

ミラー対称性入門

植田一石

The name “complex group” formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word “complex” in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective “symplectic.” Dickson calls the group the “Abelian linear group” in homage to Abel who first studied it.

Hermann Weyl [Wey39, page 165]

複素幾何は代数幾何に起源を持つが、それが明確に代数幾何と分離したのは 20 世紀に入ってからであろう。^{*1} 一方、シンプレクティック幾何は Hamilton 形式の解析力学に起源を持つが、これが解析力学と明確に分離したのはやはり 20 世紀に入ってからであろう。

複素幾何とシンプレクティック幾何が自然に交わるのが Kähler 幾何である。^{*2} Moishezon の定理によって、完備な複素代数多様体が Kähler であれば射影的である。射影多様体は、複素幾何、代数幾何及びシンプレクティック幾何の全てにおいて、(異論はあるかも知れないが) 最も重要なクラスの例を与える。

シンプレクティックという単語はラテン語に起源を持つ complex という単語の古代ギリシャ語における翻訳借用 (calque) として Weyl によって作られた。複素幾何とシンプレクティック幾何は、その語源を超えた不思議な関係を持つことが 20 世紀の終わりに発見された。この関係はミラー対称性と呼ばれ、その発見には超弦理論が深く関わっている。

この講義では、複素多様体やシンプレクティック多様体の定義から初めて、ミラー対称性に属する様々な現象の中で最も弱い位相的ミラー対称性について入門的な解説を行う。^{*3} より強いホモロジー的ミラー対称性や Strominger–Yau–Zaslow 予想については、例えば [植] やその参考文献を見よ。

目次

1	複素多様体	2
2	シンプレクティック多様体	5
3	解析力学	8
4	性質と構造	9
5	G 構造の幾何学	10

^{*1} 複素トーラスや K3 曲面にも代数的ではないものがあるが、より顕著な例としては例えば VII 型曲面などが挙げられよう。

^{*2} 別の交わりとして、Hitchin による一般化された幾何学 (generalized geometry) がある。これはそもそもの始まりからミラー対称性と密接に関連しているのだが、この講義では触れない。

^{*3} これは 2020 年度の東工大における集中講義の講義録である。

6	モジュライ空間	12
7	全ては Lagrange 部分多様体である	13
8	量子化	14
9	位相的ミラー対称性	16
10	可逆多項式	22
11	軌道体コホモロジーと Vafa の公式	27
12	トーリック多様体	29
13	トーリックミラー構成	31
14	剛 Calabi–Yau 多様体のミラー	36

1 複素多様体

定義 1.1. 実ベクトル空間 V の複素構造 (complex structure) とは、 V の線形自己同型 $J \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ で、 $J^2 = -\text{id}_V$ を満たすものを指す。

演習 1.1. 複素構造を持つ実ベクトル空間の実ベクトル空間としての次元は必ず偶数であることを示せ。

定義 1.2. 複素構造を持つ実ベクトル空間 (V, J_V) と (W, J_W) に対し、 (V, J_V) から (W, J_W) への射とは、実線形写像 $f: V \rightarrow W$ で、

$$f \circ J_V = J_W \circ f \tag{1.1}$$

を満たすものを指す。

演習 1.2. 複素構造を持つ実ベクトル空間の圏が複素ベクトル空間の圏と同値であることを示せ。

M を多様体とし、 TM をその接束とする。^{*4}

定義 1.3. $\Gamma(\text{End}(TM))$ の元 J で $J^2 = -\text{id}_{TM}$ を満たすものを M の概複素構造 (almost complex structure) と呼ぶ。

言い換えると、 M の概複素構造とは、 M の各点 $x \in M$ における接空間 $T_x M$ の複素構造 J_x の族で、 x に滑らかに依存するようなものである。

定義 1.4. 多様体 M とその上の概複素構造 J_M の組 (M, J_M) を概複素多様体 (almost complex manifold) と呼ぶ。

演習 1.3. 多様体 N に対し、接束 TN 上の完全列

$$0 \rightarrow \pi^*TN \rightarrow T(TN) \xrightarrow{\pi_*} \pi^*TN \rightarrow 0 \tag{1.2}$$

^{*4} この講義では、特に断らない限り、多様体 (manifold) やその間の写像などは滑らか (C^∞ 級) と仮定する。

の分裂 (splitting) が与えられた時、

$$J_{TN} := \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_{TN} \\ \text{id}_{TN} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

と表示される J_{TN} によって概複素構造が入ることを示せ。ここで $\pi: TN \rightarrow N$ は自然な射影であり、写像 $\pi^*TN \rightarrow T(TN)$ はファイバー方向の接空間の自然な埋め込みである。

演習 1.4. \mathbb{R}^n の標準的な座標が与える接束の自明化 $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ は分解 $T(T\mathbb{R}^n) \cong T\mathbb{R}^n \oplus T\mathbb{R}^n$ を与えるが、微分同相 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が誘導する同型 $\phi_*: T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$ はこの分解を一般には保たず、従って (1.3) に関して概正則にならないことを示せ。また、 ϕ がアフィン変換の場合には、これが概正則になることを示せ。

定義 1.5. 概複素多様体 (M, J_M) と (N, J_N) に対し、 (M, J_M) から (N, J_N) への概正則写像 (pseudoholomorphic map) とは、写像 $f: M \rightarrow N$ で、その微分 $f_*: TM \rightarrow f^*TN$ が

$$f_* \circ J_M = J_N \circ f_* \quad (1.4)$$

を満たすものを指す。

局所的に \mathbb{C}^n の開集合と同型な概複素構造のことを複素構造と呼ぶ：

定義 1.6. 多様体 M の概複素構造 J が積分可能 (integrable) であるとは、任意の $x \in M$ に対してある x の近傍 $U \subset M$ と \mathbb{C}^n の開集合 V 、それに概正則写像 $f: U \rightarrow V$ と $g: V \rightarrow U$ が存在して、 $f \circ g = \text{id}_V$ かつ $g \circ f = \text{id}_U$ を満たすことを指す。積分可能な概複素構造の事を複素構造 (complex structure) と呼び、複素構造を持つ多様体を複素多様体 (complex manifold) と呼ぶ。

演習 1.5. 複素射影空間が複素多様体である事を示せ。

演習 1.6. 複素多様体の開部分多様体は自然な複素構造を持つことを示せ。

演習 1.7. 複素多様体 (M, J) の閉部分多様体 N が任意の $x \in N$ に対して $J_x T_x N \subset T_x N$ を満たせば、 J は自然に N の複素構造を誘導することを示せ。

演習 1.8. $n+2$ 変数 d 次同次多項式 $f(x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n+1}]$ が原点に孤立臨界点を持つ時、

$$\{[x_0, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}^{n+1} \mid f(x_0, \dots, x_{n+1}) = 0\} \quad (1.5)$$

は自然に複素多様体の構造を持つことを示せ。

概複素多様体 (M, J) とその上の点 $p \in M$ に対して、 J_p の $T_p M$ への作用は $J_p^2 = -\text{id}_{T_p M}$ を満たすので、 $T_p M$ を複素化することによって、固有値が $\sqrt{-1}$ の固有空間 $T'_p M$ と固有値が $-\sqrt{-1}$ の固有空間 $T''_p M$ の直和に分解することが出来る；

$$T'_p M := \{X \in T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid J_p X = \sqrt{-1}X\}, \quad (1.6)$$

$$T''_p M := \{X \in T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid J_p X = -\sqrt{-1}X\}, \quad (1.7)$$

$$T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'_p M \oplus T''_p M. \quad (1.8)$$

各点におけるこれらの直和分解は M 全体で貼り合わさって、ベクトル束の直和分解

$$TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'M \oplus T''M \quad (1.9)$$

を与える。 $T'M$ を M の正則接束 (holomorphic tangent bundle), $T''M$ を M の反正則接束 (anti-holomorphic tangent bundle) と呼ぶ。

演習 1.9. M が複素座標 $(z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i)_{i=1}^n$ を持つ複素多様体の時、 M の正則接束と反正則接束はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.10)$$

と

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.11)$$

で張られていることを示せ。

これらのベクトル束の双対束を用いて

$$\Omega_M^{p,q} := \bigwedge^p (T^*M) \otimes \bigwedge^q (T''M)^* \quad (1.12)$$

と定義する。

演習 1.10. M が複素座標 $(z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i)_{i=1}^n$ を持つ複素多様体の時、 $\Omega_M^{1,0}$ と $\Omega_M^{0,1}$ は $dz_i = dx_i + \sqrt{-1}dy_i$ と $d\bar{z}_i = dx_i - \sqrt{-1}dy_i$ で張られていることを示せ。

直和分解

$$\Gamma \left(\bigwedge^r T^*M \right) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} \Gamma(\Omega_M^{p,q}) \quad (1.13)$$

に関する射影を

$$\Pi^{p,q}: \Gamma \left(\bigwedge^r T^*M \right) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Gamma(\Omega_M^{p,q}) \quad (1.14)$$

と書き、微分作用素 ∂ と $\bar{\partial}$ を

$$\partial := \Pi^{p+1,q} \circ d: \Gamma(\Omega_M^{p,q}) \rightarrow \Gamma(\Omega_M^{p+1,q}), \quad (1.15)$$

$$\bar{\partial} := \Pi^{p,q+1} \circ d: \Gamma(\Omega_M^{p,q}) \rightarrow \Gamma(\Omega_M^{p,q+1}) \quad (1.16)$$

で定義する。

演習 1.11. $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対し

$$N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] \quad (1.17)$$

とおくと、 N は $(T^*M)^{\otimes 2} \otimes TM$ の切断であることを示せ。(ヒント: 任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$N(fX, Y) = N(X, fY) = fN(X, Y) \quad (1.18)$$

を示せば良い。)

定義 1.7. (1.17) で定まる N を Nijenhuis テンソル (Nijenhuis tensor) と呼ぶ。

演習 1.12. 概複素多様体 (M, J) に対する次の 3 つの条件が互いに同値であることを示せ:

1. Nijenhuis テンソルが零になる。

2. 任意の $X, Y \in \Gamma(T'M)$ に対し $[X, Y]$ が再び $\Gamma(T'M)$ に入る.
3. $\bar{\partial}^2 = 0$ となる.

演習 1.13. 概複素構造 J が積分可能であれば、Nijenhuis テンソルが零になることを示せ。

演習 1.13 の逆、すなわち Nijenhuis テンソルが零であれば概複素構造が積分可能であることを主張するのが Newlander–Nirenberg の定理である。

定義 1.8. 複素多様体 M の Dolbeault コホモロジーを

$$H^{p,q}(M) := \frac{\text{Ker} \left(\bar{\partial}: \Gamma(\Omega_M^{p,q}) \rightarrow \Gamma(\Omega_M^{p,q+1}) \right)}{\text{Im} \left(\bar{\partial}: \Gamma(\Omega_M^{p,q-1}) \rightarrow \Gamma(\Omega_M^{p,q}) \right)} \quad (1.19)$$

で定義する。

演習 1.14 (Dolbeault の定理). 複素多様体の (p, q) 次の Dolbeault コホモロジー $H^{p,q}(M)$ が正則 p 形式の層 Ω_M^p の q 次のコホモロジー $H^q(\Omega_M^p)$ と複素線形空間として同型である事を示せ。

定義 1.9. Dolbeault コホモロジーの次元を Hodge 数と呼ぶ;

$$h^{p,q}(M) := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(M). \quad (1.20)$$

演習 1.15. 複素多様体 M に対して、Frölicher スペクトル系列

$$H^q(\Omega_M^p) \Rightarrow H^{p+q}(M) \quad (1.21)$$

が存在することを示せ。(ヒント: 分解

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \Omega_M \rightarrow \Omega_M^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_M^{\dim M} \rightarrow 0 \quad (1.22)$$

を用いよ。)

演習 1.16. Hopf 曲面の Hodge ダイヤモンドは

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & \end{array} \quad (1.23)$$

である事を示せ。

演習 1.17. Frölicher スペクトル系列が E_1 退化しないようなコンパクト複素多様体の例を挙げよ。(ヒント: 例えば岩澤多様体などがある。)

演習 1.18. Hodge 数が位相不変量でない (あるいはより強く、微分同相不変量でない) ことを示せ。(ヒント: 例えば [KS13] を見よ。)

2 シンプレクティック多様体

定義 2.1. ベクトル空間 V と 2 階のテンソル $\omega \in V^* \otimes V^*$ に対し、 ω が誘導する写像

$$V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \omega(v, -) \quad (2.1)$$

が単射 (従って同型) の時、 ω は非退化 (non-degenerate) であると言う。

定義 2.2. ベクトル空間 V 上の非退化な 2 形式 (2 階の完全反対称テンソル)

$$\omega \in \bigwedge^2 V^* \subset V^* \otimes V^* \quad (2.2)$$

を V 上のシンプレクティック形式 (symplectic form) と呼び、組 (V, ω) をシンプレクティックベクトル空間 (symplectic vector space) と呼ぶ。

ω の反対称性および非退化性は、 $J \in \text{End}(V) \cong V^* \otimes V$ に対する条件 $J^2 = -\text{id}_V$ の類似と見ることがができる。

演習 2.1. $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ が非退化の時、 V は偶数次元であり、その基底をうまく取れば線形写像 (2.1) が

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

と行列表示される事を示せ。

定義 2.3. 多様体 M 上のシンプレクティック形式 (symplectic form) とは、非退化かつ閉であるような 2 次微分形式 $\omega \in \Gamma(\bigwedge^2 T^*M)$ を指す。多様体とその上のシンプレクティック形式の組 (M, ω) をシンプレクティック多様体 (symplectic manifold) と呼ぶ。

シンプレクティック多様体の中の「シンプレクティック写像」 $f: (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ という概念を、写像 $f: M \rightarrow N$ で $f^*\omega_N = \omega_M$ を満たすものとして定義することはできるが、これは正則写像の良い類似にはならない。例えば次が成り立つ：

演習 2.2. (M, ω_M) と (N, ω_N) がシンプレクティック多様体であり、多様体の写像 $f: M \rightarrow N$ が $f^*\omega_N = \omega_M$ を満たすとする。このとき、 $\dim M \leq \dim N$ を示せ。

後述する Lagrange 部分多様体の概念を用いて、直積 $(M \times N, -\pi_M^*\omega_M + \pi_N^*\omega_N)$ の Lagrange 部分多様体をシンプレクティック多様体の中の「写像」と考える方が、上記の意味での「シンプレクティック写像」を考えるよりも多くの場面で自然である。但し、直積の Lagrange 部分多様体は、正則写像の類似というよりは、複素幾何における対応 (correspondence、直積の複素部分多様体) のシンプレクティック幾何における類似である。

一方、シンプレクティック多様体の同型は自然に定義される：

定義 2.4. シンプレクティック多様体 (M, ω_M) と (N, ω_N) に対し、微分同相写像 $\varphi: M \rightarrow N$ で $\varphi^*\omega_N = \omega_M$ を満たすものをシンプレクティック同相 (symplectomorphism) と呼ぶ。

多様体上の非退化 2 次微分形式 ω を概シンプレクティック形式と呼ぶ事もある。シンプレクティック同相の定義に ω が閉形式であることは使っていないので、概シンプレクティック多様体の中の写像に対してもシンプレクティック同相という概念は意味をなすことに注意せよ。

