モジュライ空間入門

植田一石

1　はじめに

良い対象を定義して、しかる後にそれを分類することは、数学の中心的な課題の一つである。有限単純群や球面の異種微分構造などのように同型類の集合が離散的になる場合は表を作ることによって分類できるが、Riemann 面や反自己双対接続のように、同型類の集合が連続的なパラメーターを持つ場合は、同型類のなす集合が再び幾何的な構造を持つ。これをモジュライ空間と呼び、その性質を調べることは、個々の対象を調べることよりも深い問題であると考えられる。

ここでは、$\mathbb{P}^1$ 上の点の配置空間 (これは $\mathbb{R}^3$ 上の多角形のモジュライ空間と自然に同一視される) や種数 1 の Riemann 面のモジュライ、それに $\mathbb{P}^1$ 上の階数 2 の放物束のモジュライ (これは S^3 上の多角形のモジュライと自然に同一視される) などを題材にして、モジュライ空間に関する入門的な解説を行う。[1]

2　多角形のモジュライ空間

三角形の合同類は辺の長さで決まるので、三角形の合同類の集合は、三角不等式を満たす正の実数の順序付けられていない 3 つ組の集合

$$\left\{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^{>0} \;\middle|\; |r_1 - r_2| < r_3 < r_1 + r_2\right\} \Big/ \mathfrak{S}_3 \tag{2.1}$$

と 1 対 1 に対応する。この集合には自然な位相や、三角形の間の Gromov–Hausdorff 距離から定まる距離が入り、「三角形のモジュライ空間」と呼ぶべき空間をなすが、それではより一般の多角形のモジュライ空間はどう定義されるべきであろうか？

一般の多角形をどう定義するべきかは自明でない問題だが、ここでは単に $\mathbb{R}^2$ の n 点の配置を平面 n 角形と呼ぶことにする。また、頂点には順序を入れて、対称群の作用では割らないことにする。$i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対し、i 番目の頂点 v_i と $i+1$ 番目の頂点 v_{i+1} の差を $x_i = v_{i+1} - v_i$ と置き、i 番目の辺と呼ぶ。$\mathbb{R}^2$ の向きを保つ等長写像で移り合う n 角形を同一視することにすると、「平面 n 角形のモジュライ空間」は

$$\mathcal{M}_n^{\mathbb{R}} \coloneqq \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0\right\} \Big/ \mathrm{SO}(2) \tag{2.2}$$

で与えられる。

$\mathbb{R}^2$ の n 点の代わりに、$\mathbb{R}^3$ の n 点を考えたもの

$$\mathcal{M}_n \coloneqq \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0\right\} \Big/ \mathrm{SO}(3) \tag{2.3}$$

[1] この原稿は、2017 年 2 月に信州大学で行った「第 7 回 (非) 可換代数とトポロジー」における講演の原稿に加筆・修正を行ったものである。

が「空間 n 角形のモジュライ空間」である。多角形の各辺 x_i に対してその長さ $\|x_i\|$ を対応させる写像

$$\rho\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^n, \quad (x_i)_{i=1}^n \mapsto (\|x_i\|)_{i=1}^n \tag{2.4}$$

の $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ におけるファイバーを

$$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{r}) \coloneqq \rho^{-1}(\boldsymbol{r}) \tag{2.5}$$

と置き、多角形空間 (polygon space) と呼ぶ。半径 r の球面を

$$S(r) \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|x\| = r \right\} \tag{2.6}$$

と置くと、これは

$$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{r}) \cong \{(x_1, \dots, x_n) \in S(r_1) \times \cdots \times S(r_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\} / \operatorname{SO}(3) \tag{2.7}$$

と表される。同型

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{su}(2)^*, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z & x - \sqrt{-1}y \\ x + \sqrt{-1}y & -z \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

を通して球面 $S(r)$ が $SU(2)$ の余随伴軌道

$$\mathcal{O}_r \coloneqq \left\{ X \in \mathfrak{su}(2)^* \;\middle|\; -\det X = r^2 \right\} \tag{2.9}$$

と同一視される事に注意すると、多角形空間は余随伴軌道の直積への対角な作用のシンプレクティック商である事が分かる;

$$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{r}) \cong \mathcal{O}_{r_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{r_n} /\!/_0\, SU(2). \tag{2.10}$$

さらに、$U(1)$ の $\mathbb{C}^2$ への作用

$$U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^2, \quad \alpha\colon \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha w \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

