Lambda) = (2, 10)$$

に付随する 10 次元 IV 型有界対称領域の非交和

$$\Omega_\Lambda = \Omega_\Lambda^+ \amalg \Omega_\Lambda^- = \{[\eta] \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C});\ \langle \eta, \eta \rangle = 0,\ \langle \eta, \bar{\eta} \rangle > 0\}$$

であり,

$$\Gamma = O^+(\Lambda) = \{g \in O(\Lambda);\ g(\Omega_\Lambda^\pm) = \Omega_\Lambda^\pm\} \subset \mathrm{Aut}_0(\Omega_\Lambda) \cong SO_0(2, 10; \mathbf{R})$$

は Ω_Λ に射影的に作用する $\mathrm{Aut}(\Omega_\Lambda)$ の算術群, 又

$$\mathcal{D} = \bigcup_{d \in \Lambda, d^2 = -2} d^\perp, \qquad d^\perp = \{[\eta] \in \Omega_\Lambda;\ \langle \eta, d \rangle = 0\}$$

は判別式因子と呼ばれる $O^+(\Lambda)$-不変な Ω_Λ^+ の因子である.

一変数のモジュラー形式の場合にそうであった様に, Borcherds Φ-関数を具体的に記述するのには Ω_Λ の管状領域としての表示が便利なので, それを思い出す. 以下, ベクトル $\mathbf{v} \in \Lambda$, $\mathbf{v}' \in \Lambda^\vee$ を条件 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}' = 1$ を充たす原始的 (primitive) かつ等方的 (isotropic) ベクトルとする. Λ の符号が $(2,10)$ なので,

$$L = \mathbf{v}^\perp/\mathbf{v} \cong \mathbf{R}^{1,9}$$

は 10 次元双曲型ベクトル空間であり, L の正錐

$$\mathcal{C}_L = \{x \in L;\ \langle x, x\rangle > 0\}$$

は二個の連結成分から成る. $\mathcal{C}_L$ の一つの成分 $\mathcal{C}_L^+$ を固定すれば, 複素多様体の同型

$$L\otimes\mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_L^+ \ni z \to \left[-\frac{z^2}{2}\mathbf{v} + \mathbf{v}' + z\right] \in \Omega_\Lambda^+$$

が存在する. 以下, この同型により Ω_Λ^+ と管状領域 $L\otimes\mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_L^+$ を同一視する. Λ の自己同型群 $O(\Lambda)$ の作用を除き, Λ は二個の異なる原始的な等方的ベクトルを持つ事が知られている [21]. $\Lambda = \mathbb{U}\oplus\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(-2)$ と書く時, $\mathbb{U}$ の原始的な等方的ベクトルと $\mathbb{U}(2)$ の原始的な等方的ベクトルがその二つの原始的な等方的ベクトルの類を代表する事が知られている. L は $\mathbf{v}$ の選び方に依存し, 従って同一の Ω_Λ^+ 上の保型形式の表示も $\mathbf{v}$ の選び方に依存する. 以下, Λ の二つの原始的な等方的ベクトルのそれぞれに対して, Borcherds Φ-関数の表示を与える. 詳しくは, [4], [5] を参照.

Case 1 $\mathbf{v}$ を原始的部分格子 $\mathbb{U}\subset\Lambda$ の原始的な等方的ベクトルとする. この時, $L = \mathbf{v}^\perp/\mathbf{v} \cong \mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(-2)$ である.

定義 2. Borcherds Φ-関数は以下の無限積で定義される $L\otimes\mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_L^+$ 上の関数である.

$$\Phi(y) := \prod_{\alpha\in L\cap\overline{\mathcal{C}_L^+}} \left(\frac{1-e^{\pi i\langle\alpha,y\rangle}}{1+e^{\pi i\langle\alpha,y\rangle}}\right)^{c(\alpha^2/2)}.$$

ここで, $\{c(n)\}$ は母関数

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c(n)\,q^n = \eta(\tau)^{-8}\eta(2\tau)^8\eta(4\tau)^{-8}, \qquad q = e^{2\pi i\tau}$$

により定義され, 上の無限積は零次元尖点の近傍, 即ち $\Im y$ が充分大きい時に絶対収束する. Borcherds Φ-関数の明示的な Fourier 級数展開も知られている.

