

物理学と幾何学

—自然の幾何学的な理解に向けて—

植田 一石

幾何学 (geometry) という言葉が「地球を測る」という意味のギリシャ語から来ていることから分かるように、はるかな昔から、物理学と幾何学は分かち難く結びついていました。その結びつきは形を変えながら脈々と受け継がれ、今ではかつて無いくらい強固なものになっています。ここでは 20 世紀における物理学の進歩と今後の展望について、主に幾何学の立場から述べたいと思います。

1 究極の理論を求めて

Daß ich erkenne, was die Welt
Im Innersten zusammenhält,
Schau' alle Wirkenskraft und Samen,
Und thu' nicht mehr in Worten kramen.

Johann Wolfgang von Goethe, *Faust*

一体この世界を奥の奥で統べているのは何か。それが知りたい。
そこで働いている一切の力、一切の種子は何か。それが見たい。
それを知って、それを見たら、無用の舌を弄せないでも済もうと思ったのだ。

森鷗外訳

分子は、物質がその性質を保ったまま分けられる最小単位であるとしばしば言われます。(実際には、分子がどのように配置して物質を構成するかに依って物質の性質は大きく変わります。) 例えば、水は透明な液体ですが、1 リットルの水はおよそ 2^{85} 個の水分子から構成されているので、1 リットルの水を半分に分けて、その半分をさらに半分に分けて、という操作は 85 回程度しか繰り返すことは出来ず、これ以上分けようとする、もはや水ではなくなってしまいます。水分子の大きさは、定義にも依りますが 10^{-10} m 程度です。

良く知られているように、水は 1 つの酸素原子と 2 つの水素原子からなります。酸素原子や水素原子の大きさも水分子と同じオーダーです。原子はもともとこれ以上分割できない基本粒子として考案されましたが、時代と共にその個数は増える一方で、19 世紀半ばには 50 を越えました。基本粒子や基本法則 (より正確には、理論に含まれる任意パラメーター) の数が多いほど理論の予言能力は低くなるので、これは大変に不満なことです。

この明らかに多すぎる原子を整理するべく、様々な試みが行われました。中でも最大の成功を取めたのが 1869 年の Mendelejev による周期表で、当初は懐疑の目で見られましたが、空欄を埋める新元素が続々と発見されたことで、高く評価されるようになりました。

周期表の存在は、原子が分割不能な基本粒子でなく、内部構造を持つ複合粒子であることを強く示唆します。これは 1897 年の Thomson による電子の発見により強化され、1911 年の Rutherford 散乱の発見によって決定的になります。Rutherford はラジウムから出る α 線を金箔に当てることで、金原子の内部構造を見ようとしたのですが、その結果は驚くべきものでした。Rutherford 自身は後にこう振り返っています：“It was quite the most incredible event that ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you.” これによって原子は、高々 10^{-14}m 程度の大きさしか無いが、原子の質量の大部分を担う原子核を中心に持ち、その周りを水素原子の 2000 分の 1 程度の重さしかない電子が回っていると考えられました。つまり、原子はある意味で殆ど「空っぽ」なのです。

でも、もし地球が太陽の周りを回るように電子が原子核の周りを回っているとしたら、輻射によって急速にエネルギーを失い、原子は安定ではられません。このように物理学者は、日常的なスケールで世界を支配している法則では原子の振る舞いを説明できないことに気づき、戸惑い始めます。その嚆矢は黒体輻射の問題であり、それを解決するために光量子仮説が世紀の変わり目に Planck によって提出されました。1913 年に Bohr は Planck の量子仮説を水素原子に適用して、スペクトルを正しく予言するとともに、周期表の理論的な基礎を与えました。この Bohr の原子模型を水素以外の原子に拡張する努力が行われ、Heisenberg による行列力学と、Schrödinger による波動力学に結実しました。これらは Dirac によって統合され、量子力学の基礎が確立することになります。その成果は¹⁾に纏められ、後に続く者に大きな影響を与えました。

量子力学は極微の世界で自然を支配する法則ですが、日常のスケールでの物理とも密接に関係します。全ての化学反応は(従って、それに由来する生命活動なども)量子力学を抜きにしては根源的な理解をすることはできません(現象論的な記述はしばしば可能です)。また、超電導や超流動のように、量子力学的な効果を日常のスケールで観察できる現象もあります。そもそも、我々を構成する原子や分子が安定して存在すること自体が、量子力学の直接の帰結なのです。

2 神の符

War es ein Gott der diese Zeichen schreib?