概シンプレクティック形式に対する Nijenhuis テンソルの類似は 3 次微分形式 $d\omega$ であり、Newlander-Nirenberg の定理の類似が Darboux の定理である。

演習 2.3 (Darboux の定理の逆). 概シンプレクティック多様体 (M, ω) が「任意の $x \in M$ に対し、 x を含む M の開集合 U が存在して、 $(U, \omega|_U)$ はシンプレクティックベクトル空間の開集合とシンプレクティック同相になる」という条件を満たすならば、 ω はシンプレクティック形式である (すなわち $d\omega = 0$ である) 事を示せ。

演習 2.4 (Darboux の定理). 任意のシンプレクティック多様体 (M, ω) と任意の $x \in M$ に対し、 x を含む M の開集合 U が存在して、 $(U, \omega|_U)$ はシンプレクティックベクトル空間の開集合とシンプレクティック同相になる事を示せ。

シンプレクティック構造を含むより広い概念として Poisson 構造がある。

定義 2.5. 多様体 M 上の Poisson 括弧 (Poisson bracket) とは、 \mathbb{R} 上の双線形写像

$$\{-, -\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad (2.4)$$

で、反対称性

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (2.5)$$

Jacobi 恒等式

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (2.6)$$

および Leibniz 則

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad (2.7)$$

を満たすものを指す。

注意 2.6. Poisson 括弧に対する \mathbb{R} 双線形性と反対称性 (2.5)、それに Jacobi 恒等式 (2.6) は、Poisson 括弧が $C^\infty(M)$ に \mathbb{R} 上の Lie 代数の構造を定めると言い換えることができる。

注意 2.7. Poisson 括弧に対する Jacobi 恒等式 (2.6) は Leibniz 則

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\} \quad (2.8)$$

と見ることできる。

Poisson 括弧に対する Leibniz 則 (2.7) は、Poisson 括弧が関数に対してベクトル場を定める写像

$$C^\infty(M) \rightarrow \Gamma(TM), \quad f \mapsto X_f := \{f, -\} \quad (2.9)$$

であると言い換えることができる。これと Poisson 括弧の反対称性 (2.5) を併せると、Poisson 括弧が Poisson 双ベクトル (Poisson bivector)

$$\beta \in \Gamma\left(\bigwedge^2 TM\right) \quad (2.10)$$

で決まることが分かる。

定義 2.8. Poisson 双ベクトルが非退化である時、Poisson 括弧は非退化であるという。

演習 2.5. 非退化な Poisson 括弧とシンプレクティック形式は同値な概念であることを示せ。

多様体とその上の Poisson 括弧の組を Poisson 多様体 (Poisson manifold) と呼ぶ。

演習 2.6. 任意の Poisson 多様体は、葉がシンプレクティック構造を持つような葉層構造を自然に持つことを示せ。

$H \in C^\infty(M)$ に対し、ベクトル場 X_H を H の定める Hamilton ベクトル場 (Hamiltonian vector field) と呼ぶ。

演習 2.7. Poisson 多様体上の Hamilton ベクトル場は演習 2.6 で与えた葉層構造の葉に接することを示せ。

時間発展が Hamilton ベクトル場によって与えられるような力学系を Hamilton 系と呼ぶ。演習 2.7 から、Hamilton 系を考える舞台は局所的にはシンプレクティック多様体だと考えて良い。

3 解析力学

Lagrange 形式の解析力学は、運動方程式を Lagrange 関数 (Lagrangian) の積分として与えられる作用汎関数 (action functional) に対する変分原理の形に書き直す。

例として、3次元空間においてポテンシャル V を持つ力によって駆動される質点の運動を考えよう。質点の質量は 1 とし、 t を時刻、 $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を直交座標系で表した質点の運動とすると、Newton の運動方程式は

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V, \quad \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

と表される。

この場合の Lagrange 関数は、運動エネルギー $K = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2$ とポテンシャル V を用いて $L = K - V$ で与えられる。

一般座標 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ に対し、質点の運動は作用

$$S = \int L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \quad (3.2)$$

を最小にするという最小作用の原理によって定まり、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

を満たす。

Newton の運動方程式と比較したときの Lagrange 形式の解析力学の大きな利点は、一般座標 \mathbf{q} として必ずしも直交座標を取る必要が無いことである。例えばポテンシャル V が中心力で、考えている系が球対称などときには、直交座標よりも球座標を取るほうがはるかに見通しが良くなる。もちろんまず Newton の運動方程式を書き、次に微分の連鎖律を使って同じ方程式を球座標で書き直すことはできるが、それよりは最初から対称性が顕に見える形で記述するほうが理論的にも、また計算をする上でも有利である。

Lagrange 形式では Newton の運動方程式と同じく 2 階の常微分方程式によって運動が記述され、方程式の一般解には変数の数の 2 倍の数の積分定数が現れる。別の言い方をすると、ある時刻における系の状態を記述するにはその時刻における一般座標だけではなく、その微分 (一般速度) も知る必要がある。配位空間 (configuration space) を N とおくと、運動方程式の初期値の空間は N の接束 TN になる。

一般座標と一般速度の関数である Lagrange 関数を Legendre 変換することによって、一般座標 \mathbf{q} と一般運動量 \mathbf{p} の関数である Hamilton 関数が得られる：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L. \quad (3.4)$$

Legendre 変換の前 $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は配位空間 N の接束 TN に住んでいたが、Legendre 変換後の (\mathbf{q}, \mathbf{p}) は余接束 T^*N に住んでいる。

運動方程式は Hamilton 関数を用いて

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.5)$$

と書ける。これは 1 階の常微分方程式であり、しかも一般座標 \mathbf{q} と一般運動量 \mathbf{p} に関して (反) 対称な形をしている。この方程式の背後には T^*N 上のシンプレクティック形式 $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ がある。対応する Poisson 括弧は

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (3.6)$$

で与えられ、運動方程式は

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\}, \quad \dot{q}_i = \{H, q_i\} \quad (3.7)$$

と書き直される。この運動方程式は、象徴的に

$$\frac{d}{dt} = \{H, -\}, \quad (3.8)$$

あるいはより正確に、系の時間発展を与える微分同相 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(T^*N)$ に対して

$$\dot{\phi} = X_H \quad (3.9)$$

とも書ける。

相空間 (phase space) T^*N は配位空間 N の 2 倍の次元を持つ。配位空間の微分同相は相空間のシンプレクティック同相を誘導するが、相空間のシンプレクティック同相の中で配位空間の微分同相から来るものはごく一部である。

T^*N の任意の関数は T^*N のシンプレクティック同相を定めるが、これは N や TN にはない T^*N (あるいは一般のシンプレクティック多様体、あるいは更に一般に Poisson 多様体) の持つ顕著な特徴 (あるいは特長) である。

4 性質と構造

位相多様体であることは、位相空間に対する性質 (property) である。一方、微分可能 (differentiable) という言葉は性質のような響きを持っているが、微分可能多様体であることは位相多様体に対する構造 (structure) である。位相多様体は、局所的に Euclid 空間と同相であるような位相空間として定義される。微分可能多様体は、位相多様体に、座標変換が微分可能であるようなアトラスをデータとして付け加えたものとして定義される。^{*5}

複素構造やシンプレクティック構造は微分可能多様体に対する性質ではなく構造である。

演習 4.1. 複素構造が構造であること、すなわち、一般に微分可能多様体は複数の複素構造を許容することを示せ。

演習 4.2. シンプレクティック構造が構造であること、すなわち、一般に微分可能多様体は複数のシンプレクティック構造を許容することを示せ。

^{*5} 微分構造が性質ではなく構造であることは、Milnor による偉大な発見である。例えば、7 次元球面に入る微分構造全体が位数 28 の巡回群をなすことや、それらが全て (例えば Brieskorn 多様体として) 具体的に構成できることは驚異的である。

与えられた微分可能多様体がどのくらい複素構造やシンプレクティック構造を持つかは一般には非常に難しい問題である。

演習 4.3. 複素構造をただ1つしか許容しない微分可能多様体の例を与えよ。

演習 4.4. シンプレクティック構造をただ1つしか許容しない微分可能多様体の例を与えよ。

複素構造やシンプレクティック構造は、標準的な構造を持つ開集合の貼り合わせと接束のテンソルの言葉の両方で定義できるが、Riemann 構造は標準的な構造の貼り合わせでは定義されない。この差は積分可能性の有無から来ている。

複素代数多様体 (complex algebraic variety) は被約で既約で分離的な複素数体上有限型のスキームとして定義される。スキームは局所的にアファインスキームと同型な環付き空間であり、環付き空間は位相空間とその上の環の層の組である。^{*6}環付き空間であることは位相空間上の構造であり、代数多様体であることは環付き空間の性質である。滑らかな代数多様体は自然に微分可能多様体を定めるので、代数多様体であることは微分可能多様体上の構造であるとも言える。代数構造を複素構造やシンプレクティック構造のようにテンソル場の言葉で言い換えることはできないと思われる。

演習 4.5. 同型でない代数多様体の組で、複素多様体としては同型であるものの例を与えよ。

5 G 構造の幾何学

1872 年の Erlangen 大学における教授就任演説で Klein は、空間とそれに作用する群の組に対して対応する幾何学が定まり、その群作用で不変な空間の性質のみが幾何学の対象になる、という視点を提唱した。これは Euclid 幾何やアフィン幾何を、射影幾何を頂点とするような階層に位置付けるとともに、Lie 群や等質空間の研究を促した。

Cartan による G 構造の概念は、Klein の視点を Riemann 幾何を含む形で拡張する。Euclid 空間 \mathbb{R}^n とそれに作用する Lie 群 G の組 (G, \mathbb{R}^n) に対し、 n 次元多様体 M の G 構造 (G -structure) とは、 M の接束 TM の構造群 $GL(n, \mathbb{R})$ の G への簡約のことである。つまり、 M の開被覆を取って、接束 TM を自明束の貼り合わせとして表すときに、変換関数の値を $GL(n, \mathbb{R})$ ではなく G に取るということである。

$GL(n, \mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分を $GL^+(n, \mathbb{R})$ と書く。

演習 5.1. $GL(n, \mathbb{R})/GL^+(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ。

演習 5.2. $GL^+(n, \mathbb{R})$ 構造は向きと同値であることを示せ。

演習 5.3. $O(n)$ 構造は Riemann 計量と同値であることを示せ。

演習 5.4. $GL(n/2, \mathbb{C})$ 構造は概複素構造と同値であることを示せ。

G 構造はしばしばテンソル場によって特徴付けられ、上の3つの例ではそれぞれ体積形式 (どこでも零にならない n 次微分形式)、リーマン計量 (至る所正定値な2階の対称テンソル)、概複素構造 (自乗すると -1 倍になる接束の自己同型) となる。

演習 5.5. $O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ。

^{*6} スキームを環付き空間ではなく環の圏から集合の圏への関手と見る見方もあるが、ここでは触れない。

演習 5.6. $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ。

演習 5.7. $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆を $\mathrm{Spin}(n)$ で表す。多様体の $\mathrm{Spin}(n)$ 構造とは何かを述べよ。

G 構造に関する重要な概念として積分可能性 (integrability) がある。微分可能多様体はユークリッド空間の開集合を微分同相で貼り合わせて得られるが、この貼り合わせ写像の微分は接空間の間の線形写像 ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ の元) を与える。この貼り合わせ写像の微分が常に G に入っているとき、この多様体は積分可能な G 構造を持つと言われる。別の言い方をすると、 \mathbb{R}^n は標準的な G 構造を持つが、 G 構造を持つ多様体では各点における接空間 (あるいは無限小近傍) が \mathbb{R}^n と G 構造を込めて同一視されるのに対し、積分可能な G 構造を持つ多様体では各点における有限の大きさの近傍が \mathbb{R}^n の開集合と G 構造を込めて同一視される。

Riemann 構造が積分可能であるための必要十分条件は、Riemann の曲率テンソルが零であることである。積分可能な Riemann 多様体は \mathbb{R}^n の開集合を等長写像で貼り合わせて得られる。このような多様体は平坦多様体と呼ばれ、 Bieberbach の定理により、コンパクトであればトーラスの有限群による商に限られることが知られている。

$$J_{2n} := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

とおく。

演習 5.8.

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \{G \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A^{-1}J_{2n}A = J_{2n}\} \quad (5.2)$$

を示せ。

定義 5.1. シンプレクティック群 (symplectic group) を

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cong \{G \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J_{2n} A = J_{2n}\} \quad (5.3)$$

で定義する。

演習 5.9. シンプレクティック構造は積分可能な $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 構造と同値であることを示せ。

Klein 流に言うと、シンプレクティック幾何はシンプレクティック多様体の、シンプレクティック同相で不変な性質を研究する学問である。Cartan 流に言うと、シンプレクティック幾何は、積分可能な $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 構造の研究である。

演習 5.10.

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}). \quad (5.4)$$

であり、しかもこの3つのうちの2つの共通部分は残りの1つに自動的に含まれる事を示せ。

定義 5.2. $\mathrm{U}(n)$ 構造を概 Hermite 構造 (almost Hermitian structure) と呼ぶ。

定義 5.3. 複素構造が積分可能であるような概 Hermite 構造を Hermite 構造と呼ぶ。

定義 5.4. シンプレクティック構造が積分可能であるような概 Hermite 構造を概 Kähler 構造と呼ぶ。

定義 5.5. 複素構造とシンプレクティック構造がどちらも積分可能であるような概 Hermite 構造を Kähler 構造と呼ぶ。

演習 5.11. シンプレクティック構造、複素構造および Riemann 構造の 3 つのうちの二つが与えられれば、残りの 1 つは自動的に決まることを示せ。

演習 5.12. 複素構造とシンプレクティック構造がどちらも積分可能である (すなわち、Kähler 多様体である) が、 $U(n)$ 構造が積分可能でない例を与えよ。

Kähler 多様体 (あるいは Kähler 構造を許容する複素多様体) は非常に重要なクラスをなす。Hodge 理論によって、コンパクト Kähler 多様体に対しては、 $H^q(\Omega_X^p)$ は (p, q) 次の調和形式の空間 $\mathcal{H}^{p,q}$ と自然に同一視され、Frölicher スペクトル系列 (1.21) は E_1 退化する。複素共役は同型 $\mathcal{H}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{q,p}$ を与えるので、特に $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ である。従って、コンパクト Kähler 多様体の Hodge ダイヤモンドは左右対称であり、奇数次の Betti 数は偶数になる。この事と演習 1.16 から、Hopf 曲面は Kähler 構造を許容しないことが分かる。

6 モジュライ空間

複素多様体 X が与えられた時、その下部構造としての C^∞ 級多様体に入る複素構造の集合を複素多様体の同型 (双正則同値) で割って得られる商集合は、良い状況では複素多様体 (あるいはその一般化) の構造を持つ。これを X の複素構造のモジュライ空間と呼ぶ。

注意 6.1. 全ての双正則同値の代わりに恒等写像とアイソトピックであるような正則同値のみで割った空間を Teichmüller 空間と呼ぶ。Teichmüller 空間は写像類群を構造群とするモジュライ空間上の主ファイバー束の構造を持つ。

V を n 次元の複素ベクトル空間、 Λ を階数 $2n$ の自由 Abel 群とする。

演習 6.1. 任意の n 次元複素トーラス X に対し、ある群の単射準同型 $i: \Lambda \rightarrow V$ が存在して $X \cong V/i(\Lambda)$ となることを示せ。