Case 2 $\mathbf{v}$ を原始的部分格子 $\mathbb{U}(2) \subset \Lambda$ の原始的な等方的ベクトルとする．この時, $L = \mathbf{v}^{\perp}/\mathbf{v} \cong \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(-2)$ である．

定義 **3.** Borcherds Φ-関数は以下の無限積で定義される $L \otimes \mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_L^+$ 上の関数である．

$$\Phi(y) := e^{2\pi i\langle\rho,y\rangle} \prod_{\alpha\in L,\,\langle\alpha,\rho\rangle>0 \,\mathrm{or}\, \alpha\in\mathbf{N}\rho} \left(1 - e^{2\pi i\langle\alpha,y\rangle}\right)^{(-1)^{\langle\rho-\rho',\alpha\rangle}c(\alpha^2/2)}.$$

ここで, $\rho = ((0,1),0)$, $\rho' = ((1,0),0) \in L$ であり, 数列 $\{c(n)\}$ は Case 1 と同様の母関数で定義される．Case 1 同様, 上の無限積は零次元尖点の近傍, 即ち $\Im y$ が充分大きい時に絶対収束する．この場合も, Borcherds Φ-関数の明示的な Fourier 級数展開も知られている．

次に, Borcherds Φ-関数の Petersson ノルムを定義する．

定義 **4.** (1) $\mathbf{v}$ を Case 1 で選んだ Λ の原始的な等方的ベクトルとする．$\mathbf{v}$ に付随する Ω_Λ^+ の管状領域表示 $L \otimes \mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_L^+$ において, 関数

$$\|\Phi(y)\|^2 := \langle\Im y, \Im y\rangle^4 |\Phi(y)|^2.$$

を Borcherds Φ-関数の Petersson ノルムと言う．関数 $\langle\Im y, \Im y\rangle$ は Ω_Λ^+ の Bergman 核と呼ばれる関数であり, 上半平面の $\Im\tau$ に相当する役割を果す．Bergman 核の変換性から, 関数 $\|\Phi\|^2$ は Ω_Λ^+ 上の $O^+(\Lambda)$-不変 C^∞ 級関数である．

(2) Enriques 曲面 Y の周期を $[Y] \in \Gamma\backslash\Omega_\Lambda^+$ とする時, Y の不変量を

$$\|\Phi(Y)\| := \|\Phi([Y])\|$$

と定める．関数 $\|\Phi\|^2$ の $O^+(\Lambda)$-不変性から, $\|\Phi(Y)\|^2$ は矛盾無く定義される．

4. 楕円モジュラー関数 j の Borcherds Φ-関数を用いた積表示

以上の準備を基に, $j(\sigma) - j(\tau)$ の Borcherds Φ-関数を用いた積表示を与える．

定理 **7** ([11])**.** *$\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ 上の関数として, 以下の等式が成り立つ．*

$$2^{-16}\,|j(\sigma) - j(\tau)|^6 = \frac{\prod_{\gamma\,\mathrm{odd}} \|\Phi\left(\mathrm{Km}(E_\sigma \times E_\tau)/\iota_\gamma\right)\|^3}{\prod_{\gamma\,\mathrm{even}} \|\Phi\left(\mathrm{Km}(E_\sigma \times E_\tau)/\iota_\gamma\right)\|^2}.$$

より強く, 各 $\gamma \in A_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)} \setminus \{0\}$ に対してモジュラー埋め込み $i_\gamma \colon \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \hookrightarrow \Omega_\Lambda^+$ が存在して,

$$2^{-16}\left(j(\sigma) - j(\tau)\right)^6 = \frac{\prod_{\gamma\,\mathrm{odd}} \Phi\left(i_\gamma(\sigma,\tau)\right)^3}{\prod_{\gamma\,\mathrm{even}} \Phi\left(i_\gamma(\sigma,\tau)\right)^2}$$

が成り立つ．ここで, $i_\gamma(\sigma,\tau)$ は Enriques 構造 $(\mathrm{Km}(E_\sigma \times E_\tau), \iota_\gamma)$ の周期である．

直積型とは限らない Kummer 曲面や, Enriques 構造を許容するより一般の $K3$ 曲面に対しても, Borcherds Φ-関数を用いてモジュライ空間上に面白いモジュラー関数を構成できるかも知れない. 又, 定理 7 に直結した問題としては, j-関数以外の Hauptmodul の差を Borcherds Φ-関数を用いて表す事ができるのであろうか？

さて, Gross-Zagier の公式を定理 7 の積表示に基づいて理解しようとする時, 次の問は自然であろう.

問題 8. Borcherds Φ-関数の値 $\|\Phi(Y)\|$ を算術的に理解せよ.

次節以降, この問題を話題の中心に扱う.

5. Borcherds Φ-関数の値の算術的性質 …… Arakelov 幾何学からのアプローチ

Y を Enriques 曲面とし, X を Y に付随する $K3$ 曲面とする. 簡単の為, X と Y は $\mathbf{Q}$ 上定義されていると仮定する. （本当は $\overline{\mathbf{Q}}$ 上で定義されていれば充分である.）この時, 夫々Y, X を一般ファイバーとする算術多様体 $g\colon \mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ と $h\colon \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ が存在する.

事実 9. 相異なる素数 $2, p_1, \ldots, p_k$ が存在して, $N := 2p_1 \cdots p_k$ と置けば, 以下の主張が成り立つ.