Johann Wolfgang von Goethe, *Faust*

この符を書いたのは神ではあるまいか。

森鷗外訳

上の「ファウスト」からの一節は、Boltzmann が Maxwell 方程式を形容するのに使ったことでよく知られています。Maxwell 方程式は次の 4 つからなります：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \mathbf{B} = 0 & \text{磁場に対する Gauss の法則} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{Faraday の法則} \\ \text{div } \mathbf{E} = \rho & \text{電場に対する Gauss の法則} \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{Ampère-Maxwell の法則} \end{array} \right.$$

¹⁾ P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford University Press, 1930.

電場に対する Gauss の法則は Coulomb の法則の拡張であり、電荷がいかんして電場を作るかを記述しています。電荷については正電荷と負電荷が独立に存在し得ますが、磁荷については必ず N 極と S 極が対になって存在し、磁気単極子はこれまでのところ見つかりません。この事実を記述するのが磁場に対する Gauss の法則です。Faraday の法則は磁場の変化が電場を生むといういわゆる電磁誘導 (electromagnetic induction) を記述しています²⁾。電流が磁場を生むことは Ørsted によって発見され、Ampère によって彼の名を関して呼ばれる法則 $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}$ に纏められました。しかし、この Ampère の法則には電荷の保存則 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ と両立しないという深刻な困難がありました。変位電流 (displacement current) $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ を導入することによってこの困難を克服し、電磁気学の基礎方程式を完成させたのが Maxwell です。

原子や素粒子の世界は古典力学とは異なった法則に従っていますが、実は極微の世界だけでなく、極めて大きなスケール (光速に近い早さで運動する物体や、非常に重い天体の周りなど) でも、古典力学 (より正確には、Newton 力学) は正しくありません。正しい理論は特殊及び一般相対論と呼ばれ、Newton 力学が Maxwell 方程式と相容れないという致命的な欠陥を克服する過程で生まれました。この理論の建設は量子力学の黎明と時を同じくしていますが、大勢の物理学者の貢献が複雑に絡み合っている量子力学と異なり、本質的に一人の物理学者によってなされました。この理論について、数学の立場から簡単に復習しましょう。

出発点は、Maxwell 方程式を 4次元時空の観点から書き直すことです。電場と磁場を合わせて Faraday テンソル

$$(F_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と呼ばれる 2階の反対称テンソルを作ると、4つの Maxwell 方程式のうち、磁場に対する Gauss の法則と Faraday の法則は

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (2)$$

と表されます。また、電場に対する Gauss の法則と Ampère-Maxwell の法則は、4元電流密度 $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ を用いて

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = j^\nu \quad (3)$$

と表されます。但し、添字の上げ下げは Minkowski 計量

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0, \\ -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (4)$$

²⁾電磁誘導は変圧器の作動原理ですが、査読者を変圧器の高圧側に繋いで、証明が正しいと「納得」するまで電流を流すことを“proof by induction”と言うそうです。

を用いて行います;

$$F^{\mu\nu} = \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\sigma=0}^3 \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (5)$$

(2) と (3) は十分に美しいですが, 微分形式を用いれば更に簡潔に書くことが出来ます.³⁾ Faraday テンソルに対応する 2 次微分形式を

$$F = \sum_{0 \leq \mu < \nu \leq 3} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (6)$$

と書くと, Maxwell 方程式の最初の 2 つは F の外微分が消えることを表します;

$$dF = 0. \quad (7)$$

4 元電流密度に対応する微分形式を $j = \sum_{\mu=0}^3 j_\mu dx^\mu$ とおくと, Maxwell 方程式の残りの 2 つは

$$d^*F = j \quad (8)$$

と表されます. ここで d^* は Minkowski 内積に関する外微分作用素の随伴作用素であり, Hodge の $*$ 作用素を用いて $d^*F = *(d(*F))$ で定義されます.