が $\mathbb{C}^2$ の自然なシンプレクティック構造に関して

$$\mu_{U(1)}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathfrak{u}(1)^* \cong \mathbb{R}, \quad (z, w) \mapsto |z|^2 + |w|^2 \tag{2.12}$$

を運動量写像に持つ Hamilton 作用であり、対応するシンプレクティック商

$$\mathbb{C}^2 /\!/_r\, U(1) \coloneqq \mu^{-1}(r)/U(1) \tag{2.13}$$

が $S(r)$ と自然に同一視できることと、$U(2)$ の $\mathbb{C}^2$ への自然な作用

$$U(2) \curvearrowright \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} az + bw \\ cz + dw \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

が

$$\mu_{U(2)}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathfrak{u}(2)^*, \quad \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |z|^2 & z\overline{w} \\ \overline{z}w & |w|^2 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

を運動量写像に持つ Hamilton 作用であることに注意すると、$S(r_1) \times \cdots \times S(r_n)$ は $U(1)^n$ の $(\mathbb{C}^2)^n$ への作用に関するシンプレクティック商であり、多角形空間はさらにそこへの $SU(2)$ 作用のシンプレクティック商になっている事が分かる;

$$S(r_1) \times \cdots \times S(r_n) \cong (\mathbb{C}^2)^n /\!/_{\boldsymbol{r}}\, U(1)^n, \tag{2.16}$$
$$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{r}) \cong S(r_1) \times \cdots \times S(r_n) /\!/_{\boldsymbol{0}}\, U(2). \tag{2.17}$$

包含写像 $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{u}(2)$ に双対な射影 $\mathfrak{u}(2)^* \to \mathfrak{su}(2)^*$ による $\begin{pmatrix} |z|^2 & z\overline{w} \\ \overline{z}w & |w|^2 \end{pmatrix}$ の像のノルムは

$$-\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) & z\overline{w} \\ \overline{z}w & -\frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2) \right)^2 \tag{2.18}$$

で与えられることに注意せよ。$(\mathbb{C}^2)^n$ は複素 $2 \times n$ 行列の空間と自然に同一視され、そこへの $U(1)^n$ の作用は、$U(n)$ の自然な右からの作用を対角行列からなる極大トーラス $T_{U(n)}$ に制限したものになっている。$U(2)$ の $\mathrm{Mat}(2, n; \mathbb{C})$ への作用の運動量写像は

$$\mu_{U(2)} \colon \mathrm{Mat}(2, n) \to \mathfrak{u}(2)^*, \tag{2.19}$$
$$X = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \mapsto XX^* = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} |z_i|^2 & z_i\overline{w}_i \\ \overline{z}w_i & |w_i|^2 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

で与えられ、シンプレクティック商

$$\mathrm{Mat}(2, r; \mathbb{C}) /\!/_r\, U(2) \coloneqq \mu_{U(2)}^{-1} \left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \right) \Big/ U(2) \tag{2.21}$$

は Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(2, n)$ になる。従って、多角形空間は、Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(2, n)$ を $U(n)$ の極大トーラスの自然な作用に関して割ったものとしても表示される;

$$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{r}) \cong \mathrm{Mat}(2, n; \mathbb{C}) /\!/_{\boldsymbol{r}} (U(2) \times T_{U(n)}) \tag{2.22}$$
$$\cong S^2(r_1) \times \cdots \times S^2(r_n) /\!/_0\, SU(2) \tag{2.23}$$
$$\cong \mathrm{Gr}(2, n) /\!/_{\boldsymbol{r}}\, T_{U(n)}. \tag{2.24}$$

(2.23) と (2.24) の同型は Gelfand–MacPherson 同型と呼ばれている。

シンプレクティック商の代数幾何における対応物が幾何学的不変式論的商 (geometric invariant theory quotient/GIT quotient) である。$2n$ 変数多項式環 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}] = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n]$ の $\mathbb{Z}^n$ による次数付けを

$$\deg z_i = \deg w_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.25}$$

で定義する。ここで、$e_i \in \mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{Z}^n$ の i 番目の標準基底である。有理数を成分に持つ重み $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$ に対し、$\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]$ の自然数で次数付けられた部分環 $R = \bigoplus_{k=0}^\infty R_k$ を

$$R_k \coloneqq \left\{ f \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \;\middle|\; \deg f = \sum_{i=1}^n k r_i e_i \right\} \tag{2.26}$$