単射準同型の集合を $\text{Hom}(\Lambda, V)^\circ \subset \text{Hom}(\Lambda, V)$ で表す。

演習 6.2. $i, i' \in \text{Hom}(\Lambda, V)^\circ$ に対して $V/i(\Lambda) \cong V/i'(\Lambda)$ となるための必要十分条件は、ある $g \in \text{GL}(V)$ と $h \in \text{Aut}(\Lambda)$ が存在して $i' = g \circ i \circ h$ となることである事を示せ。

従って、実 $2n$ 次元のトーラスに入る複素構造の同値類の集合は、

$$\text{GL}(V) \backslash \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, V)^\circ / \text{Aut}(\Lambda) \tag{6.1}$$

で与えられる。

演習 6.3. $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \backslash \text{Hom}(\Lambda, V)^\circ$ は $2n$ 次元複素ベクトル空間の n 次元複素部分空間の集合 $\text{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n})$ の部分集合と自然に同一視され、自然な n^2 次元複素多様体の構造を持つ事を示せ。

演習 6.4. $n = 1$ の時、 $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \backslash \text{Hom}(\Lambda, V)^\circ \cong \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ かつ $\text{GL}(V) \backslash \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, V)^\circ / \text{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{H} / \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ であることを示せ。ここで $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ は上半平面である。

演習 6.5. $n \geq 2$ に対し、集合 $\text{GL}(V) \backslash \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, V)^\circ / \text{Aut}(\Lambda) \cong \text{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n}) / \text{GL}_{2n}(\mathbb{Z})$ は商位相に関して T_1 でない (従って Hausdorff でもない) 事を示せ。

一方、 n 次元偏極 Abel 多様体の同値類の集合は、自然に $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次元の複素解析空間の構造を持つ事が知られている。 n 次元トーラス上の任意の直線束 L に対し、 L の変形の障害類の住む空間の次元は

$\dim \text{Ext}^2(L, L) = \binom{n}{2} = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$ であることに注意せよ。

注意 6.2. シンプレクティック構造のモジュライ空間も同様に定義することはできるが、そのままではあまり良い概念ではない。ミラー対称性の文脈では、シンプレクティック構造のモジュライ空間はいわゆる量子補正 (quantum correction) を受けると考えられており、補正後のモジュライ空間の満足のゆく数学的な定式化はまだなされていない。

7 全ては Lagrange 部分多様体である

相空間は配位空間に運動量を付け加えて「2倍に」することで得られるが、この中で運動量が零である部分空間 L は配位空間と自然に同一視できる。言い換えると、 $M = T^*N$ の零切断 L は N と同一視できる。この L は、 M のシンプレクティック形式 ω の制限 $\omega|_L$ が零になるという著しい性質を持っている。さらに、 L はそのような性質を持つ M の部分多様体の中で、包含関係に関して極大になっている。この2つの性質を持つ M の部分多様体のことを Lagrange 部分多様体と呼ぶ：

定義 7.1. シンプレクティック多様体 (M, ω) の部分多様体 L が Lagrange 部分多様体 (Lagrangian submanifold) であるとは、 $\omega|_L = 0$ かつ $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$ が成り立つことを指す。

「全ては Lagrange 部分多様体である」という主張は Weinstein のシンプレクティック教条 (Weinstein's symplectic creed) と呼ばれている [Wei81]。全てというのは少し大袈裟だとしても、シンプレクティック幾何における重要な問題の多くが Lagrange 部分多様体の言葉で書けることは間違いない。^{*7}

例えば、シンプレクティック同相写像

$$f: (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2) \quad (7.1)$$

は、そのグラフを考えることによって、直積 $(M_1 \times M_2, \pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2)$ の Lagrange 部分多様体の特別な場合と考えることができる。特に、シンプレクティック多様体 M_1 と M_2 がともに別の多様体 N の余接束で、この Lagrange 部分多様体が直積 $N \times N$ の上の関数 F の微分 dF のグラフとして与えられているとき、 F を変換の母関数と呼ぶ。具体的には、 M_1 の座標を (q, p) 、 M_2 の座標を (Q, P) とおくと、母関数 $F(q, Q)$ を用いて、変換前後の変数の関係は

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad (7.2)$$

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad (7.3)$$

と書ける。 F は q と Q の関数なので、まず (7.2) を解くことによって Q を q と p の関数として表し、次に (7.3) によって P が q と p の関数として定まる。

演習 7.1. 運動量写像を Lagrange 部分多様体として記述せよ。^{*8}

^{*7} 偏移シンプレクティック幾何 (shifted symplectic geometry) においては、偏移シンプレクティック構造 (shifted symplectic structure) は偏移 Lagrange 構造 (shifted Lagrangian structure) の特別な場合である (例えば [Toë14, Remarks 5.3] を見よ)。

^{*8} この問いに対する「良い」解答は偏移シンプレクティック構造の言葉で与えられる。運動量写像 $\mu: X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ の誘導する商スタックの射 $\mu: [X/G] \rightarrow [\mathfrak{g}^*/G] \simeq T^*BG[1]$ は、 $T^*BG[1]$ の標準的な1偏移シンプレクティック構造に関する canonical な Lagrange 構造を持つ。同様に、 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ の stabilizer を G_λ とおくと、自然な埋め込み $BG_\lambda \hookrightarrow [\mathfrak{g}^*/G]$ は canonical な Lagrange 構造を持つ。これらのファイバー積 $[X/G] \times_{[\mathfrak{g}^*/G]} BG_\lambda$ に canonical な0偏移シンプレクティック構造を入れたものが X の λ における (導来) シンプレクティック商である。

8 量子化

20 世紀に古典力学は物理学の基本原理の座を量子力学に明け渡したが、この過程でシンプレクティック幾何学の重要性はむしろ高まった。

Planck 定数 \hbar を 0 にする極限において量子力学は古典力学を再現する (べきである) が、逆に、与えられた古典系に新たに \hbar というパラメーターを導入して、 $\hbar \rightarrow 0$ の極限でもとの系を再現するようにする操作を量子化と呼ぶ。

古典系の量子化がいつでも存在するかは分からないし、存在しても一意的とは限らない。

解析力学は古典力学を記述するための洗練された方法を与えるのみならず、量子化を行う際に重要な手掛かりを与える。

Lagrange 形式で与えられた古典系を量子化する問題は Feynman の学位論文において取り上げられ、経路積分の理論として定式化された。

Heisenberg の行列力学では位置や運動量といった物理量を行列で置き換え、Poisson 括弧を演算子の交換子に取り替えることで量子化が行われる:

$$p, q \mapsto \hat{p}, \hat{q}, \quad \{q, p\} = 1 \mapsto [\hat{q}, \hat{p}] = \sqrt{-1}\hbar. \quad (8.1)$$

一方、Schrödinger による波動力学は行列力学と同値であるが、Hamilton–Jacobi 形式の解析力学と密接に結びついている。Hamilton–Jacobi 形式においては、時間に依存する正準変換を行うことで Hamilton 関数を零にする。そのような正準変換の母関数を特徴付ける方程式が Hamilton–Jacobi 方程式であり、これは位置と時間を独立変数に持つ 1 階の偏微分方程式である。常微分方程式の問題を偏微分方程式の問題に変えるので、一見すると問題を難しくしているような印象を与えるが、保存量を探して問題を単純にするのに威力を発揮するのみならず、粒子の運動と波の伝播の類似性を強調することによって、波動力学への道を切り開いた。

これらの理論をシンプレクティック多様体の立場から見直すことによって、幾何学的量子化 (geometric quantization) という概念が得られる。特に重要な例としては、Lie 群の余随伴軌道の幾何学的量子化と、Riemann 面上のベクトル束のモジュライ空間の幾何学的量子化が挙げられよう。前者は Lie 群の表現論と密接に関わり、Kostant による戸田格子とその量子化の研究に繋がる。後者は共形場理論や Chern–Simons 理論と結びつき、低次元トポロジーへの応用などの著しい成果を挙げた。

幾何学的量子化とは少し毛色の違う量子化に、変形量子化 (deformation quantization) がある。 $A = C^\infty(M)$ の結合環への変形 (すなわち、 $A[[\hbar]]$ の $\mathbb{R}[[\hbar]]$ 上の結合代数構造 \star で、modulo \hbar で A の通常の積になっているようなもの) を

$$f \star g = fg + \hbar B_1(f, g) + \hbar^2 B_2(f, g) + \dots \quad (8.2)$$

とおく。ここで、 B_i は 2 つの引数のそれぞれについて有限階の微分作用素であると仮定する。積 \star の集合には、 $A[[\hbar]]$ の $\mathbb{R}[[\hbar]]$ 加群としての自己同型

$$D: f \mapsto f + \hbar D_1(f) + \hbar^2 D_2(f) + \dots \quad (8.3)$$

が

$$\star \mapsto \star', \quad a \star' b := D(D^{-1}(a) \star D^{-1}(b)) \quad (8.4)$$

で作用する。ここで $D_i, i = 1, 2, \dots$ は有限階の微分作用素である。

演習 8.1. \star の結合律

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \quad (8.5)$$

は \hbar の 1 次で

$$fB_1(g, h) - B_1(fg, h) + B_1(f, gh) - B_1(f, g)h = 0 \quad (8.6)$$

を与える事を示せ。

演習 8.2. 自己同型 (8.3) は B_1 に

$$B_1'(f, g) = B_1(f, g) - fD_1(g) + D_1(fg) - D_1(f)g \quad (8.7)$$

で作用することを示せ。

演習 8.3. B_1 を対称部分と反対称部分に

$$B_1^+(f, g) = \frac{1}{2} (B_1(f, g) + B_1(g, f)), \quad (8.8)$$

$$B_1^-(f, g) = \frac{1}{2} (B_1(f, g) - B_1(g, f)), \quad (8.9)$$

$$B_1^+(f, g) = B_1^+(f, g) + B_1^1(g, f) \quad (8.10)$$

と分けた時、自己同型 (8.3) は

$$B_1'^+(f, g) = B_1^+(f, g) - fD_1(g) + D_1(fg) - D_1(f)g, \quad (8.11)$$

$$B_1'^-(f, g) = B_1^-(f, g) \quad (8.12)$$

と作用する事を示せ。

与えられた \star 積に対し、 A の Poisson 括弧を

$$\{f, g\} := \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar} [f, g] = 2B_1^-(f, g) \quad (8.13)$$

で定義する。但し、ここで

$$[f, g] := f \star g - g \star f \quad (8.14)$$

は \star 積に関する交換子である。

定義 8.1. 可換環 A と写像 $\{-, -\}: A \times A \rightarrow A$ の組 $(A, \{-, -\})$ が Poisson 代数 (Poisson algebra) であるとは、 A が

1. 反対称性 : $\{a, b\} = -\{b, a\}$
2. Jacobi 恒等式 : $\{\{a, b\}, c\} + \{\{a, c\}, b\} + \{\{b, c\}, a\} = 0$
3. Leibniz 則 : $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$

を満たす事を指す。

演習 8.4. A と $A[[\hbar]]$ の \star 積から (8.13) で定まる Poisson 括弧 $\{-, -\}$ の組 $(A, \{-, -\})$ は Poisson 代数を与えることを示せ。(ヒント : \star の結合律から従う交換子積 $[-, -]$ の Jacobi 恒等式及び Leibniz 則の \hbar についての先導項を見よ。)

演習 8.5. $A[[\hbar]]$ の \star 積の先導項の対称部分 B_1^+ はゲージ変換によって零にできることを示せ。

任意の Poisson 構造が変形量子化を持つか (つまり、その Poisson 構造を先導項を持つ $C^\infty(M)[[\hbar]]$ 上の \star 積が存在するか) という問題は [Kon03] によって肯定的に解決された。

9 位相的ミラー対称性

Calabi–Yau 多様体の定義には

1. ホロノミー群が $SU(n)$ と一致する実 $2n$ 次元 Riemann 多様体
2. Ricci 曲率が 0 である Kähler 多様体
3. 標準束が自明な Kähler 多様体

などの同値でない幾つかの流儀が存在する。

演習 9.1. 上記の 3 つの定義の間の関係をなるべく詳しく述べよ。

この節では 3 を採用する。また、特に断らない限り Calabi–Yau 多様体はコンパクトであると仮定する。標準束が自明なので、どこでも 0 にならない正則 n 形式 $\Omega \in H^0(\Omega_X^n)$ が定数倍を除いて一意に存在するが、これを正則体積形式 (holomorphic volume form) と呼ぶ。

定義 9.1. n 次元 Calabi–Yau 多様体の組 (Y, \check{Y}) が位相的ミラー対 (topological mirror pair) であるとは、任意の $0 \leq p, q \leq n$ に対して

$$h^{p,q}(Y) = h^{p,n-q}(\check{Y}) \quad (9.1)$$

を満たす事を指す。この時、 \check{Y} を Y の位相的ミラー (topological mirror) と呼ぶ。

Y と \check{Y} の Hodge 数が $q = n - q$ で定義される直線に関して鏡映対称になっている事が、ミラー対称性という言葉の由来である。

演習 9.2. \check{Y} が Y の位相的ミラーである時、 Y と \check{Y} の Euler 数は

$$\chi(Y) = (-1)^{n+1} \chi(\check{Y}) \quad (9.2)$$

で関係していることを示せ。

注意 9.2. 演習 1.18 で示したように、Hodge 数は位相不変量ではない。それにも関わらず (9.1) を満たす Calabi–Yau 多様体の対が位相的ミラー対と呼ばれることの一つの説明は、 Y が $H^1(\mathcal{O}_X) \cong H^2(\mathcal{O}_X) \cong 0$ を満たすという意味で狭義の 3 次元 Calabi–Yau 多様体の時、非自明な Hodge 数は $h^{1,1}(X)$ と $h^{1,2}(X)$ の 2 つだけであり、どちらも Betti 数から $h^{1,1}(X) = b^2(X)$ と $h^{1,2}(X) = b^3(X)/2 - 1$ で決まることである。

次の問題が位相的ミラー対称性 (topological mirror symmetry) における中心的な課題である：

問題 9.3. Calabi–Yau 多様体 Y に対して、その位相的ミラーが存在するための条件を求めよ。

与えられた Chern 数 c_1^2 と c_2 を持つ一般型曲面の双有理同値類は準射影的な粗モジュライ空間を持つ事が [Gie77] によって知られている。どのような非負整数の組 (c_1^2, c_2) に対してモジュライ空間が空でないかを問うのが一般型曲面の地誌学 (geography of surfaces of general type) [Per87] の基本問題である。そのような組は、

宮岡–Yau の不等式 $c_1^2 \leq 3c_2$ [Miy77, Yau77] と Noether の不等式 $5c_1^2 - c_2 + 36 \geq 12h^{0,1} \geq 0$ で挟まれる領域にしか存在しない。この領域に、モジュライ空間が空でない組 (c_1^2, c_2) が無限個存在する事は容易に分かる。

位相的ミラー対称性は Calabi–Yau 多様体の地誌学に関する問題である。 n 次元 Calabi–Yau 多様体の Hodge 数については、 $n = 3$ の場合にモジュライが空でないものが有限かどうかすら分かっていない。