Maxwell 方程式のより深い理解は作用原理を考えることによって得られます. Maxwell 方程式の最初の 2 つは, Faraday テンソルが (少なくとも局所的には) 適当な 1 次微分形式 A を用いて $F = dA$ と書けることを主張している事に注意すると, 点粒子と電磁場の相互作用 (interaction) を表す作用汎関数として考えられる最も単純なものは, この A を粒子の軌跡に沿って積分したもので与えられます;

$$S_{\text{int}} = e \int A. \quad (9)$$

ここで e は粒子と電磁場の相互作用の強さを与えるパラメーターであり, その粒子の電荷 (electric charge) と呼ばれます. 粒子の位置と速度を \mathbf{x}_0 及び \mathbf{v}_0 とおき, Dirac の δ 関数を用いて 4 元電流密度を $j^\mu = (e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), e\mathbf{v}_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ で定義すると, 作用密度は $\mathcal{S}_{\text{int}} = \sum_{\mu=0}^4 j^\mu A_\mu$ で与えられます.⁴⁾ Maxwell 方程式を導くには, 相互作用の作用汎関数に加えて電磁場の作用汎関数が必要です. 2 次微分形式 F に対する汎関数で最も単純なものは, Minkowski 計量に関する L^2 ノルムの 2 乗

$$\|F\|_{L^2}^2 = \int F \wedge (*F) \quad (10)$$

です. これと S_{int} の和を取って A の変分に関する Euler-Lagrange 方程式を書くと, Maxwell 方程式の残りの 2 つが得られる事が容易に確かめられます.

³⁾ 微分形式は完全反対称テンソルの速記法なのでした.

⁴⁾ より一般には, 物質と電磁場が相互作用している時, 相互作用の作用密度を $\mathcal{S}_{\text{int}} = \sum_{\mu=0}^4 j^\mu A_\mu$ と書いた時の j^μ を 4 元電流密度と定義します.

電磁気の法則が4次元時空の言葉でこのように簡明に記述されるなら、力学の法則も同じ言葉で簡明に記述されるべきです。質点の運動に対する汎関数として考えられ得る最も簡単なものは、その Minkowski 計量に関する長さ

$$\int ds = \int \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \int \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt \quad (11)$$

です。これを Newton 力学における質点の作用

$$S_{\text{Newton}} = \int \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 dt \quad (12)$$

と比較する事によって、相対論における質点の作用が

$$S = -m \int ds = -m \int \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt = \int \left(-m + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \dots \right) dt \quad (13)$$

であるべきだという結論が導かれます。従って、相対論的な質点の Lagrange 関数は

$$L = -m \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \quad (14)$$

であり、これを Legendre 変換することによって相対論的な質点の運動量及び Hamilton 関数(あるいはエネルギー)は

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (15)$$

及び

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (16)$$

で与えられる事が分かります。

電磁場に対する更に深い理解は、電磁場がゲージ場であるという認識によって得られます。電磁ポテンシャル A は時空上の主 $U(1)$ 束の接続を与えており、 F はその曲率です。電磁場と物質の相互作用は、物質の運動を記述している作用汎関数において、全ての微分を接続 A に関する共変微分に置き換えることで得られます。Maxwell 方程式の始めの2つは Bianchi の恒等式であり、残りの2つのみが真に意味を持ちます。これを非可換群に拡張したのが非可換ゲージ理論です。

では、重力はどうでしょうか。Newton 力学における重力は無限大の伝播速度を持っているので、明らかに特殊相対論と相容れません。重力の相対論を建設するという難問は、重力場が計量であるという驚異的な洞察によって解かれました。計量を用いて構成される最も簡単な汎関数は、スカラー曲率 R と宇宙定数 (cosmological constant) Λ を体積要素 $d \text{vol} = \sqrt{-\det(g)} d^4x$ で積分して得られる Einstein-Hilbert 作用

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) d \text{vol} \quad (17)$$

であり、これと重力以外の場の作用の和を計量に関して変分することにより、Einstein 方程式

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi G T_{ij} \quad (18)$$

が得られます。ここで G はNewtonの重力定数です。これが一般相対論であり、「あらゆる既存の物理学理論のなかで、おそらくもっとも美しい理論である。さらに注目すべきは、それがアインシュタインによって純粋に演繹的なやり方で建設され、のちになって初めて天文学的観測による確証を得たということである。」⁵⁾ これは物理学の幾何学化であり、これを学んだものは誰もが、「他のすべての場を重力のように見せたいという誘惑に強くかられる。」⁶⁾ Einstein自身もこの誘惑には抵抗できず、後半生を統一場理論の建設に捧げました。