で定義する。但し、$\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}]$ への自然な作用に関する不変式環 (invariant ring) である。この次数付き環に対応する射影スキーム $\operatorname{Proj} R$ が

$$\mathrm{Mat}(2, n; \mathbb{C}) /\!/_{\boldsymbol{r}} (\mathbb{C}^\times)^n \cong \left(\mathbb{P}^1\right)^n \tag{2.27}$$

の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 作用に関する幾何学的不変式論的商

$$\left(\mathbb{P}^1\right)^n /\!/_{\boldsymbol{r}} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \tag{2.28}$$

である。一般に、幾何学的不変式論的商は半安定 (semistable) な点の集合を軌道の閉包同値 (closure equivalence) で割ったものになる。(半) 安定性の定義はここではしないが[2]、今の場合は、$(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{P}^1)^n$ が任意の $x \in \mathbb{P}^1$ に対し

$$\sum_{i\colon x_i = x} r_i \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{2.29}$$

を満たす時 (すなわち、ぶつかっている点の重みの和が全ての点の重みの和の半分を超えない時) に半安定であり、(2.29) において常に等号が成立しない時、$(x_1, \ldots, x_n)$ は安定 (stable) である。$\boldsymbol{r}$ をスカラー倍しても安定性は変わらないので、$\sum_{i=1}^n r_i = 2$ を満たすように規格化しておくのが便利である。

重みの空間

$$W \coloneqq \left\{ \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} r_i = 2 \right\} \tag{2.30}$$

は、$I \subset \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$H_I \coloneqq \left\{ \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}^n \;\middle|\; \sum_{i \in I} r_i = 1 \right\} \tag{2.31}$$

を壁 (wall) とする部屋構造 (chamber structure) を持つ。一般に、$I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ に対応する壁を越えると、対応する商は図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\boldsymbol{r}_+) \arrow[dr, "\phi_+"'] & & \mathcal{M}(\boldsymbol{r}_-) \arrow[dl, "\phi_-"] \\ & \mathcal{M}(\boldsymbol{r}_0) & \end{tikzcd} \tag{2.32}$$

によって対応する。ここで、H_I によって隔てられている部屋を C_+ 及び C_- と書き、$\boldsymbol{r}_+$ は $\sum_{i \in I} r_{i,+} > 1$ を満たす C_+ の点、$\boldsymbol{r}_-$ は $\sum_{i \in I} r_{i,-} < 1$ を満たす C_+ の点、そして $\boldsymbol{r}_0$ は H_I の点であり、しかも $\boldsymbol{r}_0$ は他のどの壁にも属していないと仮定した。$J \coloneqq \{1, \ldots, n\} \setminus I = \{j_1, \ldots, j_{n-r}\}$ と置くと、ϕ_+ は $\mathcal{M}(\boldsymbol{r}_+)$ の部分多様体

$$S_{\boldsymbol{r}_+} = \{x_{j_1} = \cdots = x_{j_{n-r}}\} \cong \mathbb{P}^{r-2} \tag{2.33}$$

を $\mathcal{M}(\boldsymbol{r}_0)$ の一点

$$S_{\boldsymbol{r}_0} = \left\{ x_{i_1} = \cdots = x_{i_r},\ x_{j_1} = \cdots = x_{j_{n-r}} \right\} \tag{2.34}$$

に潰し、ϕ_- は $\mathcal{M}(\boldsymbol{r}_-)$ の部分多様体

$$S_{\boldsymbol{r}_-} = \{x_{i_1} = \cdots = x_{i_r}\} \cong \mathbb{P}^{n-r-2} \tag{2.35}$$

を $\mathcal{M}(\boldsymbol{r}_0)$ の同じ点に潰す。

[2]例えば向井茂「モジュライ理論」岩波書店を見よ。

どれかの点の重みが1より大きい時、$(\mathbb{P}^1)^n$ の全ての点が不安定になり、$\mathcal{M}(\boldsymbol{r})$ は空集合になり、どれかの点の重みが1の時、$\mathcal{M}(\boldsymbol{r})$ は一点になる。全ての点の重みが1より小さい時、$\mathcal{M}(\boldsymbol{r})$ は $\mathbb{P}^1$ 上の n 点の配置空間 (configuration space)

$$X(2,n) \coloneqq ((\mathbb{P}^1)^n \setminus \Delta)/\operatorname{GL}_2(\mathbb{C}) \tag{2.36}$$

を開部分集合として含んでいる。ここで、

$$\Delta \coloneqq \left\{(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{P}^1)^n \;\middle|\; \text{ある } 1 \le i < j \le n \text{ に対して } x_i = x_j\right\} \tag{2.37}$$