条件 (9.1) の特別な場合として

$$h^{1,1}(Y) = h^{1,n-1}(\check{Y}) \quad (9.3)$$

を得るが、正則体積形式との内部積によって定まる同型

$$H^1(\Theta_Y) \xrightarrow{\sim} H^1(\Omega_{\check{Y}}^{n-1}), \quad X \mapsto \iota_X \Omega \quad (9.4)$$

によって、 $h^{n-1,1}(\check{Y})$ は $h^1(\Theta_{\check{Y}})$ と一致し、これは更に小平–Spencer 理論と Bogomolov–Tian–Todorov の定理によって、複素構造の変形の自由度と一致する。一方、 $h^{1,1}(Y)$ は Y の Kähler 類の自由度の次元であり、(9.3) は \check{Y} の複素構造の変形の自由度と Y のシンプレクティック構造の変形の自由度が一致することを主張する。これは、ミラー対称性がシンプレクティック幾何と複素幾何を入れ替えるという原理の一つの具現化になっている。

1 次元の Calabi–Yau 多様体は楕円曲線のみであり、2 次元の Calabi–Yau 多様体は Abel 曲面と K3 曲面のみである。楕円曲線の Hodge ダイヤモンドは

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & \end{array} \quad (9.5)$$

であり、Abel 曲面と K3 曲面の Hodge ダイヤモンドはそれぞれ

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 2 & 2 \\ 1 & & 4 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 1 & \end{array} \quad (9.6)$$

及び

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & 1 & \end{array} \quad (9.7)$$

で与えられるので、これらは全て自己双対になっている。

注意 9.4. 複素 2 次元の Ricci 平坦な Kähler 多様体には、Abel 曲面と K3 曲面に加えて Enriques 曲面と双楕円曲面 (bi-elliptic surface) がある。前者は K3 曲面の非シンプレクティック対合による商であり、後者は 2 つの (同型とは限らない) 楕円曲線の直積の有限群による商である。

演習 9.3. Enriques 曲面の Hodge ダイヤモンドが

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & 10 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & \end{array} \quad (9.8)$$

で与えられることを示せ。

演習 9.4. 双楯円曲面の Hodge ダイヤモンドが

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 1 \\
 0 & & 2 & & 0 \\
 & & 1 & & 1 \\
 & & & & 1
 \end{array} \tag{9.9}$$

で与えられることを示せ。

K3 曲面と Enriques 曲面のホロノミー群は $SU(2)$ であるが、Abel 曲面と双楯円曲面のホロノミー群は自明群である。

3次元 Calabi–Yau 多様体のおそらく最も有名な例は \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面である。これを Y とおくと、その定義方程式は 5 変数の 5 次式で与えられる。標準束が自明であることは、完全列

$$0 \rightarrow T_Y \rightarrow T_{\mathbb{P}^4}|_Y \rightarrow N_{Y/\mathbb{P}^4} \rightarrow 0 \tag{9.10}$$

の最高次の外積を取って得られる添加公式 (adjunction formula)

$$\omega_Y^\vee \otimes N_{Y/\mathbb{P}^4} \cong \omega_{\mathbb{P}^4}^\vee|_Y \tag{9.11}$$

から直ちに分かる。Lefschetz の定理によって、 Y の中間次元未満の Hodge 数は \mathbb{P}^4 の Hodge 数と同じであり、 $h^{1,0}(Y) = h^{2,0}(Y) = 0$ かつ $h^{1,1}(Y) = 1$ が分かる。標準束が自明であることから、 $h^{3,0}(Y) = 1$ である。一般に、Griffiths [Gri69] によって、次数 h の $n+2$ 変数斉次多項式 f で定義される \mathbb{P}^{n+1} の超曲面の中間次元の Hodge 数は

$$h^{p,n-p} = \dim \text{Jac}(f)_{h(n+1-p)-(n+2)} \tag{9.12}$$

で与えられることが知られている。ここで

$$\text{Jac}(f) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+2}] \left/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}} \right) \right. \tag{9.13}$$

は f の Jacobi 環である。

演習 9.5. \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の Hodge ダイヤモンドが

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & 0 \\
 & & 0 & & 1 \\
 1 & & 101 & & 101 \\
 & & 0 & & 1 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 1
 \end{array} \tag{9.14}$$

で与えられる事を示せ。

演習 9.6. \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面は複素構造を少し変形しても \mathbb{P}^4 の射影超曲面のままであることを示せ。

演習 9.7. \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の任意の正則自己同型は \mathbb{P}^4 の自己同型に持ち上がることを示せ。

演習 9.8. 演習 9.6 と演習 9.7 を用いて、 \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の複素構造のモジュライ空間の次元が 101 であることを示せ。

\mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の位相的ミラー \check{Y} は [GP90] によって次のように構成された。まず、 \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の特別な例として Fermat 多様体 $Y := \{[x_1 : \cdots : x_5] \in \mathbb{P}^4 \mid x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = 0\}$ を取る。この Y には $G := \{\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_5) \in \text{SL}_5(\mathbb{C}) \mid \alpha_1^5 = \cdots = \alpha_5^5 = 1\} \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$ が自然に作用し、商空間 Y/G は商特異点を持つ代数多様体になる。この代数多様体はクレパントな特異点解消を持つので、それを \check{Y} とおく

演習 9.9. \check{Y} の Hodge 数を計算し、 \check{Y} が Y の位相的ミラーである事を確かめよ。

クレパントな特異点解消は一意的ではないが、それらはフロップでつながり、Hodge 数はクレパントな特異点解消の取り方に依らない [Kol89]。具体的な特異点解消の記述については例えば [Mor93, Appendix B] とその参考文献を見よ。

3次元 Calabi–Yau 多様体には次のような例もある：楕円曲線の直積

$$E^3 := \{([x_1 : x_2 : x_3], [x_4 : x_5 : x_6], [x_7 : x_8 : x_9]) \in (\mathbb{P}^2)^3 \mid x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = x_7^3 + x_8^3 + x_9^3 = 0\} \quad (9.15)$$

には $G := \{(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid \alpha^3 = \beta^3 = 1\}$ が

$$([x_1 : x_2 : x_3], [x_4 : x_5 : x_6], [x_7 : x_8 : x_9]) \mapsto ([\alpha\beta x_1 : x_2 : x_3], [\alpha^2 x_4 : x_5 : x_6], [\beta^2 x_7 : x_8 : x_9]) \quad (9.16)$$

で作用し、商多様体 E^3/G はクレパントな特異点解消

$$Y \rightarrow E^3/G \quad (9.17)$$

を持つ。

演習 9.10. Y の Hodge ダイヤモンドは

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & 0 & 84 & & 0 \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & & 0 & 84 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \end{array} \quad (9.18)$$

で与えられる事を示せ。

Kähler 多様体の $h^{1,1}$ は必ず正なので、 Y は定義 9.1 の意味での位相的ミラーを持たない。一般に、 $h^{1,n-1}(Y) = 0$ を満たす Calabi–Yau 多様体は、変形を持たないことから剛 Calabi–Yau 多様体 (rigid Calabi–Yau manifold) と呼ばれる。剛 Calabi–Yau 多様体のミラーについては後でもう少し述べる。

\mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の一般化として、重み付き射影空間 (weighted projective space) の超曲面がある。正の自然数の組 (a_1, \dots, a_{n+2}) を重み (weight) と呼ぶ。重みが与えられると、乗法群 \mathbb{G}_m が準同型

$$\mathbb{G}_m \rightarrow \text{GL}_{n+2}, \quad \alpha \mapsto \text{diag}(\alpha^{a_1}, \dots, \alpha^{a_{n+2}}) \quad (9.19)$$

を通して \mathbb{A}^{n+2} に作用するが、この作用に関する $\mathbb{A}^{n+2} \setminus \mathbf{0}$ の商を重み付き射影空間 (weighted projective space) と呼び、 $\mathbf{P}(a_1, \dots, a_{n+2})$ で表す。重み付き射影空間は高々商特異点を持つ代数多様体である。任意の正の自然数 d に対し、全ての重みを一斉に d 倍しても得られる重み付き射影空間は同型である；

$$\mathbf{P}(da_1, \dots, da_{n+2}) \cong \mathbf{P}(a_1, \dots, a_{n+2}). \quad (9.20)$$

また、 $\mathbb{A}^1/(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \cong \mathbb{A}^1$ に注意すると、 $\gcd((a_i)_{i=1}^{n+2}) = 1$ の時、 i 番目以外の重みを一齐に $\gcd((a_j)_{j \neq i})$ で割っても、得られる重み付き射影空間が同型であることも分かる。従って、任意の $i = 1, \dots, n+2$ に対して

$$\gcd(\{a_1, \dots, a_{n+2}\} \setminus \{a_i\}) = 1 \quad (9.21)$$

と仮定することができる。この条件を満たす重みを適格 (well-formed) と呼ぶ。 $n+2$ 変数多項式 $f(x_1, \dots, x_{n+2})$ が任意の $\alpha \in \mathbb{G}_m$ に対して $f(\alpha^{a_1}x_1, \dots, \alpha^{a_{n+2}}x_{n+2}) = \alpha^h f(x_1, \dots, x_{n+2})$ を満たす時、 h 次の重み付き斉次多項式 (weighted homogeneous polynomial) と呼ばれる。

$$\tilde{Y} := \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{A}^{n+2} \mid f(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0\} \quad (9.22)$$

と置くと、

$$Y := (\tilde{Y} \setminus \mathbf{0}) / \mathbb{G}_m \quad (9.23)$$

は $\mathbf{P}(a_1, \dots, a_{n+2})$ の超曲面を定める。 \tilde{Y} が原点以外に特異点を持たない時、 Y は準滑らか (quasi-smooth) であると言う。準滑らかな超曲面は入れ物の重み付き射影空間から来る商特異点のみを持つ。 Y が反正準因子 (anti-canonical divisor) である時、すなわち、 Y の定義方程式の次数 h が

$$a_1 + \dots + a_{n+2} = h \quad (9.24)$$

を満たす時、 Y は自明な標準束を持つ事が添加公式から分かる。但し、勝手な重み (a_1, \dots, a_{n+2}) を取ると、次数 $a_1 + \dots + a_{n+2}$ の斉次多項式をどのように取っても Y が準滑らかにならない。例えば $n = 1$ で $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 3)$ とすると、一般の 5 次多項式 $f(x_1, x_2, x_3)$ は x_1 と x_2 の 5 次式 $g(x_1, x_2)$ と 2 次式 $h(x_1, x_2)$ を用いて

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2) + h(x_1, x_2)x_3 \quad (9.25)$$

と書かれ、必ず $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ に特異点を持つ。

一般の反正準因子が準滑らかになる重みの集合は、 $n = 1$ では $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ の 3 つしか無い [Sai74]。対応する重み付き射影平面の超曲面は楕円曲線であり、それらに対する位相的ミラー対称性は深い内容を持たない。

$n = 2$ の場合は [Yon90] によって分類され、95 個ある事が知られている。対応する重み付き射影空間の超曲面の極小モデルは K3 曲面を与えるが、楕円曲線と同じく、K3 曲面は自己双対なので、位相的ミラー対称性はそのままでは深い内容を持たない。しかし、これらの K3 曲面が族として存在することに注目すると、それらに対する位相的ミラー対称性を、非常に一般 (very general)^{*9}である元の Picard 格子と超越格子を入れ替える双対性として定式化し直すことができる [Dol96]。これは Arnold [Arn75] によって発見され、Pinkham [Pin77] や Dolgachev–Nikulin [Dol83, Nik79] によって K3 曲面の幾何を用いて解釈された奇妙な双対性 (strange duality) と密接に関係する^{*10}。この精密化された意味の位相的ミラー対称性は、重み付き射影空間の超曲面として得られる 95 個の K3 曲面に対しては [Bel02] で詳しく調べられ、そのうち 57 個は 95 個の中に位相的ミラーを持ち、残りの 38 個は持たない無い事が知られている。

$n = 3$ の場合の重みは [KS92a] によって分類され、7555 個ある事が知られている。素朴に考えると、こうして得られる Calabi–Yau 多様体は \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の場合と同様に、大きな $h^{1,n-1}$ と、小さな $h^{1,1}$ を持ってい

^{*9} \mathbb{C} 上の代数多様体 V が与えられた時、 V から高々加算個の自明でない Zariski 閉集合を取り除いた集合の上で成り立つ性質を、 V の非常に一般の点 (very general point) で成り立つと言う。

^{*10} K3 曲面に対するミラー対称性に関しては [Ued] とその参考文献も見よ。

そうに思われるが、そのままでは商特異点を持っているので、それを解消する必要がある。個別の例で具体的に解消を構成するのは必ずしも自明でないが、Vafa [Vaf89] は特異点解消を具体的に構成することなく Hodge 数の母関数 $P(t, \bar{t}) := \sum_{p,q=0}^n h^{p,n-qt} t^p \bar{t}^q$ を与える公式

$$P(t, \bar{t}) = \left(\sum_{l=0}^{h-1} \prod_{l a_i/h \in \mathbb{Z}} \frac{1 - (t\bar{t})^{1-a_i/h}}{1 - (t\bar{t})^{a_i/h}} \prod_{l a_i/h \notin \mathbb{Z}} (t\bar{t})^{1/2-a_i/h} \left(\frac{t}{\bar{t}} \right)^{l a_i/h - [l a_i/h] - 1/2} \right) \Big|_{\text{int}} \quad (9.26)$$

を導出した。ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表し、 $(f)|_{\text{int}}$ は f から t と \bar{t} の分数幂を取り除いたものを表す。

例えば、 \mathbb{P}^4 の 5 次超曲面の場合には、

$$\left(\frac{1-t^4}{1-t} \right)^5 = (1+t+t^2+t^3)^5 \quad (9.27)$$

$$= 1 + 5t + 15t^2 + 35t^3 + 65t^4 + 101t^5 + 135t^6 \quad (9.28)$$

$$+ 155t^7 + 155t^8 + 135t^9 + 101t^{10} + 65t^{11} + 35t^{12} \quad (9.29)$$

$$+ 15t^{13} + 5t^{14} + t^{15} \quad (9.30)$$

に注意すると、(9.26) の $l=0$ の項は

$$\left(\frac{1 - (t\bar{t})^{1-1/5}}{1 - (t\bar{t})^{1/5}} \right)^5 \Big|_{\text{int}} = \left(1 + (t\bar{t})^{1/5} + (t\bar{t})^{2/5} + (t\bar{t})^{3/5} \right)^5 \Big|_{\text{int}} \quad (9.31)$$

$$= 1 + 101(t\bar{t}) + 101(t\bar{t})^2 + (t\bar{t})^3 \quad (9.32)$$

となり、 $l \neq 0$ の項は

$$\sum_{l=1}^4 \left[(t\bar{t})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} \left(\frac{t}{\bar{t}} \right)^{\frac{1}{5}l - [\frac{1}{5}l] - \frac{1}{2}} \right]^5 = \sum_{l=1}^4 (t\bar{t})^{\frac{5}{2}-1} \left(\frac{t}{\bar{t}} \right)^{l-\frac{5}{2}} \quad (9.33)$$

$$= \sum_{l=1}^4 t^{l-1} \bar{t}^{4-l} \quad (9.34)$$

$$= \sum_{p=0}^3 t^p \bar{t}^{3-p} \quad (9.35)$$

となる。

同様に、 \mathbb{P}^3 の 4 次超曲面 (これは K3 曲面である) の Hodge 数を (9.26) を用いて計算してみると、

$$\left(\frac{1-t^3}{1-t} \right)^4 = 1 + 4t + 10t^2 + 16t^3 + 19t^4 + 16t^5 + 10t^6 + 4t^7 + t^8 \quad (9.36)$$