- $\mathcal{X}^o := \mathcal{X}|_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/N])}$ と $\mathcal{Y}^o := \mathcal{Y}|_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/N])}$ は $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[1/N])$ 上で滑らかである.
- $\mathcal{X}^o$ 上に自由対合 ι が存在して, $\mathcal{Y}^o = \mathcal{X}^o/\iota$ が成り立つ.

Y に対応する X 上の Enriques 構造を定める対合 ι は, $\mathbf{Q}$ 上では固定点を持たないが整数環上では一般に固定点を持つ. そこで, ファイバーの非特異性と併せて, 上の様に N を選ぶ. 算術的 Riemann-Roch 定理 [7] と $K3$ 曲面・Enriques 曲面の解析的捩率の計算 [23] から次の主張が導かれる.

定理 10 ([11])**.** α を階数 1 の自由 $\mathbf{Z}$-加群 $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})^\vee$ の生成元とすれば,

$$\log \|\Phi(Y(\mathbf{C}))\| \equiv 2 \log \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{X(\mathbf{C})} \alpha \wedge \bar{\alpha} \right| \mod \sum_{p|N} \mathbf{Q} \log p.$$

Y が Kummer 曲面上の自由対合の商になっている場合は次の様に書き換えられる.

定理 11. *A を代数体 K 上定義された Abel 曲面とし, その Faltings 高さを*

$$h_{\mathrm{Fal}}(A) := \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \log \#(f_* \Omega^2_f / \alpha O_K) - \frac{1}{2[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \log \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{A_\sigma} \alpha \wedge \bar{\alpha} \right|$$

とする．ここで, $f\colon \mathcal{A} \to \mathrm{Spec}(O_K)$ は A の *Néron* モデルであり, $\alpha \in \Gamma(f_*\Omega_f^2)$ である．$\iota\colon \mathrm{Km}(A) \to \mathrm{Km}(A)$ が K 上定義された自由対合ならば, $\overline{\mathbf{Q}}$ の元の掛算を無視すれば, 以下の等式が成り立つ．

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \|\Phi((\mathrm{Km}(A)/\iota)_\sigma)\| \equiv_{\overline{\mathbf{Q}}} \pi^{-4} e^{-4[K:\mathbf{Q}]h_{\mathrm{Fal}}(A)}.$$

ここで, A_σ, $(\mathrm{Km}(A)/\iota)_\sigma$ は体の埋め込み $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$ に対応して A, $\mathrm{Km}(A)/\iota$ から得られる複素多様体である．（以下, 同様の記号を使う.）

後で, Kummer 曲面が主偏極の場合に $\overline{\mathbf{Q}}$ の部分をより明示的な形で定式化する．

注意 12. K を $[K:\mathbf{Q}] = 4$ となる CM 体とし, $\mathbf{Q}$ 上 Galois と仮定する．さらに, A が O_K による虚数乗法を持ち, Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ は可換であると仮定する．この条件下で, $h_{\mathrm{Fal}}(A)$ は Colmez [6] により計算された．（Colmez の結果は一般の CM Abel 多様体に対して成り立つ．ここでは Abel 曲面の場合のみを扱っているので, 上の様な条件を課した．Köhler-Roessler [12] により, 少し弱い形ではあるが別証明も知られている.）Colmez によれば, $\log 2$ の有理数倍の不定性を除き

$$\frac{1}{2}h_{\mathrm{Fal}}(A) = 2\frac{L'(\chi_{\mathrm{prim}},0)}{L(\chi_{\mathrm{prim}},0)} + \log f_\chi \text{ の明示的な線形和.}$$

但し, 上の和は $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の奇指標を渡る．各奇指標 χ に対して, χ_{prim} を χ の原始指標とし, $L(s,\chi_{\mathrm{prim}})$ をそれに付随する原始的 L-関数, f_χ は指標 χ の導手である．

この Colmez の定理と上の定理を組み合わせれば, Enriques 曲面に虚数乗法を持つ Abel 曲面の Kummer 曲面が同伴する場合, Borcherds Φ-関数のノルムの積 $\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \|\Phi((\mathrm{Km}(A)/\iota)_\sigma)\|$ の超越的な部分が求められる．

注意 13. X が代数体 K 上定義された Picard 数 20 の $K3$ 曲面で, ι が X 上の自由対合の時, Shofer [19] は以下の量の明示公式を或る種の Eisenstein 級数の特殊値と L 関数の原点における対数微分を含む形で与えた．

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \|\Phi((X/\iota)_\sigma)\|.$$

例えば, X が Kummer 曲面で Picard 数が 20 ならば, 或る CM 楕円曲線 E を用いて $X = \mathrm{Km}(E \times E)$ と表される [20]．この設定では, Schofer の結果と A が CM の場合の定理 11 は主要な登場人物が一致しているという点で整合している．(細かい所まで一致しているかどうか, 筆者はまだ確認していない.)