は大きな対角集合 (big diagonal) である。最後の3点を PGL_2 の作用で $(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = (0, 1, \infty)$ と規格化することによって、$X(2,n)$ は $\mathbb{P}^{n-3}$ の開部分集合

$$X(2,n) \cong \left\{[x_1 : \cdots : x_{n-3} : 1] \in \mathbb{P}^{n-3} \;\middle|\; \text{任意の } 1 \le i < j \le n-3 \text{ に対し } x_i \ne 0, 1, x_j\right\} \tag{2.38}$$

と同一視することができる。これは、$\mathbb{P}^{n-3}$ の超平面配置

$$\bigcup_{i=1}^{n-2} \{x_i = 0\} \cup \bigcup_{1 \le i < j \le n-2} \{x_i = x_j\} \tag{2.39}$$

の補集合になっている。

n 番目の点に対する重みのみが1に近くて、他の重みが平等に小さい時 (より正確に言うと、重み $\boldsymbol{r}$ が部屋

$$C_n \coloneqq \{\boldsymbol{r} \in W \mid r_n < 1 \text{ かつ任意の } 1 \le i \le n-1 \text{ に対して } r_i + r_n > 1\}. \tag{2.40}$$

に入っている時)、対応する幾何学的不変式論的商が $\mathbb{P}^{n-3}$ になる事が次のようにして分かる：PGL_2 の作用によって、$x_n = \infty \in \mathbb{P}^1$ とする事ができる。安定性条件により、任意の $1 \le i \le n-1$ に対して $x_i \ne x_n$ なので、$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$ でなければならない。さらに、無限遠を固定する PGL_2 の部分群 (アファイン変換群) の作用によって、$x_{n-1} = 0$ とする事ができ、これによって $\mathbb{A}^{n-2}$ への $\mathbb{G}_m$ の作用が残る。安定性条件により $x_1 = \cdots = x_{n-1}$ という配置は禁止されるので、$x_1 = \cdots = x_{n-2} = 0$ となる点は $\mathbb{A}^{n-2}$ から除かれる。従って、この時のモジュライ空間は

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{r}) = (\mathbb{A}^{n-2} \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m \tag{2.41}$$

となるが、これは $\mathbb{P}^{n-3}$ に他ならない。これは、$I = \{n\}$ に対応する壁 $H_I = \{r_n = 1\}$ を超えて、モジュライ空間が空集合から射影空間への壁越え (wall-crossing) をしたと理解することができる。

一般の重み $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)$ に対するモジュライ空間 $\mathcal{M}(\boldsymbol{r})$ は、部屋 (2.40) に対応する $\mathbb{P}^{n-3}$ から次のように壁越えを繰り返すことによって得られる：$\mathbb{P}^{n-3}$ 上の $n-1$ 個の点を

$$p_i \coloneqq \begin{cases} [\delta_{i0} : \cdots : \delta_{i,n-2}] & 1 \le i \le n-2, \\ [1 : \cdots : 1] & i = n-1 \end{cases} \tag{2.42}$$

で定める。

1. まず、$r_i + r_n < 1$ を満たす $1 \le i \le n-1$ に対し、壁 $H_{\{i,n\}}$ を越える。この時のモジュライ空間の変化は、点 p_i における爆発 (blow-up) で与えられる。

2. 次に $r_{i_1} + r_{i_2} + r_n < 1$ を満たす組 $1 \le i_1 < i_2 \le n-1$ に対し、壁 $H_{\{i_1,i_2,n\}}$ を越える。この時のモジュライ空間の変化は、p_{i_1} と p_{i_2} を通る直線の厳密変換 (strict transform) を爆縮 (blow-down) し、それを別の方向に爆発する事で与えられる。この爆発の例外集合は $\mathbb{P}^{n-5}$ である。

3. r 番目のステップでは、$r_{i_1}+\cdots+r_{i_r}+r_n<1$ を満たす組 $1\le i_1<\cdots<i_r\le n-1$ に対し、壁 $H_{\{i_1,\ldots,i_r,n\}}$ を越える。$\{i_1,\ldots,i_r,n\}$ の $\{1,\ldots,n\}$ における補集合を $\{j_1,\ldots,j_{n-r-1}\}$ と書くと、この条件は $r_{i_1}+\cdots+r_{i_r}+r_n<r_{j_1}+\cdots+r_{j_{n-r-1}}$ とも書き表せることに注意せよ。この時のモジュライ空間の変化は、r 個の点 $p_{i_1},\ldots,p_{i_r}$ で張られる $\mathbb{P}^{n-3}$ の $r-1$ 次元線型部分空間の厳密変換を爆縮し、それを別の方向に爆発して得られる。この双有理変換は、モジュライ空間から $\mathbb{P}^{r-1}$ を取り除いて、そこに $\mathbb{P}^{n-r-4}$ を埋め戻す操作になっている。