から、(9.26) の $l=0$ の項は

$$\left(\frac{1 - (t\bar{t})^{1-1/4}}{1 - (t\bar{t})^{1/4}} \right)^4 \Big|_{\text{int}} = \left(1 + (t\bar{t})^{1/4} + (t\bar{t})^{2/4} \right)^4 \Big|_{\text{int}} \quad (9.37)$$

$$= 1 + 19(t\bar{t}) + (t\bar{t})^2 \quad (9.38)$$

となり、 $l \neq 0$ の項は

$$\sum_{l=1}^3 \left[(t\bar{t})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \left(\frac{t}{\bar{t}} \right)^{\frac{1}{4}l - [\frac{1}{4}l] - \frac{1}{2}} \right]^4 = \sum_{l=1}^3 (t\bar{t})^{2-1} \left(\frac{t}{\bar{t}} \right)^{l-2} \quad (9.39)$$

$$= \sum_{l=1}^3 t^{l-1} \bar{t}^{3-l} \quad (9.40)$$

$$= \sum_{p=0}^2 t^p \bar{t}^{2-p} \quad (9.41)$$

となる。

Vafa の公式 (9.26) を用いて、7555 個の重み付きに対応する 3 次元 Calabi–Yau 多様体に対して、期待される Hodge 数をプロットしてみると、その中に位相的ミラー対が数多く見つかった事は、代数幾何学者に驚きを持って迎えられた。[CLS90, Fig. 1] にある印象的な図を見よ。一方、7555 個の中の 850 個は、7555 個の中に位相的ミラーを持たない。従って、Vafa の公式を数学的に理解することや、残りの 850 個に対する位相的ミラーを見つけることが次の問題になる。これらの問題に対するアプローチとして最も有名なものはトーリック幾何を用いる方法であるが、これを議論する前に、より準備が少なく済む可逆多項式を用いる方法を紹介しよう。

10 可逆多項式

次の条件を満たす多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を可逆多項式 (invertible polynomial) と呼ぶ：

1. 非負整数を成分に持つ可逆行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ が存在して

$$f = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ij}} \quad (10.1)$$

となる。

2. f は原点に孤立臨界点を持つ。

原点に孤立臨界点を持つことはしばしば非退化 (non-degenerate) と呼ばれる (例えば [AGZV85, p. 192] を見よ)。これは、Morse 理論における臨界点の非退化性とは違うことに注意せよ。

多項式 $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ と $g(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ に対し、 f と g の Sebastiani–Thom 和 (Sebastiani–Thom sum) は

$$f(x_1, \dots, x_m) + g(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n] \quad (10.2)$$

で定義される。

演習 10.1. 任意の可逆多項式は次の 3 つの型の多項式の Sebastiani–Thom 和である事を示せ (ヒント: [KS92b] を見よ)：

- Fermat 型 (Fermat type): x^p .
- 鎖型 (chain type): $x_1^{p_1} x_2 + x_2^{p_2} x_3 + \dots + x_{n-1}^{p_{n-1}} x_n + x_n^{p_n}$.
- ループ型 (loop type): $x_1^{p_1} x_2 + x_2^{p_2} x_3 + \dots + x_{n-1}^{p_{n-1}} x_n + x_n^{p_n} x_1$.

f が可逆多項式であれば、

$$\check{f} = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n x_j^{a_j i}. \quad (10.3)$$

で定義される f の転置多項式 (Berglund–Hübsch transpose) も可逆になる。

A が可逆行列であるという条件から、任意の可逆多項式は重み付き斉次多項式になり、対応する重みは定数倍を除いて一意的に決まる。最大公約数が 1 であるという条件で定数倍の自由度を固定して得られる重みを

$$(a_1, \dots, a_n; h) := \deg(x_1, \dots, x_n; f) \quad (10.4)$$

と書き、簡約ウエイト系 (reduced weight system) と呼ぶ。

与えられた簡約ウエイト系に対し、対応する可逆多項式はたとえ存在しても一つには定まらない。例えば、可逆多項式

$$\begin{array}{l|l} 4F_1 & x^4 + y^4 + z^4 + w^4 \\ 2F_1 + C_2 & x^4 + y^4 + z^3w + w^4 \\ 2F_1 + L_2 & x^4 + y^4 + z^3w + w^3z \\ F_1 + C_3 & x^4 + y^3z + z^3w + w^4 \\ F_1 + L_3 & x^4 + y^3z + z^3w + w^3y \\ 2C_2 & x^3y + y^4 + z^3w + w^4 \\ C_2 + L_2 & x^3y + y^4 + z^3w + w^3z \\ 2L_2 & x^3y + y^3z + z^3w + w^3z \\ C_4 & x^3y + y^3z + z^3w + w^4 \\ L_4 & x^3y + y^3z + z^3w + w^3x \end{array} \quad (10.5)$$

に対応する簡約ウエイト系はどれも $(1, 1, 1, 1; 4)$ になる。また、準滑らかな重み付き Calabi–Yau 超曲面を定義する重みに対し、対応する可逆多項式が必ず存在するとも限らない。例えば、K3 曲面を与える 95 個の重みの 1 つである $(2, 4, 5, 11; 22)$ は、可逆多項式を構成するために使える単項式を

$$x^{11}, x^9y, xy^5, xz^4, w^2 \quad (10.6)$$

の 5 つしか持たないが、これで可逆多項式を構成することはできないので、この重みに対応する可逆多項式は存在しないことが分かる。同様の考察を 95 個のそれぞれの重みに対して行うことにより、95 個のうちの 91 個は対応する可逆多項式を持つが、

No.	重み
75	$(2, 4, 5, 11; 22)$
90	$(4, 6, 7, 17; 34)$
91	$(5, 6, 8, 19; 38)$
93	$(3, 4, 10, 17; 34)$

(10.7)

の 4 つは対応する可逆多項式を持たない事が分かる*11。

可逆多項式 (10.1) は重み付き斉次多項式なので、対応する重み付き射影空間の中の超曲面

$$Y := \{[x_1 : \dots : x_n] \in \mathbf{P}(a_1, \dots, a_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\} \quad (10.8)$$

を定める。可逆多項式が原点のみに臨界点を持つことから、 Y は準滑らかになる。 Y が (一般には Gorenstein 商特異点を持つ) Calabi–Yau 多様体になるための必要十分条件は

$$a_1 + \dots + a_n = h \quad (10.9)$$

*11 橋本健治氏、三浦真人氏との議論による。

である。

可逆多項式 (10.1) に対し、その極大対角対称性のなす群 (the group of maximal diagonal symmetries) が⁸

$$G_{\max} := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{G}_m)^n \mid \text{任意の } i = 1, \dots, n \text{ に対して } \prod_{j=1}^n \alpha_j^{a_{ij}} = 1 \right\} \quad (10.10)$$

で定義される。対角部分群への埋め込み

$$(\mathbb{G}_m)^n \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (10.11)$$

によって、極大対角対称性のなす群は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群と同一視される。また、同様に、転置多項式 (10.3) に対し、その極大対角対称性のなす群が

$$\check{G}_{\max} := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{G}_m)^n \mid \text{任意の } i = 1, \dots, n \text{ に対して } \prod_{j=1}^n \alpha_j^{a_{ji}} = 1 \right\} \quad (10.12)$$

で定義される。 \check{f} の定義する重み付き射影空間の超曲面を \check{Y} とおくと、 \check{G}_{\max} は \check{Y} に自然に作用する。商空間が再び (一般には Gorenstein 商特異点を持った) Calabi–Yau 多様体になるように、 \check{G}_{\max} そのものではなくその部分群

$$\check{G} := \check{G}_{\max} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \quad (10.13)$$

を考える。素朴には \check{Y}/\check{G} が Y のミラーであると言いたいのだが、 Y や \check{Y}/\check{G} は一般に Gorenstein 商特異点を持つので、代わりに対応する滑らかな軌道体を考える^{*12*13}。以下でこれを正確に定式化しよう。

任意の可逆多項式は、単に重み付き斉次多項式であるだけでなく、 $n+1$ 個の元 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{c}$ で生成され、 n 個の関係式

$$a_{i1}\vec{x}_1 + \dots + a_{in}\vec{x}_n = \vec{c}, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.14)$$

を持つ階数 1 の Abel 群 L による多項式環の $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ の次数付け

$$\deg x_i = \vec{x}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.15)$$

に関して次数 \vec{c} の斉次多項式である。この L は

$$K := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{G}_m)^n \mid \alpha_1^{a_{11}} \dots \alpha_n^{a_{1n}} = \dots = \alpha_1^{a_{n1}} \dots \alpha_n^{a_{nn}}\} \quad (10.16)$$

で定義される群の指標群であり、写像

$$\begin{array}{ccc} K & \rightarrow & \mathbb{G}_m \\ \cup & & \cup \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \mapsto & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{array} \quad (10.17)$$

^{*12} 多様体はユークリッド空間を局所モデルに持つが、ユークリッド空間とそれに作用する群の組を局所モデルを持つ多様体の拡張概念が軌道体である。例えば、 \mathbb{C} を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用 $z \mapsto -z$ で割った空間は、位相空間としては \mathbb{C} と同相であるが、軌道体としては同型でない。また、代数幾何的には軌道体は滑らかな Deligne–Mumford スタック (smooth Deligne–Mumford stack) として取り扱われる。スタックについての入門的な文献としては例えば [Fan01, Góm01, Vis05]、教科書としては [LMB00, Ols16] などがある。また、Stacks project と呼ばれるオープンソースの文献があり、参考文献として大変便利であるが、量が膨大であり、通読は事実上不可能である。

^{*13} 商特異点がクレパントな特異点解消を持つ場合は、対応する軌道体を考える代わりにクレパントな特異点解消を考えることも出来る。3 次元以下では Gorenstein 商特異点は必ずクレパントな特異点解消を持つが、4 次元以上では存在するとは限らない。また、2 次元の Gorenstein 特異点に対しては、クレパントな特異点解消は最小特異点解消 (すなわち、例外因子が自己交点数が -1 である曲線を含まないような特異点解消) と一致し、従って一意であるが、3 次元以上ではクレパントな特異点解消は存在しても一意的とは限らない。これは、一つの Calabi–Yau 多様体に対して複数のミラーが存在すると解釈することもできるし、双有理同値な Calabi–Yau 多様体は区別すべきでないとして解釈することもできる。

の核は極大対角対称性のなす群 G_{\max} と自然に同一視される;

$$1 \rightarrow G_{\max} \rightarrow K \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1. \quad (10.18)$$

G_{\max} の指標群を

$$G_{\max}^{\vee} := \text{Hom}(G_{\max}, \mathbb{G}_m) \quad (10.19)$$

とおくと、完全列 (10.18) から

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow L \rightarrow G_{\max}^{\vee} \rightarrow 1 \quad (10.20)$$

を得る。 G_{\max} が有限 Abel 群であることから、 G_{\max} と G_{\max}^{\vee} は (non-canonical に) 同型である。 A の逆行列を

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)} & \varphi_1^{(2)} & \cdots & \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(1)} & \varphi_2^{(2)} & \cdots & \varphi_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^{(1)} & \varphi_n^{(2)} & \cdots & \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

と書くと、 G_{\max} は

$$\rho_k = \left(\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\varphi_1^{(k)}\right), \dots, \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\varphi_n^{(k)}\right) \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (10.22)$$

で生成されている。

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \cdots + \varphi_i^{(n)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.23)$$

とおいて、 $(a_1, \dots, a_n; h)$ を

$$h := \min \{k \in \mathbb{Z}^{>0} \mid \text{任意の } i = 1, \dots, n \text{ に対し } k\varphi_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (10.24)$$

$$a_i := h\varphi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.25)$$

で定義すると、 $(a_1, \dots, a_n; h)$ は多項式 f を重み付き斉次にするような簡約ウエイト系である。 f が原点に孤立臨界点を持つので、

$$\tilde{Y} := \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(f) \quad (10.26)$$

は原点のみに特異点を持つ代数多様体であり、商スタック

$$\mathbb{Y} := \left[(\tilde{Y} \setminus \mathbf{0}) / \mathbb{G}_m \right] \quad (10.27)$$

は滑らかな軌道体になる。

同様に、 f の転置 \check{f} の極大対角対称性の群 \check{G}_{\max} の生成元は、 \check{A}^{-1} の列ベクトル $(\check{\varphi}_i^{(k)})_{i=1}^n$ (これは A^{-1} の行ベクトルでもある) を用いて

$$\check{\rho}_k = \left(\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\check{\varphi}_1^{(k)}\right), \dots, \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\check{\varphi}_n^{(k)}\right) \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (10.28)$$

と表される。

$$\check{\varphi}_i = \check{\varphi}_i^{(1)} + \cdots + \check{\varphi}_i^{(n)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.29)$$

とにおいて、 $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_n; \check{h})$ を

$$\check{h} := \min \{k \in \mathbb{Z}^{>0} \mid \text{任意の } i = 1, \dots, n \text{ に対し } k\check{\varphi}_i \in \mathbb{Z}\}, \quad (10.30)$$

$$\check{a}_i := \check{h}\check{\varphi}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.31)$$

で定義すると、 $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_n; \check{h})$ は多項式 \check{f} を重み付き斉次にするような簡約ウエイト系である。準同型 $\check{\varphi}: \mathbb{G}_m \rightarrow \check{K}$ を

$$\check{\varphi}(\alpha) = (\alpha^{h\check{\varphi}_1}, \dots, \alpha^{h\check{\varphi}_n}) \quad (10.32)$$

で定義すると、これは単射になる。完全列 (10.18) の転置

$$1 \rightarrow \check{G}_{\max} \rightarrow \check{K} \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \quad (10.33)$$

によって \check{G}_{\max} を \check{K} の部分群と同一視すると、 $\text{Im } \check{\varphi} \cap \check{G}_{\max}$ は

$$\check{J} := (\exp(2\pi\sqrt{-1}\check{\varphi}_1), \dots, \exp(2\pi\sqrt{-1}\check{\varphi}_n)) \quad (10.34)$$

で生成されている。

$$\check{G} := \check{G}_{\max} \cap \text{SL}_n(\mathbb{C}) \quad (10.35)$$

とおくと、

$$\overline{\check{G}} := \check{G} / \langle \check{J} \rangle \quad (10.36)$$

は \check{Y} に自然に作用するので、対応する軌道体を $[\check{Y}/\overline{\check{G}}]$ とおく。この様にして Calabi–Yau 軌道体の組 $(\check{Y}, [\check{Y}/\overline{\check{G}}])$ を作ることを転置ミラー構成 (transposition mirror construction) と呼び、Greene–Plesser [GP90] による軌道体ミラー構成 (orbifold mirror construction) (の特別な場合) の一般化として Berglund–Hübsch [BH93] によって導入された。

定理 10.1 ([CR11, Theorem 2]). Calabi–Yau 条件 (10.9) を満たす任意の可逆多項式 f に対し、 \check{Y} と $[\check{Y}/\overline{\check{G}}]$ は位相的ミラー対である。