Shofer の定理は, 一般の直交型モジュラー多様体の CM 点において, Borcherds product の値の明示公式を或る種の Eisenstein 級数の特殊値と X の周期に付随する虚二次体の L 関数の対

数微分を用いて与える. 直交型モジュラー多様体が格子偏極 $K3$ 曲面のモジュライ空間の場合, Schofer の意味の CM 点は Picard 数 20 の $K3$ 曲面の周期に対応する点の事である. Borcherds product として Borcherds Φ-関数を選んだ場合が, 上の主張である.

さて, $\sigma, \tau \in \mathfrak{H}$ が CM 点の時, $|j(\sigma) - j(\tau)|^{12}$ は $\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})}(\|\Phi(Y_\sigma)\|/\|\Phi(Y'_\sigma)\|)^2$ という形の数の積であった（定理 7）. Gross-Zagier の公式を $K3$ 曲面を通して理解するという目論見からすると, 我々が知りたいのは次の事である.

問題 14. 或る $K3$ 曲面上に異なる Enriques 構造が存在する時, 夫々の Enriques 構造に関する Borcherds Φ-関数のノルムの比の算術的な性質を理解せよ.

この問に対して, 算術的 Riemann-Roch 定理から, 次の主張を示す事ができる.

定理 15 ([11])**.** *Y, Y' を Enriques 曲面とし, 同一の $K3$ 曲面 X が同伴すると仮定する. もし X, Y, Y' の全てが代数体 K 上で定義されているならば,*

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \left(\frac{\|\Phi(Y_\sigma)\|}{\|\Phi(Y'_\sigma)\|} \right)^2 \in \overline{\mathbf{Q}}.$$

より強く, （X, Y, Y' に依存するかも知れない）或る自然数 $\nu \in \mathbf{N}$ が存在して, 左辺の ν 乗は有理数である.

この量は恒に有理数であると筆者は予想している. (次節で扱う例ではその様になっている.)

6. Borcherds Φ-関数の値の代数的表示 …… 特別な四次元族の場合

これまで見て来た Borcherds Φ-関数の値の幾つかの性質から, 次の問は自然であろう.

問題 16. Enriques 曲面の代数的な族に対して, $\|\Phi\|$ の代数的な表示が存在するか？

代数的な表示というのは曖昧な言い方であるが, 少なくとも前節の結果を説明できるような Borcherds Φ-関数の多項式による表示を意味する. そこで, この節では以下の 4-パラメーターの Enriques 曲面族を考える.

3×6-複素行列 $A \in M(3,6;\mathbf{C})$ に対して, 複素曲面 X_A を

$$X_A := \left\{ [x] \in \mathbf{P}^5;\ \begin{array}{ll} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 + a_{14}x_4^2 + a_{15}x_5^2 + a_{16}x_6^2 & = 0, \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2 + a_{25}x_5^2 + a_{26}x_6^2 & = 0, \\ a_{31}x_1^2 + a_{32}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{34}x_4^2 + a_{35}x_5^2 + a_{36}x_6^2 & = 0 \end{array} \right\}$$

で定める. $PSL(3,\mathbf{C})$ と $(\mathbf{C}^*)^6$ の自然な $M(3,6;\mathbf{C})$ への作用を考えれば, 上の形の X_A は $\mathbf{P}^2$ の 6 点の配置空間 $X(3,6)$ でパラメトライズされる. $X(3,6)$ の点は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という形の行列を代表元に持つので, $X(3,6)$ の次元は 4 である.

X_A には以下の対合が作用する.

$$\iota\colon \mathbf{P}^5 \ni (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6) \to (x_1 : x_2 : x_3 : -x_4 : -x_5 : -x_6) \in \mathbf{P}^5.$$

一般に,

$$\{i,j,k\} \cup \{l,m,n\} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

という分割に対して, $\mathbf{P}^5$ の対合 $\iota_{\binom{ijk}{lmn}}$ を

$$\iota_{\binom{ijk}{lmn}}(x_i, x_j, x_k, x_l, x_m, x_n) = (x_i, x_j, x_k, -x_l, -x_m, -x_n)$$

で定めれば, $\iota_{\binom{ijk}{lmn}}$ は X_A に作用する. $\iota = \iota_{\binom{123}{456}}$ である.

3×6-複素行列 $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_6) \in M(3,6;\mathbf{C})$ と $1 \leq i < j < k \leq 6$ に対して,

$$\Delta_{ijk}(A) = \det(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k)$$

と定める. A の全ての三次小行列式が消えない時, 即ち

$$\prod_{i<j<k} \Delta_{ijk}(A) \neq 0$$

の時, $A \in M(3,6;\mathbf{C})$ を一般の 3×6-行列と呼ぶ.

事実 17. *一般の 3×6-行列 $A \in M(3,6;\mathbf{C})$ に対して, X_A は $K3$ 曲面であり,*

$$Y_{A,\binom{ijk}{lmn}} := X_A / \iota_{\binom{ijk}{lmn}}$$

は全ての分割 $\{i,j,k\} \cup \{l,m,n\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ に対して Enriques 曲面である.