カルテクにあるFeynmanの研究室の黒板の隅には“*What I cannot create, I do not understand.*”と書かれていました。この哲学に沿って彼は、場の量子論を持つが一般相対論を持たない金星人が初めて重力を観測した時に、如何にして重力の理論を建設するかを議論しました。重力を媒介する粒子を重力子と呼ぶことにすると、まず、静的な力を媒介するためには重力子は整数スピンを持たなければなりません。スピン0の粒子は光子と結合できず、光が重力場によって曲げられるという事実と矛盾します。スピン1の粒子は引力と斥力の両方を生じるので、重力が常に引力として働くという事実と反します。従って、実験で排除されない最も単純な選択肢はスピン2の粒子です。重力が長距離力なので、重力子の質量は0でなければなりません。スピンの2で質量が0の粒子の理論は必然的に一般相対論でなければならず、従って幾何学的解釈を持つという議論が、[Feyn]の前半のハイライトです。

Einsteinによって達成された重力の幾何学的理解に対するFeynmanの感情には複雑なものがあつたようです。「理論物理学における最大の成果だと言われているアインシュタインの重力理論は、重力現象と時空の幾何を結び付ける美しい関係を導いた。これは画期的なアイデアであつた。どんな子供でも理解できる、たとえば逆二乗則などの電気力と重力との見掛け上の類似性は、すべての子供たちに、大人になったら、電磁気を幾何学化する方法を発見しようと夢を見させた。そしてある世代の物理学者たちは、重力と電磁気を一つのものに統一しようという、いわゆる統一場の理論を作ろうと努力をした。統一場の理論はどれも、成功しなかった。この講義ではこれらの理論については議論しない。大部分は、物理の知識はほとんど無い数学志向の人々によって発明された数学的なゲームであり、理解不可能である。」[Feyn,§1.1] 「金星の科学者は重力の場の理論を完成させた後で、結局は幾何学的見方を見つけただろうとも考えられる。しかし確信はもてない」「いずれにしろ現実には、スピン2の場はこの幾何学的意味をもっている。これは、簡単には説明できない驚くべきことである。幾何学的解釈は、物理にとって実際には必要ではなく、本質的なことでもない。」[Feyn,§8.4]

3 標準模型

量子論と相対論は共に20世紀初頭を代表する大きな発展ですが、この2つは相性が悪い事でも有名です。特殊相対論的量子力学は必然的に場の量子論になりますが、その黎明期から無限大の問題に付きまとわれており、現在までの大きな進歩にも関わらず、その数学的基礎に関しては未だに成すべき事が山積しています。一方、一般相対論的量子力学は重力の量子論であり、理論家の見果てぬ夢です。弦理論はその夢の続きなのですが、その話をする前に、素粒子の探求の話に戻しましょう。原子は原子核と電子からなりますが、原子核の種類は原子と同じ

⁵⁾ ランダウ、リフシッツ著、恒藤敏彦、広重徹訳、場の古典論、東京図書、1978年、§82

⁶⁾ ファインマン、モリニーゴ、ワーグナー著、ハットフィールド編、和田純夫訳、ファインマン講義 重力の理論、岩波書店、1999年(以下[Feyn]と略)、§7.1.

だけあるので、原子核が内部構造を持っていなければ、状況は改善されません。原子核が内部構造を持つ最初の証拠はやはり Rutherford によってもたらされました。彼は 1919 年に α 粒子と窒素を衝突させると水素原子ができる事を報告しましたが、これは元素の転換が可能であることを最初に示した画期的な発見であり、錬金術における長年の夢が遂に実現した瞬間でもありました。これは $^{14}\text{N} + \alpha \rightarrow ^{17}\text{O} + p$ という核反応であり、一般には陽子の発見と呼ばれています。翌 1920 年に Rutherford は、原子核は陽子と、陽子とよく似た性質を持つが電氣的に中性な粒子からなるという説を提出しました。この新粒子の存在は 1932 年に Chadwick によって確立され、中性子と名付けられました。

Rutherford は 1920 年の時点では中性子は陽子と電子からなる複合粒子かも知れないと考えていました。その根拠の 1 つは、原子核が β 線 (高エネルギーの電子) を放出して原子番号が 1 つ大きな原子に変わる β 崩壊の存在です。さらに、1928 年には Dirac が彼の名を冠して呼ばれる電子の相対論的運動方程式を提唱し、それに続いて真空を満たす Dirac の海と、その上の空孔としての陽電子の概念が導入されました。Dirac は当初陽電子を陽子であると考えていました。もし陽子が電子の反粒子であり、中性子が陽子と電子の束縛状態であったならば、全ての原子は本質的にはたった 1 つの素粒子で説明できることになります。