例として、$n=5$ で重みが

$$\boldsymbol{r}_1=\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right) \tag{2.43}$$

の場合を考えよう。部屋 (2.40) に入っている重みとして

$$\boldsymbol{r}_0=\left(\frac{5}{16},\frac{5}{16},\frac{5}{16},\frac{5}{16},\frac{3}{4}\right) \tag{2.44}$$

を取り、$\boldsymbol{r}_0$ と $\boldsymbol{r}_1$ を結ぶ線分を

$$\boldsymbol{r}_t=(1-t)\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{r}_1 \tag{2.45}$$

とおく。この線分は $t_0=\frac{5}{21}$ の時に

$$\boldsymbol{r}_{t_0}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\in H_{\{1,5\}}\cap H_{\{2,5\}}\cap H_{\{3,5\}}\cap H_{\{4,5\}} \tag{2.46}$$

という点を通る。この点は 4 枚の壁の共通部分に乗っており、$\{i,j,k,\ell\}=\{1,2,3,4\}$ を満たす任意の組 (i,j,k,ℓ) に対し、$x_i=x_j=x_k$ となる点配置は、壁の手前では安定だが、壁の向こう側では不安定になる。壁越えによってこれらの点は爆発され、点 $x_i=x_j=x_k$ が例外因子 $x_\ell=x_5$ に置き換えられる。

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x,y,1,0,\infty) \tag{2.47}$$

とおくと、爆発の中心は

$$\begin{aligned}
x_1=x_2=x_3 &\ :\ [x:y:1]=[1:1:1]\in\mathbb{P}^2,\\
x_1=x_2=x_4 &\ :\ [x:y:1]=[0:0:1]\in\mathbb{P}^2,\\
x_1=x_3=x_4 &\ :\ [x:y:1]=[0:1:0]\in\mathbb{P}^2,\\
x_2=x_3=x_4 &\ :\ [x:y:1]=[1:0:0]\in\mathbb{P}^2
\end{aligned}$$

で与えられる。この 4 点は一般の位置にあり (すなわち、どの 2 点も一致せず、どの 3 点も一直線上に無い)、$\mathcal{M}(\boldsymbol{r}_1)$ は $\mathbb{P}^2$ をこの 4 点で爆発したものになっている。

3 種数 1 の Riemann 面のモジュライ空間

種数 1 のコンパクト Riemann 面は

1. $\mathbb{R}$ 上線形独立な $\mathbb{C}$ の元 ω_1, ω_2 に対し、$\mathbb{C}$ を部分群 $\Lambda=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ で割った商