上の事実から, 一般の X_A は少なくとも 10 個の異なる Enriques 構造を持つ.

定理 18 ([11])**.** *定数 $a, b \in \mathbf{Q}$ が存在して, 任意の一般の 3×6-複素行列 $A \in M(3,6;\mathbf{C})$ に対して, 以下の等式が成り立つ.*

$$\|\Phi(Y_{A,\binom{ijk}{lmn}})\|^2 = 2^a 3^b |\Delta_{ijk}(A)|^4 |\Delta_{lmn}(A)|^4 \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{X_A} \alpha_A \wedge \overline{\alpha}_A \right)^4.$$

ここで, $\mathit{\Xi}$ を

$$\sum_{i=1}^{6}(-1)^{i-1}x_i dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_6=(\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}x_j dx_j)\wedge\mathit{\Xi}$$

とする時, 正則 2-形式 $\alpha_A\in H^0(X_A,\Omega^2)$ は

$$\alpha_A:=\mathit{\Xi}|_{X_A}$$

として定まる. $\mathit{\Xi}$ の選び方は一意的ではないが, α_A は一意に定まる.

この定理から, X_A 上の 10 個の Enriques 構造 $\iota_{\binom{ijk}{lmn}}$ は実際に相異なる事が従う. 標数 2 の Enriques 曲面は他の標数の Enriques 曲面と様子が異なるので, 2 冪が定理 18 の主張に現れる事は或る意味で自然な事だと筆者は思うが, 3 冪が出現する自然な理由は思いつかない. 筆者は $b=0$ と予想している.

$A\in M(3,6;\mathbf{Z})$ の時, X_A は $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ 上の算術多様体 $f\colon\mathcal{X}\to\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ を定める. $\Delta_{ijk}(A)\Delta_{lmn}(A)$ を割る素数 p は, 対合 $\iota_{\binom{ijk}{lmn}}$ が p 上のファイバー $\mathcal{X}(\mathbf{F}_p)$ 上自由で無いと言う性質で特徴付けられる. この意味で,（素数 2, 3 を除き）Borcherds Φ-関数は自由対合 $\iota_{\binom{ijk}{lmn}}$ の整数環上の退化を表す保型形式である.

系 19. A が一般の 3×6-複素行列で行列成分が体 K に含まれるならば,

$$\frac{\|\Phi(Y_{A,\binom{ijk}{lmn}})\|^2}{\|\Phi(Y_{A,\binom{i'j'k'}{l'm'n'}})\|^2}=\left|\frac{\Delta_{ijk}(A)\Delta_{lmn}(A)}{\Delta_{i'j'k'}(A)\Delta_{l'm'n'}(A)}\right|^4\in K.$$

特に, K が代数体で $A\in M(3,6;K)$ が一般の行列ならば,

$$\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})}\left(\frac{\|\Phi((Y_{A,\binom{ijk}{lmn}})_\sigma)\|}{\|\Phi((Y_{A,\binom{i'j'k'}{l'm'n'}})_\sigma)\|}\right)^2=\left|\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})}\left(\frac{\Delta_{ijk}(A)\Delta_{lmn}(A)}{\Delta_{i'j'k'}(A)\Delta_{l'm'n'}(A)}\right)^\sigma\right|^4\in\mathbf{Q}.$$

さて, 10 個の Enriques 構造から定まる Borcherds Φ-関数のノルムの比を取れば, 写像

$$X(3,6)\ni[A]\to(\cdots:\|\Phi(Y_{A,\binom{ijk}{lmn}})\|:\cdots)\in\mathbf{P}^9(\mathbf{R})$$

が得られるが, 上の定理からこの写像は正則写像

$$X(3,6)\ni[A]\to(\cdots:\Delta_{ijk}(A)\Delta_{lmn}(A):\cdots)\in\mathbf{P}^9(\mathbf{C})$$

と座標の絶対値を取る写像

$$\mathbf{P}^9(\mathbf{C})\ni(\cdots:x_{\binom{ijk}{lmn}}:\cdots)\to(\cdots:|x_{\binom{ijk}{lmn}}|:\cdots)\in\mathbf{P}^9(\mathbf{R})$$

の合成である．異なる対合に対する Borcherds Φ-関数の比 $\Phi(Y_{A,\binom{ijk}{lmn}})/\Phi(Y_{A,\binom{i'j'k'}{l'm'n'}})$ に自然な意味を与えて, 正則写像

$$X(3,6) \ni [A] \to (\cdots : \Delta_{ijk}(A)\Delta_{lmn}(A) : \cdots) \in \mathbf{P}^9(\mathbf{C})$$

