

Enriques surfaces and root systems

— Enriques surfaces of type E_7 —

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)

概要

An Enriques surface S is called of type E_7 if the twisted Picard lattice $\text{Pic}^\omega S$ contains the (negative definite) root lattice of type E_7 as a sublattice. Assume that S is not of type E_8 or $E_7 + A_1$. Then the period of S of type E_7 is the same as that of a curve of genus two $y^2 = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$ with a Göpel subgroup, where g_1, g_2, g_3 are quadratic polynomials. An Enriques surface S of type E_7 is birationally equivalent to the quotient of a quartic surface $\{(A_1xt + yz) + (A_2yt + xz) + (A_3zt + xy)\}^2 + 4Dxyz = 0 \subset \mathbb{P}^3$ by the standard Cremona transformation $(x : y : z : t) \mapsto (1/(A_1x) : 1/(A_2y) : 1/(A_3z) : 1/(A_1A_2A_3t))$. Moreover, the coefficients A_1, A_2, A_3 are equal to $D(g_1)R(g_2, g_3), D(g_2)R(g_1, g_3), D(g_3)R(g_1, g_2)$ and $D = \{\det(g_1, g_2, g_3)\}^2$, where $D(g_i)$ is the discriminant, $R(g_i, g_j)$ is the resultant and (g_1, g_2, g_3) is the 3×3 matrix whose entries are the coefficients of g_1, g_2, g_3 .

Enriques 曲面 S は K3 曲面 X を固定点をもたない対合 ε で割って得られる代数曲面である。因子類群の間のノルム準同型写像 $\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } S$ の核 $\text{Pic}^\omega S$ の上で交点数は常に偶数である。そこで、 $\text{Pic}^\omega S$ に交点数の半分を値とする整内積を与え、これを捩れ Picard 格子 (twisted Picard lattice) と呼ぶ。この捩れ Picard 格子 $\text{Pic}^\omega S$ が (負定値) 整格子 L を原始的部分格子¹として含むとき、Enriques 曲面 S は L 型であるという²。ここでは、 L が E_7 型の (負定値) ルート格子である場合に、Enriques 曲面の定義式を周期から復元する。

§1 4次曲面が被覆する E_7 型 Enriques 曲面

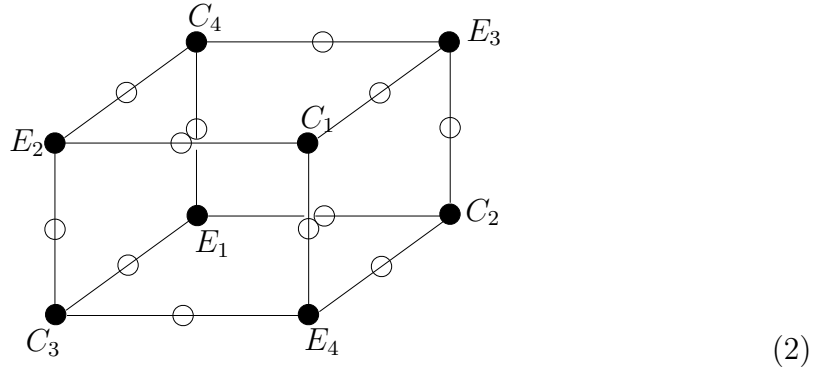
射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の 4 次曲面

$$\{(A_1xt + yz) + (A_2yt + xz) + (A_3zt + xy)\}^2 + 4Dxyz = 0 \quad (1)$$

¹部分格子 $L \subset I$ は商 I/L が捩れをもたないとき、原始的 (primitive) と言う。

²Nikulin[11] では、Enriques 曲面上の非特異射影直線の配置からルート型を定めている。 L がルート型格子のとき、ここでの定義とは少し異なることに注意。

を考える．ただし、 $A_1, A_2, A_3, D \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は非零定数である．この4次曲面は4個の座標点 $(1000), \dots, (0001)$ で D_4 型の有理2重点をもち、それら以外では非特異である．その極小非特異化を $X = X_{(A_1:A_2:A_3:D)}$ とする．4次曲面と座標平面との交わりは(2重)2次曲線である．特異点解消とこれら4本の2次曲線(例えば、 $t = yz + xz + xy = 0$)でもって、 X 上の20本の $\mathbb{P}^1$ 配置を得るが、その双対グラフは次の通りで、立方体の8頂点(黒丸)と12辺の中点(白丸)よりなる．