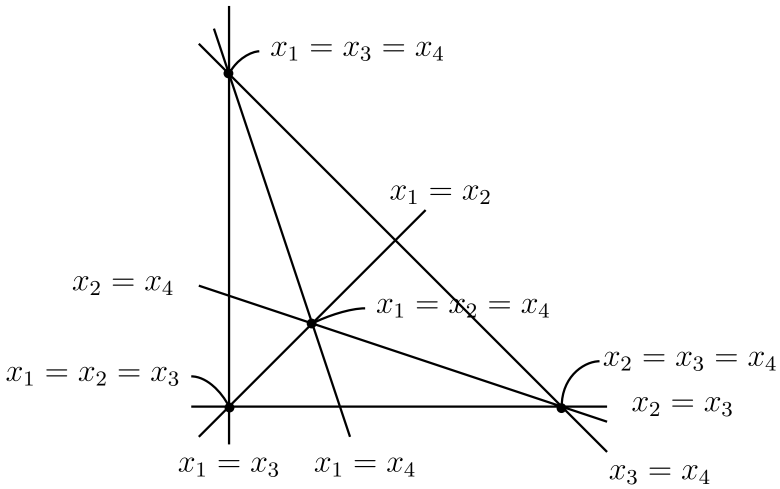

図 2.1: $\mathcal{M}(\boldsymbol{r}_0)$

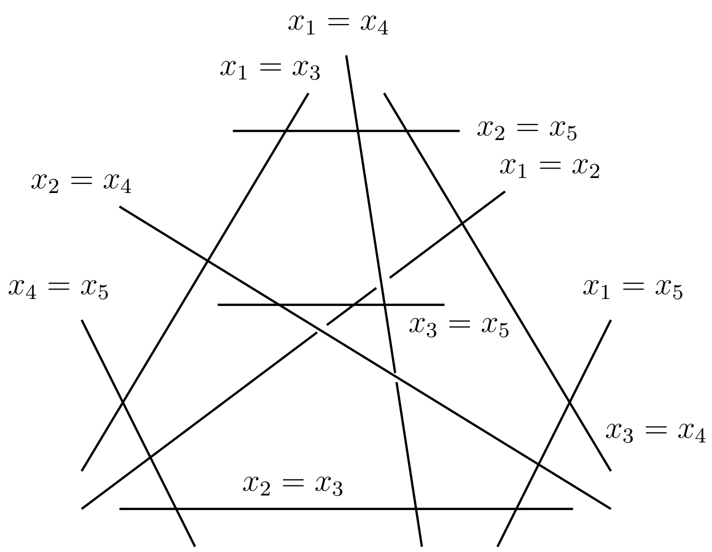

図 2.2: $\mathcal{M}(\boldsymbol{r}_1)$

2. 原点以外に臨界点を持たない 3 変数の 3 次同次式 $f(x,y,z)$ によって定義される複素射影平面の部分集合 $\{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid f(x,y,z)=0\}$

3. $\mathbb{P}^1$ の 4 点で分岐する 2 重被覆

などの様々な特徴付けを持つが、その双正則同値類を分類したい。

種数 1 の曲線 $E := \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$ から別の種数 1 の曲線 $E' := \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2')$ への双正則写像 f が存在すると仮定すると、E' の上の正則 1 形式 dz を引き戻すことによって E 上の正則 1 形式が得られる。種数 1 の曲線上の正則 1 形式は定数を除いて一意的なので、f は普遍被覆の間の線形写像に持ち上がる。従って、E と E' が双正則同値であるための必要条件は、$\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ と $\mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ が $\mathbb{C}$ の部分集合として定数倍を除いて互いに移り合うことである。また、これが十分条件でもあることは明らかである。定数倍の自由度は、ω_1 を 1 に正規化することで消すことができる。$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ と $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ が $\mathbb{C}$ の部分集合として一致するための必要十分条件は、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ の元 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して

$$\tau' = g \cdot \tau := \frac{a + b\tau}{c + d\tau} \tag{3.1}$$

となる事である (正規化する前の組 (ω_1, ω_2) には

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

で作用する)。従って、モジュライ空間は $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) / \mathrm{GL}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{H} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で与えられる。よく知られているようにこのモジュライ空間は複素多様体として $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ と同型であり、j 直線 (j-line) と呼ばれる (モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の上半平面 $\mathbb{H}$ への作用は、$\sqrt{-1}$ と $\exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ にそれぞれ位数が 2 と 3 の固定化部分群を持つので、$\mathbb{H} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は軌道体としては $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ と同型ではない)。

3 変数 3 次式の空間 $\mathrm{Sym}^3 V^\vee$ は 10 次元のアファイン空間であり、ここに $\mathrm{GL}(V)$ が自然に作用する。スタックとしての商 $\left[\mathrm{Sym}^3 V^\vee / \mathrm{GL}(V)\right]$ は代数多様体はおろか Deligne–Mumford スタックにすらならない (Artin スタックになる)。座標環 $\mathbb{C}\left[\mathrm{Sym}^3 V^\vee\right]$ は $\mathrm{Sym}^3 V \subset \mathbb{C}\left[\mathrm{Sym}^3 V^\vee\right]^{\mathrm{SL}(V)}$ を 1 次部分とするような自然な次数付けを持ち、その $\mathrm{SL}(V)$ 作用に関する不変式環 $\mathbb{C}\left[\mathrm{Sym}^3 V^\vee\right]^{\mathrm{SL}(V)}$ は、4 次と 6 次の元で生成される 2 変数多項式環になる;

$$\mathbb{C}\left[\mathrm{Sym}^3 V^\vee\right]^{\mathrm{SL}(V)} = \mathbb{C}\left[g_4, g_6\right]. \tag{3.3}$$