陽子を陽電子と同定する魅力的なアイデアは、陽電子が電子と同じ質量を持たねばならないことや、中性子は陽子や電子と同様にスピン 1/2 を持つので、中性子は陽子と電子の束縛状態ではあり得ない (偶数個の半整数スピンの粒子の束縛状態は必ず整数スピンを持つ) ことから否定されました。そして、1932 年に Anderson は宇宙線の中から陽電子を発見します。

β 崩壊には、エネルギーが保存されていないように見えるという顕著な特徴があります。Bohr は、原子核のスケール (すなわち、原子の 1 万分の 1 程度のスケール) ではエネルギー保存則は破れているという過激な主張をしました。一方、Pauli は 1930 年に、このエネルギー分布は通常の方法では観測できない未知の新粒子によってエネルギーが持ち去られていると仮定することで説明できると指摘しました。Pauli の新粒子は中性微子 (ニュートリノ) と名付けられましたが、他の物質と殆ど相互作用しないこの粒子の検出は困難を極め、1956 年ようやく確定されました。 β 崩壊を引き起こす力は弱い力と呼ばれます。

原子核は陽子と中性子からなりますが、陽子と陽子の間には、大きな電氣的斥力が働くはずであり、これを原子の 1 万分の 1 という小さなスケールに押し込めておくには、陽子や中性子の間に強い引力が働いている必要があります。湯川秀樹は 1934 年に中間子と呼ばれる新粒子を導入して、この強い力のモデルを作りました。Anderson と Neddermeyer は 1936 年に宇宙線の中から湯川の予言通りの重さを持った新粒子を見つけましたが、この粒子は強い相互作用を持ちませんでした。湯川の中間子は 1947 年に宇宙線の中から発見され、その結果として湯川は 1949 年に Nobel 賞を受賞しました。一方、Anderson と Neddermeyer の新粒子はミューオンと名付けられましたが、その存在そのものが大きな謎でした。核磁気共鳴の研究で 1944 年に Nobel 賞を受賞した Rabi は、ミューオン発見の報に接して “Who ordered that?” と言ったと伝えられています。

この Rabi の問いの機微を味わうには、ミューオンが見つかるまでは、物質を構成する基本粒子としては陽子、中性子および電子のみが存在を確認されていて、ここに Pauli による仮説的なニュートリノが加わる程度だった事に注意しなければなりません。また、力を媒介する粒子としては電磁氣力を媒介する光子のみがあつて、ここに強い力を媒介する湯川の中間子が加わるかどうかというところでした。わずかな数の基本粒子で知られている現象が全て記述できるなら、誰が新しい粒子を欲しがるでしょうか。

陽子や中性子のような強い相互作用をする粒子はハドロンと呼ばれますが、時代が下って新粒子を宇宙線の中からではなく加速器を用いて探すようになると、次々と新しいハドロンが見つかり、やがてその数は原子を超えるまでになりました。自然が基本的なレベルでそこまで複雑であるというのは理論家にとっては到底容認出来ないことで、様々な解決策が提案されましたが、最終的に広く受け入れられるようになったのがいわゆる素粒子論の標準模型 (standard model) です。それによると、素粒子は3つの世代をなし、それぞれの世代は2つのレプトンと2つのクォークからなります。第1世代に属するレプトンは電子と電子ニュートリノであり、それに加えて第2世代にはミューオンとミューニュートリノ、第3世代にはタウオンとタウニュートリノがいます。第1世代に属するクォークはアップとダウンであり、これに加えて第2世代にはストレンジとチャーム、第3世代にはトップとボトムがいます。ハドロンのうち、陽子や中性子などは3つのクォークから成り、中間子は2つのクォークから成ります。弱い力と電磁気力は統一されて、 $SU(2) \times U(1)$ を構造群とするゲージ理論で記述されますが、これを電弱理論 (electroweak theory) と呼びます。また、強い力は $SU(3)$ を構造群とするゲージ理論で記述されますが、これを量子色力学 (quantum chromodynamics) と呼びます。さらに、電弱相互作用におけるゲージ対称性を自発的に破るために Higgs ボゾンと呼ばれるスピン0の粒子が必要であり、その存在は2012年に実験的に確認されました。