ここで、 $C_i, 1 \leq i \leq 4$, は4本の2次曲線の強変換を表す．グラフにおけるこれらの補集合が $E_i, 1 \leq i \leq 4$, を中心とする D_4 型 Dynkin 図形4個の疎な和集合になっている．

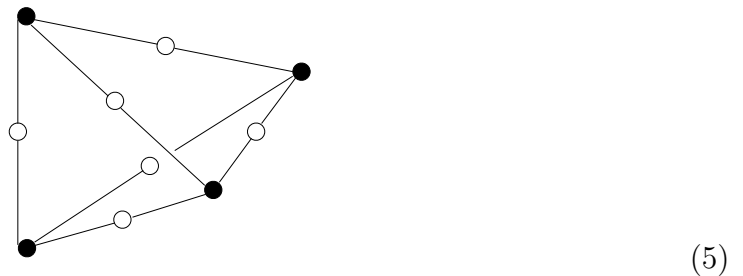
定義式(1)は座標の置換 $(xy)(zt), (xz)(yt), (xt)(yz)$ で保たれる．よって、 X には $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ (Klein の4元群) が作用する．それだけでなく、(1)は $\mathbb{P}^3$ の標準 Cremona 変換

$$(x : y : z : t) \mapsto \left(\frac{1}{A_1 x} : \frac{1}{A_2 y} : \frac{1}{A_3 z} : \frac{1}{A_1 A_2 A_3 t} \right) \quad (3)$$

でも保たれる．(代入して $(A_1 A_2 A_3 x y z t)^2$ を掛けると元に戻る．) よって、極小特異点解消 X の対合 ε が誘導される．これが固定点をもつのは

$$(s_1^2 - 4s_2)^2 = 64s_4 \quad (4)$$

と同値である³．ただし、 s_i は A_1, A_2, A_3, D の i 次基本対称式である．よって、(4)が成立しない時に、商曲面として Enriques 曲面 $S = X/\varepsilon$ が得られる．対合 ε はグラフ(2)に立方体の中心に関する点対称で作用するので、 S の上には次を双対グラフとする10本の $\mathbb{P}^1$ が載っている．



³この式は A_1, A_2, A_3, D を斉次座標とする $\mathbb{P}^3$ の中で Steiner の Roman 4次曲面を定めている．

このグラフから隣接しない黒丸と白丸を1個ずつを取り除くと E_7 型の拡大 Dynkin 図形 (III^* 型の小平ファイバー) が得られる. よって、 S は E_7 型である. 座標の置換 $(xy)(zt), (xz)(yt), (xt)(yz)$ と Cremona 変換 (3) と可換なので、K3 曲面 X への $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ 作用は Enriques 曲面 S への作用に落ちる.

注意 1 ここでは複素数体上で考えているが、標数2の体上での (1) は Jacobian Kummer 曲面の定義式である (Laszlo-Pauly[8, §4]).

§2 E_7 型 Enriques 曲面に対する周期写像

Enriques 曲面 S は K3 曲面 X を固定点のない対合 ε で割って得られる. よって、 S 上には非自明な局所系 $\mathbb{Z}_S^\omega$ が存在する. $\mathbb{Z}_S^\omega$ は X 上の自明局所系 $\mathbb{Z} \times X$ を $(-1_X) \times \varepsilon$ で割ったものである. この局所系の第2コホモロジー群 $H_S := H^2(S, \mathbb{Z}_S^\omega) \simeq \mathbb{Z}^{12}$ は重み2の Hodge 構造をもつ. $H_S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は $H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ と分解され、Hodge 数は $1, 10, 1$ である. $\mathbb{Z}_S^\omega \times \mathbb{Z}_S^\omega \rightarrow \mathbb{Z}_S$ は内積を定め、これでもって H_S は階数12、符号数 $(2, 10)$ の odd unimodular 格子 (記号は $I_{2,10}$) になる. また、Hodge 構造の偏極が与えられる. 振れ Picard 格子は H_S の $(1, 1)$ 部分に他ならない.

定理 1 [Torelli 型定理] 二つの Enriques 曲面 S, S' に対して、それらの偏極 Hodge 構造 $H_S, H_{S'}$ が同型ならば、 S と S' は同型である.

言い換えると Enriques 曲面の同型類の集合からの周期写像

$$\{\text{Enriques 曲面}\} / \text{同型} \rightarrow \tilde{D}^{10} / O(I_{2,10}), \quad S \mapsto H_S \quad (6)$$

は単射である. (殆ど全射でもある.) ただし、 $\tilde{D}^{10}$ は 10 次元の IV 型有界対称領域の 2 個の疎な和集合で、そこに $I_{2,10}$ の直交群 $O(I_{2,10})$ が作用している.