ここで \check{Y} と $[\check{Y}/\overline{\check{G}}]$ が軌道体であるので、位相的ミラー対の定義には通常の Hodge 数ではなく後述する軌道体 Hodge 数 (orbifold Hodge number) が用いられる。

[CR11, Theorem 2] はより強く、[BH95, Kra] によって群作用を含む形で一般化された転置ミラー構成が位相的ミラー対を与える事を証明している。

定理 10.2 ([CR11, Theorem 2]). Calabi–Yau 条件 (10.9) を満たす任意の可逆多項式 f と極大対角対称性のなす群 G_{\max} の部分群 G で $\langle J \rangle \subset G \subset \text{SL}_n(\mathbb{C})$ を満たすものに対し、 G の転置を

$$\check{G} = \left\{ \prod_{i=1}^n \check{\rho}_i^{r_i} \left| (r_1 \ \dots \ r_n) A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \text{ for all } \prod_{i=1}^n \rho_i^{a_i} \in G \right. \right\} \quad (10.37)$$

で定義すると、軌道体 $[\check{Y}/\overline{\check{G}}]$ と $[\check{Y}/\overline{\check{G}}]$ は位相的ミラー対である。

ここで、 \overline{G} と $\overline{\check{G}}$ は

$$\overline{G} := G / \langle J \rangle, \quad \overline{\check{G}} := \check{G} / \langle \check{J} \rangle \quad (10.38)$$

で定義される。自明群 1 の転置は \check{G}_{\max} であり、 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap G_{\max}$ と $\langle J \rangle$ は転置で入れ替わる。

[CR10] の主定理は位相的ミラー対称性のレベルにおけるシンプレクティック幾何側の所謂 Calabi–Yau/Landau–Ginzburg 対応 (Calabi–Yau/Landau–Ginzburg correspondence) であり、上記の Calabi–Yau 軌道体に対する位相的ミラー対称性は、この対応によって [Kra] によって示された Landau–Ginzburg 軌道体に対する位相的ミラー対称性に帰着することによって示されている。

11 軌道体コホモロジーと Vafa の公式

滑らかな Deligne–Mumford スタックの軌道体コホモロジー (orbifold cohomology) は、惰性スタックのコホモロジーとして定義される：

$$H_{\mathrm{orb}}^{p,q}(\mathbb{Y}) := \bigoplus_{Z \subset \mathrm{I}\mathbb{Y}} H^{p-a(Z), q-a(Z)}(Z). \quad (11.1)$$

ここで惰性スタック (inertia stack) はスタックの圏におけるファイバー積

$$\mathrm{I}\mathbb{Y} := \mathbb{Y} \times_{\mathbb{Y} \times_{\mathbb{Y}} \mathbb{Y}} \mathbb{Y} \quad (11.2)$$

として定義され、大域商に対しては

$$\mathrm{I}[M/G] \cong \left[\left(\coprod_{g \in G} M^g \right) / G \right] \quad (11.3)$$

$$\cong \coprod_{g \in G / \mathrm{Ad}(G)} [M^g / Z(g)] \quad (11.4)$$

という具体的な記述を持つ。ここで、 M^g は g 作用の固定点集合であり、 $h \in G$ は $\coprod_{g \in G} M^g$ に

$$M^g \rightarrow M^{hgh^{-1}}, \quad x \mapsto hg \quad (11.5)$$

で作用する。また、 $Z(g)$ は g の中心化群である。直感的には、「 $\mathrm{I}\mathbb{Y}$ の点」は「 \mathbb{Y} の点とその点の自己同型の組」である。軌道体コホモロジーを \mathbb{Y} ではなく惰性スタックのコホモロジーとして定義するのは、捻れ安定曲線 (twisted stable map) からの評価写像 (evaluation map) が \mathbb{Y} ではなく $\mathrm{I}\mathbb{Y}$ (より正確には剛化された惰性スタック (rigidified inertia stack)) に値を取る事から来ている。

(11.1) の右辺の直和は惰性スタック $\mathrm{I}\mathbb{Y}$ の連結成分 \mathcal{Z} を走る。各 \mathcal{Z} は再び滑らかになるので、その粗モジュライスキーム Z は高々商特異点を持ち、その \mathbb{Q} 係数コホモロジーは純 (pure) な Hodge 構造を持つ。

与えられた連結成分 $\mathcal{Z} \subset \mathrm{I}\mathbb{Y}$ の上の一般の点を、 \mathbb{Y} の局所的な表示 $[M/G]$ と $x \in M$ 及び $g \in G$ を用いて (x, g) と表した時、 g の $T_x M$ への作用の固有値の集合を重複を込めて $\{\exp(2\pi\sqrt{-1}a_i^g)\}_{i=1}^{\dim M}$ (但し $0 \leq a_i^g < 1$) と書いて、 \mathcal{Z} の年齢 (age) が

$$a(g) := \sum_{i=1}^{\dim M} a_i^g \quad (11.6)$$

で定義される。(11.1) における年齢による次数のずらし (age shift) は川崎徹郎による Riemann–Roch 定理 (Kawasaki–Riemann–Roch theorem) [Kaw79] を通して、軌道体 (量子) カップ積が次数を保つために必要である。軌道体 (量子) コホモロジーへの入門としては、例えば [Abr08] を見よ。

$$\mathbb{Y} := [(f^{-1}(0) \setminus \mathbf{0}) / \mathbb{G}_m] \quad (11.7)$$

の惰性スタックは

$$\mathrm{I}\mathbb{Y} = \coprod_{\gamma \in \mathbb{G}_m} \mathbb{Y}_\gamma \quad (11.8)$$

で与えられる。ここで、 $\gamma \in \mathbb{G}_m$ に対し、 $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^1$ を γ 不変部分空間 $(\mathbb{A}^n)^\gamma \subset \mathbb{A}^n$ に制限して得られる多項式を f_γ と書いた時、

$$\mathbb{Y}_\gamma := [(f_\gamma^{-1}(0) \setminus \mathbf{0}) / \mathbb{G}_m] \quad (11.9)$$

である。従って、軌道体コホモロジーは

$$H_{\mathrm{orb}}^{p,q}(\mathbb{Y}) \cong \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{G}_m} H^{p-a(\gamma), q-a(\gamma)}(Y_\gamma) \quad (11.10)$$

で与えられる。 $(\mathbb{A}^n)^\gamma = \mathbf{0}$ の時 \mathbb{Y}_γ は空なので、(11.10)における直和は有限である。

射影超曲面のコホモロジーの Griffiths による計算 [Gri69] の Steenbrink による重み付き射影超曲面への拡張 [Ste77] によって、 Y の中間次元のコホモロジーは

$$H^{p, n-2-p}(X) \cong \mathrm{Jac}(f)_{h(n-1-p) - \sum_{i=1}^n a_i} \quad (11.11)$$

で与えられる。ここで、右辺の元 P に対し、左辺の元が

$$\mathrm{Res} \frac{P\Omega}{f^{n-1-p}} \quad (11.12)$$

で定義される。ただし、

$$\Omega = \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i \bigwedge_{j \neq i} dx_j \quad (11.13)$$

である。[Dol82, Theorem 4.3.2] や [CK99, Section 5.3] も見よ。Calabi–Yau 条件

$$h = \sum_{i=1}^n a_i \quad (11.14)$$

が成り立つ時、

$$H^{p, n-2-p}(X) \cong \mathrm{Jac}(W)_{h(n-2-p)} \quad (11.15)$$

となる。また、中間次元以外では Lefschetz の定理によって、重み付き射影空間のコホモロジーと一致する。 Y_γ のコホモロジーも同様にして計算される。

Vafa の公式は、直接的には、 \mathbb{Y} の軌道体 Hodge 数ではなく Landau–Ginzburg 軌道体 $([\mathbb{A}^n/G], f)$ の Hodge 数を数えている。但し、 $G := \mu_h := \mathrm{Ker}((-)^h: \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m)$ と置いた。Landau–Ginzburg 軌道体やその Hodge 数などの概念はここでは定義しないが、基本的な哲学は、軌道体とその上の正則関数の組を空間と思うというものである。正則関数が Bott–Morse 型であれば、Landau–Ginzburg 模型を考えると臨界点のなす部分空間を考えることはほぼ等価だと期待されている。Landau–Ginzburg 軌道体と Calabi–Yau 超曲面の関係が 10 節の最後で言及した CY/LG 対応である。これは $G \subset \mathrm{SL}_n$ に対する McKay 対応にも関わる。可逆多項式に対しては、CY/LG 対応を経由することによって、Vafa 公式が Calabi–Yau 超曲面の Hodge 数を正しく計算する事が分かる。可逆多項式を持たない準滑らかな Calabi–Yau 超曲面の軌道体 Hodge 数については、例えば [Bat] を見よ。

12 トーリック多様体

開稠密軌道を持つような代数群の作用を持つ多様体を概等質多様体 (prehomogeneous variety) と呼ぶ。 X を G の概等質多様体とし、開稠密軌道を U とおく。点 $x \in X$ における G 作用の固定化部分群を

$$Z_x := \{g \in G \mid t \cdot x = x\} \quad (12.1)$$

とおくと、

$$Z_{g \cdot x} = \text{Ad}_g(Z_x) := \{ghg^{-1} \in G \mid h \in Z_x\} \quad (12.2)$$

である。任意の $x \in X$ に対し、 x を通る G 作用の軌道 $\mathcal{O}_x := G \cdot x$ は等質空間であり、

$$\mathcal{O}_x \cong G/Z_x \quad (12.3)$$

が成り立つ。 G が可換であれば、同じ G 軌道に含まれる点の固定化部分群は等しく、また、 x が \mathcal{O}_y の閉包に含まれる時、 $Z_x \supset Z_y$ となる。従って、開稠密軌道の固定化部分群は全ての点の固定化部分群にもなっており、これに関する商を取ることによって、 G は開稠密軌道に自由に作用する (従って、 G は X に忠実 (faithful) に作用する) と仮定して良い。

乗法群 \mathbb{G}_m の直積をトーラスと呼び^{*14}、トーラスの概等質多様体であるような正規代数多様体をトーリック多様体と呼ぶ。トーラスの部分群による商は再びトーラスなので、トーリック多様体はトーラスを開稠密軌道として含んでいると仮定して良い。言い換えると、トーリック多様体とはトーラス T の正規多様体 X への部分コンパクト化で、 T の自分自身への作用が X への作用に伸びるようなものを指す。トーリック多様体の典型例としては、アフィン空間 \mathbb{A}^n や射影空間 \mathbb{P}^n 、あるいはもう少し一般に重み付き射影空間 $\mathbf{P}(a_1, \dots, a_{n+1})$ などがある。重み付き射影空間 $\mathbf{P}(a_1, \dots, a_{n+1})$ にはトーラス $(\mathbb{G}_m)^n$ が $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \cdot [x_1 : \dots : x_{n+2}] := [\alpha_1 x_1 : \dots : \alpha_{n+1} x_{n+1} : x_{n+2}]$ で作用し、全ての座標が 0 でないような点からなる部分集合が開稠密軌道になっている。また、トーラス自身もトーリック多様体の例になっている。

トーラス T が与えられた時、 T の 1 パラメーター部分群および指標のなす自由アーベル群を

$$N := \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T), \quad M := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \quad (12.4)$$

とし、

$$N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}, \quad M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}, \quad (12.5)$$

とおく。 $M \times \mathbb{R}$ の有限部分集合 S を用いて

$$\{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \text{任意の } (m, \lambda) \in S \text{ に対して } \langle n, m \rangle + \lambda \geq 0\} \quad (12.6)$$

で定義される $N_{\mathbb{R}}$ の部分集合を polyhedron と呼び、有界な polyhedron を多面体 (polytope) と呼ぶ。多面体は、 $N_{\mathbb{R}}$ の有限個の点の凸包として定義する事もできる。特に、 N の有限部分集合の凸包 (convex hull, その集合を含む最小の凸集合) として与えられるような多面体を格子多面体 (lattice polytope) と呼ぶ。

$\mathbb{R}^{>0}$ の作用で不変な $N_{\mathbb{R}}$ の部分集合を錐 (cone) と呼び、錐であるような polyhedron を多面錐 (polyhedral cone) と呼ぶ。 $N_{\mathbb{R}}$ の部分集合 σ が凸 (convex) であるとは、 σ の任意の 2 点に対し、それを結ぶ線分が σ に含

^{*14} 一般に、平坦準コンパクト位相に関して局所的に乗法群の直積と同型であるような群スキームのことをトーラスと呼ぶ。この条件は体上では閉体に基底変換すると乗法群の直積と同型になることを意味し、閉体上では乗法群の直積になる。

まれる事を指すのであった。多面錐は、直線を含まない時に強凸 (strongly convex) と呼ばれる。 N の有限部分集合によって生成される (すなわち、その集合を含む最小の錐として与えられる) 多面錐を有理多面錐 (rational polyhedral cone) と呼ぶ。面を取る操作と共通部分を取る操作で閉じているような有理強凸多面錐の集合 Σ を扇 (fan) と呼ぶ。

トーリック多様体 X を T 軌道に分解すると、それぞれの T 軌道は T の適当な 1 パラメーター部分群 $n \in N$ を用いて

$$n(0)(T) := \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} n(s)(t) \in X \mid t \in T \subset X \right\} \quad (12.7)$$

と表すことが出来る。 T 軌道 $\mathcal{O} \subset X$ に対し、 $\{n \in N \mid n(0)(T) = \mathcal{O}\}$ を含む最小の閉凸錐を $\sigma_{\mathcal{O}}$ とおくと、

$$\Sigma := \{\sigma_{\mathcal{O}} \mid \mathcal{O} \text{ は } X \text{ の } T \text{ 軌道}\} \quad (12.8)$$

は扇になる。

例としてまず $X = T = (\mathbb{G}_m)^2$ の場合を考えよう。 X は唯一つの T 軌道を持ち、対応する閉凸錐は

$$\sigma_T := \{(0, 0)\} \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2 \quad (12.9)$$

となるので、 X に対応する扇は

$$\Sigma = \{\sigma_T\} \quad (12.10)$$

である。次に、 T を部分コンパクト化して $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m$ にすると、 $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m$ への T 作用 $(t_1, t_2) := (x_1, x_2) \mapsto (t_1 x_1, t_2 x_2)$ の軌道は

$$T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}, \quad (12.11)$$

$$\mathcal{O}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m \mid x_1 = 0, x_2 \neq 0\}, \quad (12.12)$$

$$(12.13)$$

の 2 つであり、対応する閉凸錐は

$$\sigma_T = \{(0, 0)\}, \quad (12.14)$$

$$\sigma_{\mathcal{O}_1} = \{(n_1, 0) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_1 \geq 0\} \quad (12.15)$$

となる。これを更に部分コンパクト化して \mathbb{A}^2 にすると、作用の軌道は、

$$T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}, \quad (12.16)$$

$$\mathcal{O}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_1 = 0, x_2 \neq 0\}, \quad (12.17)$$

$$\mathcal{O}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2 = 0\}, \quad (12.18)$$

$$\mathcal{O}_{12} = \{(0, 0)\} \quad (12.19)$$

の 4 つであり、対応する閉凸錐は

$$\sigma_T = \{(0, 0)\}, \quad (12.20)$$

$$\sigma_{\mathcal{O}_1} = \{(n_1, 0) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_1 \geq 0\}, \quad (12.21)$$

$$\sigma_{\mathcal{O}_2} = \{(0, n_2) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_2 \geq 0\}, \quad (12.22)$$

$$\sigma_{\mathcal{O}_{12}} = \{(n_1, n_2) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_1 \geq 0 \text{ かつ } n_2 \geq 0\} \quad (12.23)$$