4 弦理論

標準模型は実験と極めてよく一致する素晴らしい模型であって、人類の到達点を示していますが、理論家にとっては様々な点で不満足なものです。その最大の理由は、最も高貴な力である重力について何も言わないことです。重力の量子論こそは20世紀の素粒子物理学が残した最大の課題であり、宇宙創成やブラックホールを含む時空の幾何学を人類が理解するための鍵です。また、別の不満としては、理論が連続、離散を問わず多くの任意パラメーターを持つことがあります。連続的なパラメーターの例としては微細構造定数 α があります。これが $1/137$ でなければ宇宙は随分と違ったものになりますが、標準模型においては α がこの値であるための必然性はどこにもありません (もちろん、人間性原理 (知的生命体の生存が可能な宇宙のみが観測される) に訴えることは可能です)。一方、離散的なパラメーターの例としてはゲージ群の選択や世代の数があります。我々に馴染みの深い電子や陽子、中性子などは全て第1世代に属し、他の世代が存在することの必然性は人間性原理を用いても説明できません。

これらの不満に応えるべく様々な解決策が模索されました。弦理論はその候補の1つです。⁷⁾ これはもともと失敗した強い相互作用の現象論として生まれ、1980年代半ばに起きたいわゆる超弦理論の第一革命 (first superstring revolution) によって、森羅万象の理論 (theory of everything) の候補として一部の人々から熱い眼差しを受けるようになりました。場の量子論と比較した時の弦理論の特徴は、整合性を壊さずに理論を弄ることの難しさにあります。例えば、ボゾンの弦理論が持つ、タキオン (超光速粒子) の存在とフェルミオンの非存在という2つの問題は、超対称性を導入することによって同時に解決されます。また、古典論の対称性が量子化で壊れることをアノマリー (anomaly, 量子異常) と呼びます。古典論の対称性は作用

⁷⁾ 弦理論の標準的な教科書としては、Michael B. Green, John H. Schwarz, Edward Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, 1988 や Joseph Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press, 1998 があります。

汎関数の対称性ですが、それが量子化で保たれるためには、作用汎関数に加えて経路積分の測度もその対称性に関して不変でなければなりません。経路積分の測度のうち、Laplace 作用素の 0 固有値から来るもののみがアノマリーに寄与することから、アノマリーは指数定理と深い関係があります。アノマリーは望ましいこともあれば望ましくないこともあります。特に、理論の整合性のためにはゲージ対称性のアノマリーは必ずキャンセルしなければなりません。電弱理論においては、これはクォークとレプトンの数が等しいことを要求します。超弦理論の共形アノマリーは時空の次元を 10 次元にすることで回避できます。また、I 型超弦理論のアノマリーは、ゲージ群を $SO(32)$ にすることによって打ち消すことができます。つまり、時空の次元やゲージ群は理論の無矛盾性から一意的に決まってしまうのです。

弦理論における最大の謎は果たしてこの理論が本当に存在するか(つまり、内部に矛盾を持たないか)です。無矛盾性のために必要な条件は非常に強いので、それらが全て満たされるためには「奇跡」がたくさん起こる必要があります。しかし、知られている限りで必要な奇跡は全て実際に起こり、弦理論の存在を信じる根拠の一つになっています。

超弦理論の第一革命によって、弦理論は全部で 5 つ存在して、これらは全て無矛盾であり、しかも 10 次元の超対称性を持つ重力の量子論を与えると考えられるようになりました。そして、1990 年代半ばに起きた超弦理論の第二革命によって、超弦理論はそれまでとは比較にならない幅と奥行きを獲得します。その結果として、弦理論には弦だけでなく、NS5 ブレーンや D ブレーンのような様々な次元の広がった対象が存在し、5 つの超弦理論は M 理論と呼ばれる 11 次元の理論の異なる極限であると信じられるようになりました。この革命のキーワードは超対称性と双対性です。⁸⁾