注意 2 Torelli 型定理のこの定式化は非自明な局所系を使わずに Allcock[1] が純格子論的に見つけた. 上のように局所系 $\mathbb{Z}_S^\omega$ を使うことは R. Oudompheng 氏も独立に見つけている.

L 型の Enriques 曲面 S に対しては、 H_S における L の直交部分の Hodge 構造を対応させる周期写像を考える. 周期領域は L の階数分だけ次元が下がる. 格子 E_7 に対しては次が成立することに注意しよう.

1. E_7 の $I_{2,10}$ への埋込は一意的である.
2. 埋込 $E_7 \hookrightarrow I_{2,10}$ の直交補格子 M (上より一意的に定まる) は $\text{diag}[1, 1, -1, -1, -2]$ を内積行列とする階数5の格子である.

3. 制限写像 $O(I_{2,10}, E_7) \rightarrow O(\mathbb{Z}, \text{diag}[1, 1, -1, -1, -2])$ は全射である.

これらと上の Torelli 型定理より周期写像

$$\{E_7\text{-型 Enriques 曲面}\}/E_7\text{同型} \rightarrow \tilde{D}^3/O(\mathbb{Z}, \text{diag}[1, 1, -1, -1, -2]) \quad (7)$$

は単射である.

次に、3次元 IV 型有界対称領域 D^3 ($\tilde{D}^3$ の連結成分) は 2 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_2 = \{\Im \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0\}$ と同型であることに注意する. 群作用も込めて詳しく見ることに
より、数論的商多様体の間の同型

$$\tilde{D}^3/O(\mathbb{Z}, \text{diag}[1, 1, -1, -1, -2]) \simeq \mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2) \quad (8)$$

を得る. ただし、 $\Gamma_0^*(2)$ はレベル 2 の合同部分群

$$\Gamma_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid C \equiv 0 \pmod{2} \right\} \subset Sp(4, \mathbb{Z}) \quad (9)$$

に Fricke 元 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ 2I_2 & 0 \end{pmatrix}$ を付加して指数 2 の拡大をしたものである.

数論的商多様体 $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$, $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2)$ は PEL 構造付 Abel 多様体のモジュライ空間である. 先ず、 $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$ は Göpel 部分群付主偏極 Abel 曲面 (A, L, G) のモジュライ空間である. ただし、主偏極 Abel 曲面 (A, L) の Göpel 部分群とは、2 分点よりなる位数 4 の部分群 $G \subset A$ で、2 等分点群上の Weil pairing $A_{(2)} \times A_{(2)} \rightarrow \mu_2$ の制限が零になっているものである. この条件は直線束 $L^{\otimes 2}$ が商 Abel 曲面 X/G 上の直線束 L' に descent することと同値である. よって、 $(A' := A/G, L')$ は再び主偏極 Abel 曲面である. また、 A の 2 等分点群 $A_{(2)}$ の $A \rightarrow A'$ による像 G' は (A', L') の Göpel 部分群である. $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2)$ は $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$ を Fricke 元の導く $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$ の対合 (Fricke 対合) で割ったものであるが、この対合は (A, L, G) を (A', L', G') をうつす.

主偏極 Abel 曲面 (A, L) は楕円曲線の直積ではないとしよう. このとき、 (A, L) は種数 2 の曲線 C の Jacobi 多様体 $\text{Jac } C$ と同型である. C は 6 点を分岐とする $\mathbb{P}^1$ の 2 重被覆 $y^2 = f_6(x)$ と表される. Göpel 部分群 G を選ぶことは分岐の 6 点を 3 個の対に分けることと対応するので、 (C, G) の定義式は 3 つの 2 次式 g_1, g_2, g_3 を用いて $y^2 = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$ と表わされる. ただし、 $g_i(x) = 0$ の零点を q_i, r_i (Weierstrass 点) とするとき、 $q_i + r_i - K_C$ が G の非零元を与える.

§3 主結果

まず 4 次曲面 (1) を使う形を述べ、その後で改良を説明する.