を 10 個の Enriques 構造から導かれる Borcherds Φ-関数の比として理解できると良いが, 筆者はまだちゃんと考えていない．これができると, $\mathbf{P}^2$ の 6 本の直線で分岐する二重被覆として得られる $K3$ 曲面の周期写像の逆写像をテータ関数を用いて与えるという松本圭司氏の結果 [14], [22] の類似が, 今考えている Enriques 曲面の 4-パラメーター族に対して Borcherds Φ-関数を用いてできる事になる．$K3$ 曲面族 $\{X_A\}_{A\in X(3,6)}$ は符号 $(2,4)$ の適当な格子 N に付随する IV 型領域を周期領域に持つ（はずである）．第 4 節との類似を追うと, 10 個の分割 $\{i,j,k\}\cup\{l,m,n\}=\{1,\ldots,6\}$ に対応する異なる 10 個の格子の埋め込み $N \hookrightarrow \Lambda$ が存在して, それらから定まる 10 通りの領域のモジュラー埋め込み $\Omega_N \hookrightarrow \Omega_\Lambda$ による Borcherds Φ-関数の引き戻しを Ω_N 上で考え, それらの 10 個の引き戻しの比が上の写像

$$X(3,6) \ni [A] \to (\cdots : \Delta_{ijk}(A)\Delta_{lmn}(A) : \cdots) \in \mathbf{P}^9(\mathbf{C})$$

に一致するはずである．さらに言えば, この様にして得られる Ω_N 上の 10 個の Borcherds Φ-関数の引き戻しが, 松本・寺杣 [15] の 10 個のテータ関数 $\{\Theta^2_{\langle J\rangle}\}$ に一致するはずである．

系 **20.** X_A *が種数* 2 *曲線の Jacobi 多様体* S *に付随する Kummer 曲面の時,*

$$\mathrm{Km}(S) = X_A, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbf{C}.$$

と書ける事が知られている [8, Chap. 6 Sect. 2]．そこで, 条件

$$\mathrm{Km}(S) = X_A, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \lambda_5^2 & \lambda_6^2 \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定し，さらに代数体 K が存在して $\lambda_1,\dots,\lambda_6\in K$ が成り立つと仮定する．この時，以下の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&2^{-a}3^{-b}\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})}\|\Phi((\mathrm{Km}(S)/\iota_{\binom{ijk}{lmn}})_\sigma)\| = \\
&\left|\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})}\Delta(\lambda_i^\sigma,\lambda_j^\sigma,\lambda_k^\sigma)\Delta(\lambda_l^\sigma,\lambda_m^\sigma,\lambda_n^\sigma)\right|^2\left\{\#\left(\frac{f_*\Omega_f^2}{O_K\alpha_A}\right)\right\}^4\left(\frac{e^{-h_{\mathrm{Fal}}(S)}}{\pi}\right)^{4[K:\mathbf{Q}]}.
\end{aligned}
$$

ここで，$\Delta(x_1,x_2,x_3):=\prod_{1\le i<j\le 6}(x_i-x_j)$ は $\{x_1,x_2,x_3\}$ の差積であり，α_A を S の *Néron* モデルの上の 2-形式と見ている．

右辺の最初の二つの項が有理数であり，最後の項が一般に超越的である．S がさらに CM Abel 曲面の時，Colmetz の定理により $h_{\mathrm{Fal}}(S)$ が Dirichlet L-関数の原点における対数微分の線形和として表示されるので，この場合は 2 冪と 3 冪の不定性を除いて Borcherds Φ-関数のノルムの値（の $\mathbf{Q}$ 上の共役に関する平均）の明示式を得る．

ノルムを取る前の Borcherds Φ-関数の値も興味深い．ベクトル $c,c'\in H^2(X_A,\mathbf{Z})$ を

$$\iota^*c=-c,\qquad \iota^*c'=-c',\qquad \langle c,c'\rangle=1,\qquad \langle c,c\rangle=\langle c',c'\rangle=0$$

となる様に選び，

$$\omega_{A,c}:=\frac{\alpha_A-\langle\alpha_A,c\rangle c'-\langle\alpha_A,c'\rangle c}{\langle\alpha_A,c\rangle}$$

と定めれば，$L=\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(-2)$ とする時，

$$\omega_{A,c}\in L\otimes\mathbf{R}+i\mathcal{C}_L$$

であり，$\omega_{A,c}$ は (X_A,ι) の周期である．

定理 21 ([11])**.** 複素 3×6-行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

が一般ならば，以下の等式が成り立つ．

$$|\Phi(\omega_{A,c})|^2=2^a3^b|\Delta_{123}(A)|^4\left|\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{dy_1\wedge dy_2}{\sqrt{y_1y_2y_3}\prod_{i=1}^2\sqrt{a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3}}\right|^8.$$

ここで，$y_1+y_2+y_3+1=0$ であり，γ は或る 2-サイクルである．

上で現れた積分は, 超幾何関数の多変数版として松本・佐々木・吉田により研究されていた積分である [22]. 又, 上の定理の右辺に現れる量は松本・寺杣 [15] の主定理に現れる量に非常に類似している事を注意する. 松本・寺杣 [15, Eq. (4)] の右辺と定理 21 の右辺は本質的に同じ量である様に思われる. 最も望ましいのは, $\Phi(Y_{A,\binom{ijk}{lmn}})$ と松本・寺杣 [15] に現れるテータ関数 $\Theta^2_{\langle J\rangle}$ の一致が系 19 の直後に述べた形で言える事であるが, 筆者はまだ検証していない. ($\iota_{\binom{ijk}{lmn}}$ に対応した格子の埋め込み $N \hookrightarrow \Lambda$ が同定されてしまえば, 後は基本的に保型形式の零と重さを比較するだけの事なので, 難しく無いはずである.) この一致が言えれば, $\Theta^2_{\langle J\rangle}$ と $\Phi(Y_{A,\binom{ijk}{lmn}})$ の Fourier 展開を比較する事により, 定理 18 における 2 冪と 3 冪の不定性が排除される. (城崎シンポジウムの期間中, 定理 21 と論文 [15] の強い類似性を指摘して下さった寺杣友秀さんにこの場を借りて感謝します.)

7. Borcherds Φ-関数の値の代数的表示 …… 一般の場合

$f_1, g_1, h_1 \in \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]$ と $f_2, g_2, h_2 \in \mathbf{C}[x_4, x_5, x_6]$ を同次二次式とし,

$$f := f_1 + f_2, \qquad g = g_1 + g_2, \qquad h = h_1 + h_2$$

と定める. 二次式 f, g, h が一般の時, 以前と同様にして $K3$ 曲面

$$X_{(f,g,h)} := \{[x] \in \mathbf{P}^5;\ f(x) = g(x) = h(x) = 0\}$$

を得る. 構成から, $X_{(f,g,h)}$ は $\mathbf{P}^5$ の対合

$$\iota(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6) = (x_1 : x_2 : x_3 : -x_4 : -x_5 : -x_6)$$

で不変である. 以前と同様,

$$Y_{(f,g,h)} := X_{(f,g,h)}/\iota$$

と定めれば, f, g, h が一般の時, $Y_{(f,g,h)}$ は Enriques 曲面である.

事実 22. 一般の *Enriques* 曲面は $Y_{(f,g,h)}$ という表示を持つ.

この主張は, $Y_{(f,g,h)}$ と表される Enriques 曲面が 10 次元族を成すという事である [1]. ([1] によれば, 全ての Enriques 曲面が $Y_{(f,g,h)}$ の形に表されるという訳では無い様である.)

定理 23 ([11])**.** 定数 $c, d \in \mathbf{Q}$ が存在して, 二次式

$$f = f_1 + f_2, \qquad g = g_1 + g_2, \qquad h = h_1 + h_2 \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_6]$$

で定義される *Enriques* 曲面 $Y_{(f,g,h)}$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\|\Phi(Y_{(f,g,h)})\|^2 = 2^c 3^d |R(f_1,g_1,h_1)||R(f_2,g_2,h_2)| \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{X_{(f,g,h)}} \alpha_{(f,g,h)} \wedge \overline{\alpha_{(f,g,h)}} \right)^4 .$$

ここで, $R(f_1,g_1,h_1)$ と $R(f_2,g_2,h_2)$ は三本の三変数二次式に対する終結式であり, 正則 2-形式 $\alpha_{(f,g,h)} \in H^0(X_{(f,g,h)}, \Omega^2)$ は以前と同様 $\alpha_{(f,g,h)} := \varXi|_{X_{(f,g,h)}}$ と定義される. 但し,

$$\sum_{i=1}^{6} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_6 = df \wedge dg \wedge dh \wedge \varXi .$$

系 24. $Y = Y_{(f,g,h)}$, $Y' = Y_{(f',g',h')}$ を代数体 K 上定義された *Enriques* 曲面とし, 同一の $K3$ 曲面に同伴すると仮定する. この時,

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \frac{\|\Phi(Y_\sigma)\|^2}{\|\Phi(Y'_\sigma)\|^2} = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \left(\frac{|R(f_1,g_1,h_1)R(f_2,g_2,h_2)|}{|R(f'_1,g'_1,h'_1)R(f'_2,g'_2,h'_2)|} \right)^\sigma \left| \left(\frac{\alpha_{(f,g,h)}}{\alpha_{(f',g',h')}} \right)^\sigma \right|^8 \in \mathbf{Q}.$$

楕円曲線の判別式モジュラー形式が一変数三次式の判別式と同一視される様に, Enriques 曲面に対する Borcherds Φ-関数は代数的には「三本の三変数二次式に対する終結式」であると定理 23 を纏める事ができるかも知れない.