超対称性 (supersymmetry) はボゾンとフェルミオンを入れ替える対称性であり、これを理論に課するのは、関数が単に滑らかなだけでなく正則であることを要求するのに似ています。ボゾン (boson) は Bose-Einstein 統計に従う粒子を指し、スピンと統計の関係によって、必ず整数スピンを持ちます。光子や π 中間子、重力子などの力を媒介する粒子はボゾンです。一方、フェルミオン (fermion) は Fermi-Dirac 統計に従う粒子を指し、スピンと統計の関係によって、必ず半整数スピンを持ちます。電子や陽子、中性子などの物質を構成する基本粒子はフェルミオンです。この意味で、超対称性は力と物質を入れ替える対称性であるとも言えます。自然界に超対称性が存在するならば、全ての粒子に対してその超対称なパートナーが存在しなければなりません。これまでのところ実験で見つかってはいません。このことを指して、超対称性は「問題を探している解答」だと言われることもあります。もし仮に超対称性が実験で見つかれば、純粋に理論的な美しさを追求した結果が自然界で実際に採用されている新しい例になるでしょう。

一方、双対性 (duality) は見掛けの異なる 2 つの理論が実は同一の理論の異なる記述を与えていることを指します。一般に双対な理論の間では問題の難しさが保存されないので、双対な理論の組を見つけることができれば、これによって双方の理論の理解が深まるだけでなく、問題に応じて双対な記述の一方を使うことによって他方では解けそうもない問題に対して大きな進歩をもたらすことができます。これはちょうど Fourier 変換によって微分方程式という難しい問題を代数方程式というより易しい問題に変換できるのに似ています。弦理論に新たに加わったさまざまなブレーンたちによってもたらされる自由度は、双対性の成立にとって本質的です。これらのブレーンの力学の研究は、Calabi-Yau 多様体 (すなわち、Ricci 曲率が

⁸⁾ 超対称性は超弦理論の第一革命のキーワードでもありました。

零の Kähler 多様体) やその部分多様体の上の正則ベクトル束 (これは小林-Hitchin 対応によって Hermite Yang-Mills 接続に対応する) のモジュライ空間やその量子化と密接に関係しており、現代の幾何学に魅力的な問題を提供し続けています。

5 幾何学の帝国

「物理学帝国主義」という言葉は誰が言い始めたのか分かりませんが、少なくともスペインの哲学者オルテガが 1930 年頃には使っていたようです。朝永振一郎⁹⁾によるこの言葉の解釈は「数学の形で自然現象をごく少数の法則にすっきりまとめ上げてしまう、こういうことを物理学がやってのけたわけです。そしてどんどんその領土をひろげていった」というものです。¹⁰⁾ これは人口に膾炙する「大学では生物は化学に、化学は物理に、物理は数学になる」という言葉とも関係します。

一方、中島啓は「幾何学者の中には、すべての現象は幾何学で説明されるべきである、という信念を持つ人たちがいて、筆者は**幾何学帝国主義者**と呼んでいる」「筆者は心ならずも、少なくとも自分に関係する分野については完全に幾何学帝国主義者なようである」と述べています。¹¹⁾ これは 2 節の最後で引用した Feynman の言葉とも関連します。

重力の量子論にまつわる困難は、我々の自然に対する理解が深いところで不完全であることを示しています。この不備を補い、自然の完全な記述を与える重力の量子論は、想像を遥かに越えるような美しい数学を使うに違いありません。そして、幾何学帝国主義者にとって、その数学は幾何学でなければなりません。

浮力に関する Archimedes の原理は紀元前 3 世紀に発見されましたが、19 世紀に証明された Gauss の発散定理によって初めて数学的に正しく理解されます。Witten は弦理論を「偶然にも 20 世紀に降ってきた 21 世紀の物理」と評していますが、これを記述するには一体何世紀の数学が必要なのでしょう。

⁹⁾朝永振一郎著作集 3, 「物理学の周辺」, みすず書房, 1977 年 3 月 15 日の講演

¹⁰⁾一方, フランス文学の研究者である桑原武夫はより世俗的な意味でこの言葉を使ったようです。朝永によると「物理学者があとからあとからいろんな新しい計画を立てちゃ, こういう研究所をつくりたいから予算をつけるように」「物理の連中があんまりうるさくそういうことを言い出すもんですから, まるで物理学帝国主義だと, 桑原さんが言ったんです。つまりどんどん自分の領地を広げていく, というわけですね。」

¹¹⁾サイエンス社の別冊数理科学 2010 年 4 月号「現代幾何学の発展」に収録されている「微分幾何学の未来」から, 太字は原文ママ