となる。この \mathbb{A}^2 を更にコンパクト化して \mathbb{P}^2 にすると、新たに 3 つの軌道

$$\mathcal{O}_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 = 0, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}, \quad (12.24)$$

$$\mathcal{O}_{01} = \{[0 : 0 : 1]\}, \quad (12.25)$$

$$\mathcal{O}_{02} = \{[0 : 1 : 0]\} \quad (12.26)$$

が付け加わる。対応する閉凸錐は

$$\sigma_{\mathcal{O}_0} = \mathbb{R}^{\geq 0} \cdot (-1, -1), \quad (12.27)$$

$$\sigma_{\mathcal{O}_{01}} = \{(n_1, n_2) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_2 \leq n_1, n_2 \leq 0\}, \quad (12.28)$$

$$\sigma_{\mathcal{O}_{02}} = \{(n_1, n_2) \in N_{\mathbb{R}} \mid n_2 \geq n_1, n_1 \leq 0\} \quad (12.29)$$

で与えられる。

一方、 \mathbb{A}^2 や \mathbb{P}^2 を原点で爆発すると、多面錐 $\sigma_{\mathcal{O}_{12}}$ が 3 つの多面錐

$$\{(n_1, n_2) \in \sigma_{\mathcal{O}_{12}} \mid n_1 \geq n_2\}, \quad (12.30)$$

$$\{(n_1, n_2) \in \sigma_{\mathcal{O}_{12}} \mid n_1 = n_2\}, \quad (12.31)$$

$$\{(n_1, n_2) \in \sigma_{\mathcal{O}_{12}} \mid n_1 \leq n_2\} \quad (12.32)$$

に分割される。

N_1 上の扇 Σ_1 と N_2 上の扇 Σ_2 に対し、 Σ_1 から Σ_2 への扇の射とは、Abel 群の準同型 $f: N_1 \rightarrow N_2$ で、任意の $\sigma \in \Sigma_1$ に対してある $\tau \in \Sigma_2$ が存在して $f(\sigma) \subset \tau$ となるようなものを指す。扇のなす圏は、トーリック多様体と (稠密トーラスの準同型に関する) トーラス同変写像のなす圏と同値である。

トーリック多様体とその上の豊富なトーラス同変直線束の組 (X, L) を偏極トーリック多様体 (polarized toric variety) と呼ぶ。任意の偏極トーリック多様体 (X, L) に対して、ある polyhedron Δ が存在して、トーラスの表現として

$$H^0(L) \cong \mathbb{C}[M \cap \Delta] \quad (12.33)$$

が成り立つ。ここで、右辺は $M \cap \Delta$ を基底とする線形空間を指す。 X が完備なら Δ は格子多面体になる。逆に、格子多面体 Δ に対し、 $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}[M \cap i\Delta]$ は自然に \mathbb{C} 代数の構造を持ち、その Proj は偏極トーリック多様体を与える。

多面体と扇は双対の関係にある。例えば、多面体の余次元 1 の面は扇の 1 次元錐に対応し、トーリック多様体のトーラス不変な因子を与える。また、多面体の頂点は扇の余次元 0 の錐に対応し、トーリック多様体のトーラス固定点を与える。

13 トーリックミラー構成

N を階数 d の自由 Abel 群とし、 $M := \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ とおく。 $M_{\mathbb{R}}$ の多面体 Δ に対し、その極双対 (polar dual) が

$$\Delta^{\circ} := \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \text{任意の } m \in \Delta \text{ に対して } \langle m, n \rangle \geq -1\} \quad (13.1)$$

で定義される。定義から $\Delta = (\Delta^{\circ})^{\circ}$ が容易に分かる。格子多面体 Δ の極双対 Δ° が再び格子多面体になる時、 Δ は反射的 (reflexive) と言われる [Bat94]。反射的多面体の同型類は、Gorenstein トーリック Fano 多様体 (すなわち、反正準因子が豊富な Cartier 因子になるような完備トーリック多様体) の同型類と 1 対 1 に対応する。

X を Gorenstein トーリック Fano 多様体とし、トーリック素因子の集合を I とおく。 I の分割 $I = I_1 \amalg \cdots \amalg I_r$ で、任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $E_i = \sum_{D \in I_i} D$ がネフな Cartier 因子になるようなものをネフ分割 (nef-partition) と呼ぶ [Bor]。一般に、Cartier 因子について

$$\text{globally generated} \Leftrightarrow \text{base point free} \Rightarrow \text{semi-ample (何倍かすると base point free)} \Rightarrow \text{nef}$$

であるが、トーリック多様体ではネフなら大域切断で生成されていることに注意せよ。

ネフ分割は $-K_X$ の分割

$$-K_X = E_1 + \cdots + E_r \quad (13.2)$$

を引き起こす。 $H^0(\mathcal{O}_X(E_i))$ に対応する多面体を Δ_i とおくと、(13.2) から Δ の Minkowski 和への分解

$$\Delta = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r \quad (13.3)$$

が得られる。これを Δ のネフ分割と呼ぶ。

代数多様体 X 上の階数 r のベクトル束 E の切断 s が $x \in X$ で非退化 (non-degenerate) であるとは、 E の局所枠 $(e_i)_{i=1}^r$ を用いて s を局所的に $\sum_{i=1}^r f_i e_i$ と表した時に、 (f_1, \dots, f_r) が正則列であることを指す。

定理 13.1. [Muk92, Theorem 1.10] 滑らかな代数多様体 X 上のベクトル束 E が大域切断で生成されている時、 E の一般の切断 s は非退化であり、 s の零点 Y は滑らかである。

反射的多面体のネフ分割は、 $\mathcal{O}_X(E_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(E_r)$ の一般の切断の零点として $d - k$ 次元 Calabi–Yau 多様体を与える。

次元を固定した時に、反射的多面体のネフ分割から得られる Calabi–Yau 完全交叉の Hodge 数が有界かという問いは [BN08, Question 4.21] で提出され、[BL15] によって解決された:

定理 13.2 ([BL15, Corollary 5.3]). 任意の n に対し、Gorenstein toric Fano 多様体のネフ完全交叉として得られる n 次元 Calabi–Yau 多様体は双有理的に有界であり、従って Hodge 数も有界になる。

反射的多面体のネフ分割 (13.3) が与えられた時、双対ネフ分割 (dual nef-partition) が

$$\nabla_i := \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \text{任意の } j \text{ に対して } \langle \Delta_j, n \rangle \geq -\delta_{ij}\} \quad (13.4)$$

で定義され、

$$\Delta^\circ = \text{Conv}(\nabla_1 \cup \cdots \cup \nabla_r) \quad (13.5)$$

が成り立つ。さらに、

$$\nabla := \nabla_1 + \cdots + \nabla_r \quad (13.6)$$

は反射的多面体のネフ分割になり、

$$\nabla^\circ = \text{Conv}(\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r) \quad (13.7)$$

が成り立つ。ネフ分割が定義する Calabi–Yau 多様体と双対ネフ分割が定義する Calabi–Yau 多様体はミラーであろうと期待されている。こうして構成されたミラー (の候補) は、 $r = 1$ (超曲面) の場合は Batyrev ミラー、一般の r に対しては Batyrev–Borisov ミラーと呼ばれる。

反射的多面体に付随するトーリック Fano 多様体は一般に Gorenstein 特異点を持つ。一次元錐を変えずに扇を単体的になるまで細分することによって、正準因子を変えずに Gorenstein 商特異点のみを持つトーリック弱

Fano 多様体にすることは出来るが、4次元以上では Gorenstein 商特異点はクレパントな特異点解消を一般には持たない。このようなトーリック多様体の中の Calabi–Yau 完全交叉は、入れ物のトーリック多様体の特異点から来る商特異点を持つが、Vafa の公式はの場合にも Hodge 数になるべき数を与える。

Vafa の公式の与える「Hodge 数」を数学的に定式化して、位相的ミラー対称性を証明せよという問題について、おそらく最も有名な結果は、[BB96, Theorem 4.15] であろう。そこでは、反射的多面体のネフ分割から来る Batyrev–Borisov ミラー対 (Y, \check{Y}) が、高々 Gorenstein トロイダル特異点を持つ多様体に対して [BD96] によって導入された弦理論的 Hodge 数 (string-theoretic Hodge number) に対して

$$h_{\text{st}}^{p,q}(Y) = h_{\text{st}}^{p,n-q}(\check{Y}) \quad (13.8)$$

を満たすことが示された。

しかし、弦理論的 Hodge 数は一般には「正しい」概念ではないと考えられている：

問題 13.3 ([BM03, Remark 2.9]). 可換な固定化部分群を持つ軌道体で、その軌道体 Hodge 数が粗モジュライスキームの弦理論的 Hodge 数と一致しないような例を与えよ。

弦理論的 Hodge 数の改良として、弦的 Hodge 数 (stringy Hodge number) が高々対数的末端特異点を持つ代数多様体に対して [Bat98] で定義された。

トーリック多様体の部分多様体は、トーラス軌道と横断的に交わる時、非退化 (non-degenerate) と呼ばれる。Gorenstein トーリック多様体の非退化な完全交叉部分多様体に対しては、弦理論的 Hodge 数と弦的 Hodge 数は一致する [BM03, Corollary 2.7]。

弦理論的 Hodge 数と弦的 Hodge 数が異なる例は、[BM03, Remark 2.8] に見ることができる。

Kontsevich のモチーフ積分の理論 [DL99, Cra04] を軌道体に拡張することによって、軌道体の軌道体 Hodge 数は粗モジュライ空間の弦的 Hodge 数と一致する事が知られている [Yas04]。

Batyrev–Borisov ミラーと、後述する剛 Calabi–Yau 多様体のミラーを含む枠組みとして、次の概念が [BB97] で導入された：

定義 13.4 ([BB97]). $M_{\mathbb{R}}$ の d 次元有理強凸多面錐 K に対し、ある $\deg^{\vee} \in N$ が存在して K の全ての原始的生成元が $\langle -, \deg^{\vee} \rangle = 1$ で定義される $M_{\mathbb{R}}$ の超平面上にある時、 K は Gorenstein 錐 (Gorenstein cone) と呼ばれる。 K の双対錐 $K^{\vee} := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \text{任意の } n \in N \text{ に対して } \langle m, n \rangle \geq 0\}$ が再び Gorenstein 錐になる時、 K は反射的 Gorenstein 錐 (reflexive Gorenstein cone) と呼ばれる。反射的 Gorenstein 錐 K に対し、 K の次数元 $\deg^{\vee} \in N$ と K^{\vee} の次数元 $\deg \in M$ の対合 $\langle \deg^{\vee}, \deg \rangle \in \mathbb{Z}$ を K の指数 (index) と呼ぶ。

演習 13.1. Gorenstein 錐の次数元は一意的に定まることを示せ。

反射的 Gorenstein 錐 $K \subset M_{\mathbb{R}}$ に対し、

$$\Delta := \{m \in K \mid \langle m, \deg^{\vee} \rangle = 1\}, \quad \Delta^{\vee} := \{n \in K^{\vee} \mid \langle \deg, n \rangle = 1\} \quad (13.9)$$

は格子多面体になるが、その格子点の集合を

$$K_{(1)} := \Delta \cap M, \quad K_{(1)}^{\vee} := \Delta^{\vee} \cap N \quad (13.10)$$

とおく。

$\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ を格子多面体、 r を正の整数とする。 $r\Delta$ が内点に格子点 m を持ち、 $r\Delta - m$ が反射的である時、 Δ を指数 r の Gorenstein 多面体 (Gorenstein polytope of index r) と呼ぶ。

演習 13.2 ([BB97, Proposition 2.11]). Gorenstein 錐 $K \subset M_{\mathbb{R}}$ に対し、 K が指数 r の反射的 Gorenstein 錐であることと、

$$\Delta := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, \deg \rangle = 1\} \quad (13.11)$$

が指数 r の Gorenstein 多面体であることは同値であることを示せ。

$\overline{M}_{\mathbb{R}}$ の多面体 $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ に対し、その Cayley 多面体 (Cayley polytope) が

$$\Delta_1 * \dots * \Delta_r := \text{Conv} \{\Delta_1 \times e_1, \dots, \Delta_r \times e_r\} \quad (13.12)$$

で定義される。ここで $M_{\mathbb{R}} := \overline{M}_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}^r$ であり、 e_i は $\mathbb{R}^r \subset M_{\mathbb{R}}$ の i 番目の標準基底である。Cayley 多面体が生成する $M_{\mathbb{R}}$ の錐を Cayley 錐 (Cayley cone) と呼ぶ。

Δ の 2 つのネフ分割 $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ と $\Delta = \Delta'_1 + \dots + \Delta'_r$ が M の元の列 m_1, \dots, m_r によって $\Delta'_i := \Delta_i + m_i$ で関係している時、それらが定める一般の Calabi–Yau 完全交叉は同型であるが、対応する双対ネフ分割

$$\nabla = \nabla_1 + \dots + \nabla_r \quad (13.13)$$

と

$$\nabla' = \nabla'_1 + \dots + \nabla'_r \quad (13.14)$$

に付随する Calabi–Yau 完全交叉は一般には同型にならない。これを 2 重ミラー (double mirror) と呼ぶ。

次の概念は、Batyrev–Borisov ミラーに対してネフ分割よりも「より柔軟かつ概念的に優れた」([BL18, Section 2.2] の冒頭の言葉) 視点を提供する。

定義 13.5 ([BN08]). 指数 r の反射的 Gorenstein 錐 $K \subset M_{\mathbb{R}}$ に対し、 K の次数元 \deg^{\vee} が適当な $t_1, \dots, t_r \in K_{(1)}^{\vee}$ によって

$$\deg^{\vee} = t_1 + \dots + t_r \quad (13.15)$$

と表される時、 K は完全分解する (completely split) と言い、(13.15) を \deg^{\vee} の分解 (decomposition of \deg^{\vee}) と呼ぶ [BN08]。

\deg^{\vee} の分解は、 $K_{(1)}$ の分解

$$K_{(1)} = \prod_{i=1}^k K_{(1),i}, \quad K_{(1),i} := \{m \in K_{(1)} \mid \langle x, t_j \rangle = \delta_{ij}\} \quad (13.16)$$

を引き起こす。 $K_{(1),i}$ は M ではなく $\bigcap_{i=1}^t \text{Ann } t_i$ の部分集合とみなすことが出来る。 K が r 個の多面体 $\Delta_1, \dots, \Delta_r \subset \overline{M}_{\mathbb{R}}$ の Cayley 錐の時、 $\bigcap_{i=1}^t \text{Ann } t_i$ は \overline{M} と自然に同一視され、この同一視の下で $K_{(1),i}$ は $\Delta_i \cap \overline{M}$ と一致する。

例 13.6 ([BB97, Example 3.11]). \mathbb{R}^d の第一象限を σ とし、 $d = kr$ と仮定する。 \mathbb{Z}^d の部分 Abel 群 M を

$$M := \{(m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \mid m_1 + \dots + m_d \equiv 0 \pmod{k}\} \quad (13.17)$$

とおくと、 σ は M の指数 r の Gorenstein 錐になるが、2 つの格子多面体 $\Delta_1, \Delta_2 \subset \overline{M}_{\mathbb{R}}$ の Cayley 和

$$\{(\lambda m_1 + \mu m_2, \lambda, \mu) \in M_{\mathbb{R}} := \overline{M}_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^2 \mid m_1 \in \Delta_1, m_2 \in \Delta_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{\geq 0}\} \quad (13.18)$$

の形に表すことは出来ない。実際、(13.18) の形に表せれば、 Δ_1 の頂点 v_1 と Δ_2 の頂点 v_2 に対し、 $m_1 := (v_1, 1, 0)$ と $m_2 := (v_2, 0, 1)$ を結ぶ線分は内点に格子点を持たない。一方、 σ の任意の生成元 m_1, m_2 に対し、 m_1 と m_2 を結ぶ線分は $k-1$ 個の M 格子点を内点に持つ。

例 13.7 ([BB97, Proposition 5.5]). $K \subset \mathbb{R}^{3r}$ を第一象限とし、

$$M := \mathbb{Z}^{3d} + \mathbb{Z} \cdot \left(\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3} \right) \quad (13.19)$$

とおくと、これは指数 r の反射的 Gorenstein 錐になる。 $\deg^\vee = (1, \dots, 1)$ であり、 $t_i = e_{3i} + e_{3i+1} + e_{3i+2}$ とおくと、

$$\deg^\vee = t_1 + \dots + t_r \quad (13.20)$$

は \deg^\vee の分解を与える。例 13.6 と併せると、反射的 Gorenstein 錐が完全分解するからといって、双対錐が完全分解するとは限らない事が分かる。

[BN08, Question 5.2] において、 \deg^\vee の 2 通りの分解から来る 2 重ミラーは双有理同値かという問題が提出され、[Li16] によって肯定的に解決された。また [BN08, Conjecture 5.3] において、 \deg^\vee の 2 通りの分解から来る 2 重ミラーが導来同値であると予想され、[FK17] において肯定的に解決された。

[BL18, Definition 3.1] では、次のようにして定める $D(K, c)$ を Gorenstein 錐に付随する圏として考えることを提唱している： K^\vee を台に持つ正則 (regular/coherent) かつ単体的 (simplicial) な扇 Σ で、全ての 1 次元錐の原始的生成元が $K_{(1)}^\vee$ に含まれるようなものを一つ選んで固定する。 Σ が定める $\mathbb{C}^{K_{(1)}^\vee}$ の Stanley–Reissner 軌跡の補集合を U_Σ とおく。 $\mathbb{C}^{K_{(1)}^\vee}$ の点 $z: K_{(1)}^\vee \rightarrow \mathbb{C}$ が U_Σ に属するための必要十分条件は、 Σ の錐 σ が存在して、 z の零点が σ の部分集合になることである。トーラス

$$L := \left\{ \lambda \in (\mathbb{G}_m)^{K_{(1)}^\vee} \mid \text{任意の } m \in M \text{ に対して } \prod_{n \in K_{(1)}^\vee} \lambda(n)^{\langle m, n \rangle} = 1 \right\} \quad (13.21)$$

は U_Σ に自然に作用するが、この作用に関する商スタックを $\mathcal{X}_\Sigma := [U_\Sigma/L]$ とおく。 $c \in \mathbb{C}^{K_{(1)}}$ に対し、

$$C(z) := \sum_{m \in K_{(1)}} c(m) \prod_{n \in K_{(1)}^\vee} z(n)^{\langle m, n \rangle} \quad (13.22)$$

とおく。さらに、 G を部分群として含むより大きな群 \widehat{G} を

$$\widehat{G} := \left\{ \lambda \in (\mathbb{G}_m)^{K_{(1)}^\vee} \mid \text{任意の } m \in \text{Ann}(\deg^\vee) \text{ に対して } \prod_{n \in K_{(1)}^\vee} \lambda(n)^{\langle m, n \rangle} = 1 \right\} \quad (13.23)$$

で定義する。 $\langle m, \deg^\vee \rangle = 1$ となる $m \in M$ を一つ選んで固定すると、写像

$$\widehat{G} \rightarrow \mathbb{G}_m, \quad \lambda \mapsto \prod_{n \in K_{(1)}^\vee} \lambda(n)^{\langle m, n \rangle} \quad (13.24)$$

は全射であり、その核は m の取り方に依らずに G と一致する。この状況で、 $[U_\Sigma/\widehat{G}]$ 上の関数 C の行列因子化のなす圏を $D(K, c)$ と置くと、これは K と c のみに依り、 Σ の取り方に依らない。 K が Gorenstein 多面体のネフ分割から来ている時、 $D(K, c)$ は対応する Calabi–Yau 完全交叉の導来圏と同値になる。

参考文献

- [Abr08] D. Abramovich, *Lectures on Gromov-Witten invariants of orbifolds*, Enumerative invariants in algebraic geometry and string theory, Lecture Notes in Math., vol. 1947, Springer, Berlin, 2008, pp. 1–48. MR 2493583 27
- [AGZV85] V. I. Arnol'd, S. M. Guseĭn-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I*, Monographs in Mathematics, vol. 82, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985, The classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds. MR 777682 (86f:58018) 22
- [Arn75] V. I. Arnol'd, *Critical points of smooth functions*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 19–39. MR 0431217 (55 #4218) 20
- [Bat] Victor V. Batyrev, *On the stringy hodge numbers of mirrors of quasi-smooth calabi-yau hyper-surfaces*, arXiv:2006.15825. 28
- [Bat94] ———, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535. MR MR1269718 (95c:14046) 31
- [Bat98] ———, *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities*, Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 1–32. MR 1672108 (2001a:14039) 33
- [BB96] Victor V. Batyrev and Lev A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. **126** (1996), no. 1, 183–203. MR 1408560 (97k:14039) 33
- [BB97] ———, *Dual cones and mirror symmetry for generalized Calabi-Yau manifolds*, Mirror symmetry, II, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 71–86. MR 1416334 33, 34, 35, 36
- [BD96] Victor V. Batyrev and Dimitrios I. Dais, *Strong McKay correspondence, string-theoretic Hodge numbers and mirror symmetry*, Topology **35** (1996), no. 4, 901–929. MR 1404917 (97e:14023) 33
- [Bel02] Sarah-Marie Belcastro, *Picard lattices of families of K3 surfaces*, Comm. Algebra **30** (2002), no. 1, 61–82. MR 1880661 (2003d:14048) 20
- [BH93] Per Berglund and Tristan Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Phys. B **393** (1993), no. 1-2, 377–391. MR MR1214325 (94k:14031) 26
- [BH95] Per Berglund and Måns Henningson, *Landau-Ginzburg orbifolds, mirror symmetry and the elliptic genus*, Nuclear Phys. B **433** (1995), no. 2, 311–332. MR 1310310 (96d:58131) 26
- [BL15] Lev A. Borisov and Zhan Li, *On complete intersections with trivial canonical class*, Adv. Math. **268** (2015), 339–349. MR 3276596 32
- [BL18] ———, *On Clifford double mirrors of toric complete intersections*, Adv. Math. **328** (2018), 300–355. MR 3771131 34, 35
- [BM03] Lev A. Borisov and Anvar R. Mavlyutov, *String cohomology of Calabi-Yau hypersurfaces via mirror symmetry*, Adv. Math. **180** (2003), no. 1, 355–390. MR 2019228 33
- [BN08] Victor Batyrev and Benjamin Nill, *Combinatorial aspects of mirror symmetry*, Integer points in

- polyhedra—geometry, number theory, representation theory, algebra, optimization, statistics, Contemp. Math., vol. 452, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 35–66. MR 2405763 32, 34, 35
- [Bor] Lev Borisov, *Towards the mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Gorenstein toric Fano varieties*, arXiv:alg-geom/9310001. 32
- [CDP93] P. Candelas, E. Derrick, and L. Parkes, *Generalized Calabi-Yau manifolds and the mirror of a rigid manifold*, Nuclear Phys. B **407** (1993), no. 1, 115–154. MR 1242064 36
- [CK99] David A. Cox and Sheldon Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR MR1677117 (2000d:14048) 28
- [CLS90] P. Candelas, M. Lynker, and R. Schimmrigk, *Calabi-Yau manifolds in weighted \mathbf{P}_4* , Nuclear Phys. B **341** (1990), no. 2, 383–402. MR 1067295 (91m:14062) 22
- [CR10] Alessandro Chiodo and Yongbin Ruan, *Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations*, Invent. Math. **182** (2010), no. 1, 117–165. MR 2672282 (2012b:14110) 27
- [CR11] ———, *LG/CY correspondence: the state space isomorphism*, Adv. Math. **227** (2011), no. 6, 2157–2188. MR 2807086 (2012g:14069) 26
- [Cra04] Alastair Craw, *An introduction to motivic integration*, Strings and geometry, Clay Math. Proc., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 203–225. MR 2103724 (2005k:14027) 33
- [DL99] Jan Denef and François Loeser, *Germes of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 201–232. MR 1664700 (99k:14002) 33
- [Dol82] Igor Dolgachev, *Weighted projective varieties*, Group actions and vector fields (Vancouver, B.C., 1981), Lecture Notes in Math., vol. 956, Springer, Berlin, 1982, pp. 34–71. MR 704986 28
- [Dol83] ———, *Integral quadratic forms: applications to algebraic geometry (after V. Nikulin)*, Bourbaki seminar, Vol. 1982/83, Astérisque, vol. 105, Soc. Math. France, Paris, 1983, pp. 251–278. MR 728992 (85f:14036) 20
- [Dol96] I. V. Dolgachev, *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, J. Math. Sci. **81** (1996), no. 3, 2599–2630, Algebraic geometry, 4. MR 1420220 (97i:14024) 20
- [Fan01] Barbara Fantechi, *Stacks for everybody*, European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 349–359. MR 1905329 24
- [FK17] David Favero and Tyler L. Kelly, *Proof of a conjecture of Batyrev and Nill*, Amer. J. Math. **139** (2017), no. 6, 1493–1520. MR 3730928 35
- [Gie77] D. Gieseker, *Global moduli for surfaces of general type*, Invent. Math. **43** (1977), no. 3, 233–282. MR 0498596 16
- [Góm01] Tomás L. Gómez, *Algebraic stacks*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **111** (2001), no. 1, 1–31. MR 1818418 24
- [GP90] B. R. Greene and M. R. Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nuclear Phys. B **338** (1990), no. 1, 15–37. MR MR1059831 (91h:32018) 19, 26
- [Gri69] Phillip A. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals. I, II*, Ann. of Math. (2) **90** (1969), 460–495; *ibid.* (2) **90** (1969), 496–541. MR 0260733 18, 28, 36

- [IM15] Atanas Iliev and Laurent Manivel, *Fano manifolds of Calabi-Yau Hodge type*, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), no. 6, 2225–2244. MR 3299729 36
- [Kaw79] Tetsuro Kawasaki, *The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds*, Osaka J. Math. **16** (1979), no. 1, 151–159. MR 527023 27
- [Kol89] János Kollár, *Flops*, Nagoya Math. J. **113** (1989), 15–36. MR 986434 19
- [Kon03] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216. MR 2062626 (2005i:53122) 16
- [Kra] Marc Krawitz, *FJRW rings and Landau-Ginzburg mirror symmetry*, arXiv:0906.0796. 26, 27
- [KS92a] Maximilian Kreuzer and Harald Skarke, *No mirror symmetry in Landau-Ginzburg spectra!*, Nuclear Phys. B **388** (1992), no. 1, 113–130. MR 1200390 20
- [KS92b] ———, *On the classification of quasihomogeneous functions*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 1, 137–147. MR 1188500 (93k:32075) 22
- [KS13] D. Kotschick and S. Schreieder, *The Hodge ring of Kähler manifolds*, Compos. Math. **149** (2013), no. 4, 637–657. MR 3049698 5
- [Kuz] Alexander Kuznetsov, *Hochschild homology and semiorthogonal decompositions*, arXiv:0904.4330. 36
- [Kuz04] A. G. Kuznetsov, *Derived category of a cubic threefold and the variety V_{14}* , Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), no. Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 183–207. MR 2101293 36
- [Li16] Zhan Li, *On the birationality of complete intersections associated to nef-partitions*, Adv. Math. **299** (2016), 71–107. MR 3519464 35
- [LMB00] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR 1771927 24
- [Miy77] Yoichi Miyaoka, *On the Chern numbers of surfaces of general type*, Invent. Math. **42** (1977), 225–237. MR 0460343 17
- [Mor93] David R. Morrison, *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: a guide for mathematicians*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 1, 223–247. MR 1179538 19
- [Muk92] Shigeru Mukai, *Polarized K3 surfaces of genus 18 and 20*, Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, pp. 264–276. MR 1201388 (94a:14039) 32
- [Nik79] V. V. Nikulin, *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 111–177, 238. MR 525944 (80j:10031) 20
- [Ols16] Martin Olsson, *Algebraic spaces and stacks*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 62, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. MR 3495343 24
- [Per87] Ulf Persson, *An introduction to the geography of surfaces of general type*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 195–218. MR 927957 (89a:14057) 16
- [Pin77] Henry Pinkham, *Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d’Arnold et les surfaces $K - 3$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284** (1977), no. 11, A615–A618. MR 0429876 (55 #2886) 20
- [Sai74] Kyoji Saito, *Einfach-elliptische Singularitäten*, Invent. Math. **23** (1974), 289–325. MR 0354669

- [Sch96] Rolf Schimmrigk, *Mirror symmetry and string vacua from a special class of Fano varieties*, Internat. J. Modern Phys. A **11** (1996), no. 17, 3049–3096. MR 1394772 36
- [Ste77] Joseph Steenbrink, *Intersection form for quasi-homogeneous singularities*, Compositio Math. **34** (1977), no. 2, 211–223. MR 0453735 28
- [Toë14] Bertrand Toën, *Derived algebraic geometry*, EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153–240. MR 3285853 13
- [Ued] Kazushi Ueda, *Mirror symmetry and K3 surfaces*, Handbook for Mirror Symmetry of Calabi-Yau and Fano Manifolds, Advanced Lectures in Mathematics, vol. 47, Higher Education Press and International Press, Beijing-Boston, arXiv:1407.1566, pp. 483–521. 20
- [Vaf89] Cumrun Vafa, *String vacua and orbifoldized LG models*, Modern Phys. Lett. A **4** (1989), no. 12, 1169–1185. MR 1016963 (91g:81128) 21
- [Vis05] Angelo Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–104. MR 2223406 24
- [Wei81] Alan Weinstein, *Symplectic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **5** (1981), no. 1, 1–13. MR 614310 (83a:58044) 13
- [Wey39] Hermann Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939. MR 0000255 1
- [Yas04] Takehiko Yasuda, *Twisted jets, motivic measures and orbifold cohomology*, Compos. Math. **140** (2004), no. 2, 396–422. MR 2027195 33
- [Yau77] Shing Tung Yau, *Calabi’s conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), no. 5, 1798–1799. MR 0451180 17
- [Yon90] Takashi Yonemura, *Hypersurface simple K3 singularities*, Tohoku Math. J. (2) **42** (1990), no. 3, 351–380. MR 1066667 (91f:14001) 20
- [植] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf>. 1