8. 楕円曲線の場合

第 6 節と第 7 節の結果には楕円曲線に対する類似の結果があるので, この節で紹介する. E を楕円曲線とすれば, $A = (a_{ij}) \in M(2,4;\mathbf{C})$ が存在して, E は以下の表示を持つ.

$$E = E_A := \left\{ [x] \in \mathbf{P}^3; \begin{array}{ll} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2 + a_{14}x_4^2 & = 0, \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2 & = 0 \end{array} \right\}.$$

此れ等の方程式は楕円曲線上のレベル 4 のテータ関数の充たす関係式である. （従って, もう一つ別の関係式も有るが, それは最初の二つの関係式に線形従属である.）

第 6 節と同様, $1 \le i < j \le 4$ に対して

$$\Delta_{ij}(A) = \det(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$$

と定義する.

定理 25 (古典的)**.** 判別式モジュラー形式（或は *Jacobi* Δ-関数）を

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} q \prod_{n>0} (1-q^n)^{24}, \qquad q = e^{2\pi i \tau}$$

で定める. 楕円曲線 E_A を $E_A \cong \mathbf{C}/\mathbf{Z} + \tau_A \mathbf{Z}$, $\tau_A \in \mathfrak{H}$ と表す時,

$$\|\Delta(E_A)\|^2 := (\Im \tau_A)^{12} |\Delta(\tau_A)|^2$$

と定めれば, $\|\Delta(E_A)\|$ は E_A の同型類のみに依存する. この時, 次の等式が成り立つ.

$$\|\Delta(E_A)\| = \prod_{i<j} |\Delta_{ij}(A)|^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{E_A} \alpha_A \wedge \overline{\alpha}_A \right)^6 .$$

ここで, 1-形式 $\alpha_A \in H^0(E_A, \Omega^1)$ は定理 18, 定理 23 と同様に定義される.

2×4-行列 A の行列成分 a_{ij} は, E_A のテータ定数を用いて具体的に表せる. 又, E_A を Weierstrass 標準形に書く時, α_A も Weierstrass 標準形上の 1-形式 dx/y とテータ定数を用いて具体的に表す事ができる. これらの事から, 定理 25 を確かめる事ができる. E が代数体上で定義されている時は, 算術的 Riemann-Roch 定理を用いても上の等式が確かめられると思う.

References

[1] Beauville, A. *Surfaces Algébriques Complexes*, Astérisque **54** (1978)

[2] Borcherds, R.E. *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. Math. **109** (1992), 405–444.

[3] ——— *Automorphic forms on $O_{s+2,s}(\mathbf{R})$ and infinite products*, Invent. Math. **120** (1995), 161–213.

[4] ——— *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), 699–710.

[5] ——— *Automorphic forms with singularities on Grassmanians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[6] Colmez, P. *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe*, Ann. of Math. **138** (1993), 625–683.

[7] Gillet, H., Soulé, C. *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), 473–543.

[8] Griffiths, P., Harris, J. *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York (1978)

[9] Gross, B.H., Zagier, D.B. *On singular moduli*, J. reine angew. Math. **355** (1985), 191-220.

[10] Horikawa, E. *On the periods of Enriques surfaces I, II*, Math. Ann. **234** (1978), 73–108. **235** (1978), 217–246.

[11] Kawaguchi, S., Mukai, S., Yoshikawa, K.-I. in preparation

[12] Köhler, K., Roessler, D. *A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry IV*, J. reine angew. Math. **556** (2003), 127–148.

[13] Kondo, S. *Enriques surfaces with finite automorphism groups*, Japanese J. Math. **12** (1986), 191–282.

[14] Matsumoto, K. *Theta functions on the bounded symmetric domain of type* $I_{2,2}$ *and the period map of a 4-parameter family of* $K3$ *surfaces*, Math. Ann. **295** (1993), 383-409

[15] Matsumoto, K., Terasoma, T. *Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines*, preprint, arXiv:1001.4865 (2010).

[16] Mukai, S. *Numerically trivial involutions of Kummer type of an Enriques surface*, Kyoto J. Math. (to appear).

[17] Mukai, S., Namikawa, Y. *Automorphisms of Enriques surfaces which act trivially on the cohomology groups*, Invent. Math. **77** (1984), 383–397.

[18] Ohashi, H. *On the number of Enriques quotients of a* $K3$ *surface*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **43** (2007), 181–200.

[19] Schofer, J. *Borcherds forms and generalizations of singular moduli*, J. reine angew. Math. **629** (2009), 1–36.

[20] Shioda, T., Mitani, N. *Singular abaleian surfaces and binary quadratic forms*, Lecture Notes Math. **412**, Springer, (1974), 259–287.

[21] Stark, H. *Compactifications of the period space of Enriques surfaces Part I*, Math. Z. **207** (1991), 1–36.

[22] Yoshida, M. *Hypergeometric Functions, My Love*, Aspects of Math., Vieweg, Braunschweig (1997)

[23] Yoshikawa, K.-I. $K3$ *surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, Invent. Math. **156** (2004), 53–117.