定理 2 Enriques 曲面 S は E_7 型であるが、 E_8 型でも $(E_7 + A_1)$ 型でもないとする⁴. S の周期に (7) と (8) でもって対応する Göpel 部分群付主偏極 Abel 曲面を (A, L, G) とする. (A, L) は種数 2 の完備非特異代数曲線 C の Jacobi 多様体 $\text{Jac } C$ と (偏極を込めて) 同型で、 G に対応する C の表示を $y^2 = g_1(x)g_2(x)g_3(x)$ とする. このとき、 S は

$$\begin{aligned} A_1 &= D(g_1)R(g_2, g_3), \quad A_2 = D(g_2)R(g_1, g_3), \quad A_3 = D(g_3)R(g_1, g_2), \\ D &= \{\det(g_1, g_2, g_3)\}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

を係数とする 4 次曲面 (1) の極小特異点解消 $X = X_{(A:B:C:D)}$ の対合 ε による商と同型である. ただし、 $D(g_i)$ は 2 次式の判別式、 $R(g_i, g_j)$ は 2 次式対の終結式である. また、 (g_1, g_2, g_3) は 2 次式 g_1, g_2, g_3 の係数を並べて得られる 3 次正方行列である.

注意 3 対応する主偏極 Abel 曲面 (A, L) が (偏極も込めて) 二つの楕円曲線の直積と同型になるとき、Enriques 曲面は E_8 型になる.

この定理で除外されている E_8 型や $(E_7 + A_1)$ 型の全体は E_7 型全体 (モジュライ) の中で、余次元 1 の部分族をなす. $E_8, (E_7 + A_1)$ 型にも有効な形に定理を改良することができる. そのために、 $A_1A_2A_3 \neq 0$ と仮定して、射影平面 $\mathbb{P}_{(x:y:z)}^2$ の 2 重被覆

$$\tau^2 = xyz\{(A_1xt + A_2yt + A_3zt)(yz + xz + xy) + Dxyz\} \quad (11)$$

を考えよう. 分岐は座標 3 角形 $xyz = 0$ と 3 頂点を通る 3 次曲線

$$(A_1xt + A_2yt + A_3zt)(yz + xz + xy) + Dxyz = 0 \quad (12)$$

の和である. (ただし、 $D = 0$ のとき、上の 3 次曲線は可約.) この 3 次曲線は $\mathbb{P}^2$ の Cremona 変換 $(x : y : z) \mapsto (1/(A_1x) : 1/(A_2x) : 1/(A_3x))$ で不変であるので、2 重平面 (11) は Cremona 変換の持ち上げ

$$(x : y : z : \tau) \mapsto \left(\frac{1}{A_1x} : \frac{1}{A_2y} : \frac{1}{A_3z} : \frac{-\tau}{A_1A_2A_3xyz} \right) \quad (13)$$

で保たれ、極小特異点解消 $X = X_{(A_1:A_2:A_3:D)}$ に対合 ε が誘導される. (4) が成立しないとき、 ε は固定点をもたず、Enriques 曲面 $S = X/\varepsilon$ が得られる.

$D \neq 0$ のとき、(11) は 4 次曲面 (1) の双有理同値類を点 (0001) からの射影でもって 2 重平面表示したものに他ならない. よって、(11) は (1) と共通の特異点解消 $X = X_{(A_1:A_2:A_3:D)}$ をもつ. しかし、族 (11) は $D = 0$ でも Enriques 曲面が得られる点で族 (1) より優れている. $D = 0$ のとき、Enriques 曲面 S は $(E_7 + A_1)$ 型である.

⁴正確には over lattice の情報 (この場合は E_8) も込めて「 $(E_7 + A_1)^+$ 型」と言うべきであるが、記述を煩雑にしないために略した.

注意 4 この $(E_7 + A_1)$ 型は数値的に自明な対合 (numerically trivial involution) の分類の一環として拙著 [9] で研究された. 実際、被覆の 2 枚のシートを入換える対合 $\tau \mapsto -\tau$ は S の有理係数コホモロジー群 $H^2(S, \mathbb{Q})$ に自明に作用する.

注意 5 $D \neq 0$ のときの (11) ((1) と言っても同じ) の対合 $\tau \mapsto -\tau$ は S の整係数コホモロジー群 $H^2(S, \mathbb{Z})$ に鏡映として作用する. $H^2(S, \mathbb{Q})$ に鏡映として作用する対合は数値的に鏡映 (numerically reflective) と呼ばれ、拙著 [10] で研究された. そこで構成された Hutchinson-Göpel 型のものと、この E_7 型でもって、Enriques 曲面の数値的に鏡映な対合は尽きる.