この環はモジュラー群の上半平面への作用に関する保型形式環と次数付き環として同型であることに注意せよ。この次数付き環に付随した射影多様体 $\mathrm{Proj}\,\mathbb{C}\left[\mathrm{Sym}^3 V^\vee\right]^{\mathrm{SL}(V)}$ は $\mathbb{P}^1$ と同型になり、$\mathrm{Sym}^3 V^\vee$ の $\mathrm{GL}(V)$ による幾何学的不変式論的商を与える。

$\mathbb{P}^1$ 上の 4 点の配置空間は、複比 (cross-ratio)

$$\lambda := \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4} \tag{3.4}$$

を用いて $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ と同一視されるが、これを λ 直線 (λ-line) と呼ぶ。4 点の配置空間には 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ が自然に作用するが、複比が Klein の four-group (Vierergruppe)

$$\mathsf{V} := \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathfrak{S}_4 \tag{3.5}$$

の作用で不変なので、この作用は非調和群 (anharmonic group) $\mathsf{A} := \mathfrak{S}_4/\mathsf{V} \cong \mathfrak{S}_3$ の作用に落ちる。この作用を通して、A は $\lambda \mapsto 1/\lambda$ と $\lambda \mapsto 1 - \lambda$ で生成される $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1 \cong \mathrm{PGL}_2$ の部分群と自然に同一

視される。体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上で考えると、$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, 1, \infty\}$ の置換を引き起こし、A と同型になる。

λ 直線は平面 3 次曲線の Legendre 標準形

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \tag{3.6}$$

に対応しており、j 直線への $\mathfrak{S}_3$ 被覆

$$j = \frac{256(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \tag{3.7}$$

を持つ。モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のレベル 2 の主合同部分群を

$$\Gamma(2) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1,\ c \equiv d \equiv 0 \mod 2 \right\} \tag{3.8}$$

で定義すると、完全列

$$1 \to \Gamma(2) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 1 \tag{3.9}$$

が存在し、λ 直線は $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ と自然に同一視される。

4 放物束のモジュライ空間

C を種数 g のコンパクトな Riemann 面、$p_1, \ldots, p_n$ を C 上の相異なる n 点とすると、補集合 $C \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ の基本群は表示

$$\pi_1\left(C \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}\right) \cong \left\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g} \left(\alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}\right) \prod_{i=1}^{n} \gamma_i \right\rangle \tag{4.1}$$

を持つ。実数 $a \in [0, 1/2]$ に対し、$\operatorname{diag}\left(\exp\left(2a\pi\sqrt{-1}\right), \exp\left(-2a\pi\sqrt{-1}\right)\right)$ を含む $SU(2)$ の共役類を C_a とおく。C 上の階数 2 のベクトル束 V と、V の p_i におけるファイバー V_{p_i} の 1 次元部分空間 ℓ_i、それに実数 $a_i \in [0, 1/2]$ の組 $P = (V, (\ell_1, \ldots, \ell_n), (a_1, \ldots, a_n))$ を $(C, (p_1, \ldots, p_n))$ 上の階数 2 の放物束 (a parabolic bundle of rank 2) と呼ぶ。また、$\boldsymbol{a} \coloneqq (a_1, \ldots, a_n)$ を P の放物重み (parabolic weight) と呼び、放物重みを取り除いた組 $(V, (\ell_1, \ldots, \ell_n))$ を準放物束 (quasi-parabolic bundle) と呼ぶ。V の部分直線束 L に対し、P と L の放物次数 (parabolic degree) は

$$\operatorname{par}\deg P \coloneqq \deg V + n, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{par}\deg L \coloneqq \deg L + \sum_{i\colon \ell_i \neq L_{p_i}} a_i + \sum_{i\colon \ell_i = L_{p_i}} (1 - a_i) \tag{4.3}$$

で定義される。階数 2 の放物束 P は、任意の部分直線束 L に対して

$$\operatorname{par}\deg L \leq \frac{1}{2} \operatorname{par}\deg V \tag{4.4}$$

を満たす時に半安定 (semi-stable) と呼ばれる。また、(4.4) において必ず等号なしの不等号が成り立つ時、P は安定 (stable) と呼ばれる。任意の放物束 P に対し、フィルトレーション (部分束の列) $0 = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_k = P$ で、任意の $i = 1, \ldots, k$ に対し逐次商 P_i/P_{i-1} が半安定であり、し

かもその勾配が $\mu(P_1/P_0) > \mu(P_2/P_1) > \cdots > \mu(P_k/P_{k-1})$ を満たすようなものが唯一つ存在し、Harder–Narasimhan フィルトレーションと呼ばれる。また、任意の半安定放物束 P に対し、あるフィルトレーション $0 = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_k = P$ で、逐次商が安定になるものが存在する。このフィルトレーションを P の組成列 (composition series) と呼ぶ。組成列は一意的ではないが、逐次商に現れる安定束の同型類は重複度を込めて一意的に決まる (Jordan–Hölder の定理)。2 つの半安定放物束 P と P' は、逐次商に現れる安定束の同型類が重複度を込めて一致する時に S 同値 (S-equivalent) と呼ばれる。Mehta–Seshadri による Narasimhan–Seshadri 型定理によって、階数が 2 で放物重みが $\boldsymbol{a}$、放物次数が 0 の安定束放物束の同型類 $\mathcal{N}(C, (p_1, \dots, p_n); \boldsymbol{a})$ は、群の既約準同型 $\pi_1(C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) \to SU(2)$ で、各 $i = 1, \dots, n$ に対して p_i の周りでのホロノミーが C_{a_i} に入るものの共役類の集合と 1 対 1 に対応する。これは、

$$\prod_{i=1}^{g} \left(A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}\right) \prod_{i=1}^{n} C_i = I \tag{4.5}$$

を満たす同時対角化できない行列の組 $(A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_n) \in (SU(2))^{2g} \times \prod_{i=1}^{n} C_{a_i}$ の集合を $SU(2)$ の随伴作用で割ったものと言い換えることもでき、特に C の種数が 0 の時には

$$\left\{ (g_1, \dots, g_n) \in \prod_{i=1}^{n} C_{a_i} \;\middle|\; g_1 \cdots g_n = e \right\} \Big/ SU(2) \tag{4.6}$$

となる。$SU(2)$ が S^3 と同型であることに注意すると、これは多角形空間の S^3 に対する類似物である。

放物重みの空間 $[0, 1/2]^n$ は、$I \subset \{1, \dots, n\}$ と $k \in \mathbb{N}$ によって決まる壁

$$H_{I,k} \coloneqq \left\{ \boldsymbol{a} \in [0,1]^n \;\middle|\; \sum_{i \neq I} a_i - \sum_{i \in I} a_i = k \right\} \tag{4.7}$$

によって部屋に分割される。放物重みの和 $|\boldsymbol{a}| \coloneqq a_1 + \cdots + a_n$ が 1 より小さければ、$k = 0$ に対応する壁のみが表われ、放物束のモジュライ空間は点配置のモジュライ空間と複素多様体としてもシンプレクティック多様体としても同型になる。$k \neq 0$ に対応する壁は、多角形の連続する辺が球面を k 周することによって 2 つの頂点が重なることに対応する。

$|\boldsymbol{a}|$ が 1 より大きい場合の放物束のモジュライ空間は、一般にはどの安定性に対する点配置のモジュライ空間とも位相同型にすらならない。例えば、$n = 5$ かつ $\boldsymbol{a} = (1/2, \dots, 1/2)$ の時、$(C = \mathbb{P}^1, (p_1, \dots, p_5))$ 上の放物束のモジュライ空間は、$\operatorname{Sym}^2 C \cong \mathbb{P}^2$ を $p_1, \dots, p_5 \in C$ の Veronese 埋め込み $C \hookrightarrow \operatorname{Sym}^2 C$ による像で爆発したものになっている。$p_1, \dots, p_5$ が C 上の相異なる点であることから、それらの $\operatorname{Sym}^2 C$ における像は一般の位置にあり、モジュライ空間は 4 次の del Pezzo 曲面になる。4 次の del Pezzo 曲面上の (-1) 曲線は、$p_1, \dots, p_5$ の 2 点を通る直線の厳密変換として得られる 10 本の曲線と、5 点を通る円錐曲線の厳密変換、それに 5 本の例外曲線の計 16 本ある。この中のどの 1 本を選んでも、それに交わる (-1) 曲線は 5 本あり、これらの 5 本は互いに交わらない。従って、その 5 本の (-1) 曲線を潰すことができ、結果として $\mathbb{P}^2$ が得られる。この $\mathbb{P}^2$ 上には、5 本の (-1) 曲線の像として 5 点が定まり、最初に取った (-1) 曲線は、この 5 点を通る円錐曲線を与える。こうして、放物束のモジュライ空間の複素構造から最初の 5 点付き射影直線 $(C, (p_1, \dots, p_5))$ が $16 : 1$ の曖昧性を残して決まることが分かる。