まだ、2 重射影平面 (11) では E_8 型が抜けている. これを含めるために、楕円 K3 曲面

$$\tau^2 = u^3 + \{(t^2 - p_1)^2 - p_2\}u^2 + (p_4 - 2p_3t^2)u \quad (14)$$

を考察する. ただし、 t は底射影直線 $\mathbb{P}^1$ の非斉次座標、 τ, u は fiber 座標である. $(\tau, u) = (\infty, \infty)$ を 0 切断とみなす. $(\tau, u) = (0, 0)$ はこれと疎な切断で、2-torsion になっている. 極小非特異化は $t = \infty$ において可約 fiber をもつが、それは $p_3 \neq 0$ のとき I_{12} 型 (12 角形)、 $p_3 = 0$ のとき I_{16} 型である. また、対合

$$(\tau, u, t) \mapsto \left(-\frac{(p_4 - 2p_3t^2)\tau}{u^2}, \frac{p_4 - 2p_3t^2}{u}, -t \right) \quad (15)$$

が作用し、(4) が成立しないとき固定点をもたない. よって、商として楕円 Enriques 曲面がえられる. (これは $p_3 = 0$ の場合に Barth-Peters[2] によって研究された.)

さて、 $\mathbb{P}^2$ において座標 3 角形 $xyz = 0$ と可約 3 次曲線 $(A_1xt + A_2yt + A_3zt)(yz + xz + xy) = 0$ で生成される 1 次元線形系 (pencil) を考える. これは K3 曲面 (11) の楕円 fibration を誘導する. この fibration は切断と 2-torsion 切断をもつので、それらを使って、標準型を求めると (14) の形になる. 次は、Kumar[7] の Enriques 版ともみなせる. (E_8 型に制限したものは Inose[6] や Clingher-Doran[4] の Enriques 版になっている.)

定理 3 S は E_7 型 Enriques 曲面とする. S の周期に対応する Göpel 部分群付主偏極 Abel 曲面 (A, L, G) より数 p_1, p_2, p_3, p_4 が定まり、 S は楕円 K3 曲面 (14) を対合 (15) で割ったものと同型である. S が E_8 型でないのは $p_3 \neq 0$ と同値で、このとき、4 個の係数は

$$p_1 = (A_1 + A_2 + A_3 - D)/2, \quad p_2 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3, \quad p_3 = A_1A_2A_3, \\ p_4 = A_1A_2A_3D$$

で与えられる.

係数 p_1, p_2, p_3, p_4 は $\mathfrak{H}_2/\Gamma_0^*(2)$ 上の重み $2, 4, 6, 8$ の保型形式になっていて、保型形式環の偶数次部分を生成していることが面白い. ($\mathfrak{H}_2/\Gamma_0(2)$ では重み $2, 4, 4, 6$ の保型形式で生成されている (Ibukiyama[5, §6]).)

注意 6 E_7 型の Enriques 曲面のモジュライは荷重射影空間 $\mathbb{P}(1 : 2 : 3 : 4)$ (佐武コンパクト化) から (4) に対応する因子 (Humbert 曲面) を除いた部分である.

参考文献

- [1] Allcock, D.: The period lattice for Enriques surfaces, Math. Ann. **317**(2000), 483–488.
- [2] Barth, W. and Peters, C.: Automorphisms of Enriques surfaces, Invent. math. **73**(1983), 383–411.
- [3] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. Van de: *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, 1984.
- [4] Clingher, A. and Doran, C.F.: Modular invariants for lattice polarized K3 surfaces, Michigan Math. J. **55**(2007), 355–393.
- [5] Ibukiyama, T.: On Siegel modular varieties of level 3, Int. J. Math. **2**(1991), 17–35.
- [6] Inose, H.: Defining equations of singular K3 surfaces and a notion of isogeny, Proc. of the Int. Symp. on Alg. Geom., Kinokuniya, Tokyo, 1978, pp. 495–502.
- [7] Kumar, A.: K3 surfaces associated to curves of genus two, Int. Math. Res. Notes, 2008, Art. ID rnm165, 26 pp.
- [8] Laszlo, Y. and Pauly, C.: The action of the Frobenius map on rank 2 vector bundles in characteristic 2, J. Alg. Geom. **11**(2002), 219–243.
- [9] Mukai, S. : Numerically trivial involutions (of Kummer type) of Enriques surfaces, preprint, RIMS Kyoto University, #1544, to appear in Kyoto Math. J..
- [10] Mukai, S.: Kummer’s quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, RIMS preprint #1633, 2008, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [11] Nikulin, V.V.: On the description of the groups of automorphisms of Enriques surfaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **277**(1984), 1324–1327, (in Russian).

Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University
Kyoto 606-8502, Japan
e-mail address : mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp