最短の道を探せ！
—いかにして楽をするか—

植田 一石

1　導入—設定と登場人物—

以下は某国の情報部員養成学校の生徒たちである．次節以降では彼らが夜な夜な繰り広げる雑談を紹介する．

チャールズ：一番上の先輩．長年この学校にいるようだが、まだ実戦配備されていないところを見るとスパイとしての出来はいまいちの様子．

ソフィー：二番目の先輩．この学校唯一の女性でもある．

ウィリアム：数学科の大学院を出たが、就職活動中にリクルートされてこの業界に入ってきたらしい．

ヘンリー：高校から編入してきた若者．

注 1：この物語はフィクションです．実在の人物・事件等とは一切関係ありません．
注 2：設定が馬鹿げているとか、会話が説教臭いといったつっこみは禁止です．

2　ダイクストラ法—貪欲アルゴリズム／動的計画法—

ヘンリー：今日の授業で宿題を出されちゃいました.「暗殺計画 1」の「逃走経路」っていう単元なんですが、敵の要人がこの広場で集会を開くときに、隣のビルから狙撃して、なるべく早くアジトに帰ってくるにはどの道を通ればいいか、っていう問題なんですよ．

ウィリアム：その問題は多項式時間で簡単に解けるよ．その前にまず、その街の地図から必要な情報だけを抜き出すことにしよう．最短時間で逃げる道を探すのが目的だから、地図にある色んな情報の中で必要なのは道が交差点でどう繋がっているかと、それぞれの道を通るのにかかる時間だけだよね．それを表したのが図 1 のグラフだ．ここで、a が広場、h がアジトで、b〜g は交差点を、線は交差点と交差点の間の道を表している．

ヘンリー：じゃあ、道の横に書いてある数字は何ですか？

ウィリアム：これはその道を通るのにかかる時間だよ．

ヘンリー：地図上の道の長さとずれているみたいですけど...

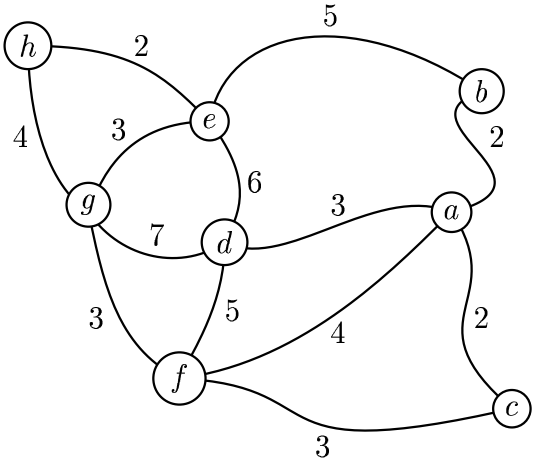


図 1: ある街の地図

ウィリアム： 所要時間は道の幅や込み具合にも依るので、単純に長さからは決まらないんだ．それに、そもそもこれは模式図であまり正確じゃないしね．

ヘンリー： なるほど．まずそうやって余分な情報を捨てるわけですか．これで随分問題が見易くなりましたね．ところで、多項式時間って何ですか？

ウィリアム： 多項式っていうのは知ってるよね．

$$f(x) = x^2 + 1$$

とか、もうちょっと複雑なのだと

$$g(x) = 3x^5 - 2x^3 + 5$$

とかそういうやつ．

ヘンリー： 上の方は高校の時に見たことがあります．x に数を入れると数が出てくるんでしょう？例えば

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2, \quad f(2) = 2^2 + 1 = 5,$$

とか．でも下みたいなやつは見たことがないですね．

ウィリアム： 下もおんなじだよ．例えば

$$g(1) = 3 \cdot 1^5 - 2 \cdot 1^3 + 5 = 6, \quad g(2) = 3 \cdot 2^5 - 2 \cdot 2^3 + 5 = 96 - 16 + 5 = 85,$$

みたいになる．

ヘンリー： なるほど．でも $f(x)$ に比べて $g(x)$ の方が大きくなるのがやたら早いですね．

ウィリアム：そうそう．これが例えば $x = 10$ くらいになると、

$$f(10) = 10^2 + 1 = 101$$

だけど

$$g(10) = 3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^3 + 5 = 300000 - 2000 + 5 = 298005,$$

つまりおよそ 30 万という大きな値になる．また、これを見ると $f(x)$ とか $g(x)$ の x が大きい時の値は $f(x)$ や $g(x)$ の最高次の係数だけでほとんど決まってしまうことも分かるね．

ヘンリー：はい．x が大きいときには

$$1 \ll x \ll x^2 \ll x^3 \ll \dots$$

（$a \ll b$ は a よりも b の方が「ずっと大きい」という意味）となると言うことですね．

ウィリアム：そうだ．さて、こうみると多項式でも最高次の次数が大きいととてつもない早さで増えて行くので、これらのどれよりも早く大きくなる関数があるというのは俄かには信じられないかも知れないけど、実はそういう関数があるんだよ．

ヘンリー：えっ、じゃあそれは例えば

$$f(x) = x^{100}$$

とかよりも大きいんですか？

ウィリアム：その関数だと $f(10)$ が既に 10^{100} で、これは 1 兆 × 1 兆 × 1 兆 × 1 兆 × 1 兆 × 1 兆 × 1 兆 × 1 兆 × 1 万だから、とてつもなく大きいよね．でも、

$$g(x) = 10^x$$

っていう関数を考えてごらん．

ヘンリー：$g(x) = 10^x$ ですか．これだと

$$g(10) = 10^{10}$$

は 100 億だから、あれ、大したことないじゃないですか．

ウィリアム：$x = 10$ だと確かにそうだね．でも、もっと大きな x を考えたらどうなる？

ヘンリー：ええっと、$x = 100$ だと、

$$f(100) = 100^{100} = 10^{200},$$
$$g(100) = 10^{100}$$

だから、まだ $f(x)$ のほうがずっと大きいですね．

ウィリアム：でも例えば $x = 1000$ だと、

$$f(1000) = 1000^{100} = 10^{300},$$
$$g(1000) = 10^{1000}$$

で $g(x)$ の方がずっと大きいよね.

ヘンリー：あっ、そうか．じゃあ $x = 10000$ だと、えーっと...

ウィリアム：

$$f(1000) = 10000^{100} = 10^{400},$$
$$g(1000) = 10^{10000}$$

だね．ここまで来ればもう比較にならない．どっちもあほみたいに大きな数だけどね.

チャールズ：x を 10 倍するごとに $f(x)$ は 10^{100} 倍されるけど、$g(x)$ の方は 10 乗されるってわけだな．だから最初は $f(x)$ の方がずっとおっきく見えても、あっという間に追い越されるんだ.

ウィリアム：$g(x)$ みたいな関数のことを指数関数って言うんだ．それで、多項式と指数関数を比較すると、最初は多項式の方が大きく見えるかも知れないけど、x が大きくなるとかならず指数関数の方が圧倒的に大きくなる.

ヘンリー：指数関数の方が強いってわけですね．それじゃあ、指数関数が最強なんですか？

ウィリアム：最強って... 別に大きいから強いかどうかは知らないけど、10^x より大きい関数はいくらでもあるよ．しょうもない例としては 100^x みたいな奴もあるけど、これも指数関数だから、指数関数じゃない例としては

$$f(x) = x!$$

があるね.

ヘンリー：この「エックスっ！」って何ですか？

ウィリアム：いや、これは「エックスっ！」って叫ぶんじゃなくって、「エックスの階乗」って読むんだよ．高校で習わなかった？

ヘンリー：いえ、ちょっと記憶にないですね...

ウィリアム：そんな政治家の答弁みたいな返事をしちゃって．まあいいや．これは 1 から x までの数を順番に掛けるっていう記号だよ．たとえば 5! だと

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

になる.

ヘンリー　：なるほど．それで、これが指数関数よりも強いわけですか？えーっと、例えば $x = 10$ だと $10^x = 10^{10}$ は 100 億でしょう．んでもって、

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

は、えーっと…

チャールズ：$3,628,800$ だな．なんだ、まだ五百万にもならないのか．

ウィリアム：うわっ、すごい計算力ですね．私には絶対出来ない…

チャールズ：俺は算盤をやってたからな．しかし、お前、こんな計算もできないで数学科の大学院まで出たのか．

ウィリアム：そうそう、良く誤解されるんですけど、計算、特に数字の暗算の得意な数学者なんてほんの一握りですよ．オイラーとか、ガウスとか、ラマヌジャンとか、そういう一部の数学者が神憑り的に計算に強かったことが伝説になっているのと、「数学」が文字通り数字の学問だと勘違いされているからか、数学者は数字に強いと思われがちですが、実際には数学者どうしで飲みに行ったりすると、割り勘の計算すら出来ないこともしばしば…

チャールズ：なーんだ、頼りないな．それじゃ何が出来るって言うんだ？

ウィリアム：めちゃめちゃ計算のできる一部の数学者は別として、それ以外の大部分の数学者は、いかに計算をせずに（あるいは最低限の計算で）知りたい問題の答えを見つけるかを常に考えているんですよ．例えば今の場合、x が大きいときに

$$f(x) = 10^x$$

と

$$g(x) = x!$$

のどっちが大きいかが知りたいわけですよね．$x = 10$ くらいなら無理やり両方とも計算すれば実際に計算できて、そんでもって出てきた数字を比較するのもできますが、$x = 100$ くらいになるとそんなことはまず無理ですよね．ちなみに手もとのコンピューターで計算してみるとですね、ええっと、

$$\begin{aligned}100! = {} & 9332621544394415268169923885626670049071596826438162146\\ & 8592963895217599993229915608941463976156518286253697920\\ & 827223758251185210916864000000000000000000000000\end{aligned}$$

ですね．こんなもの手ではぜーったいやりたくないですよね．

チャールズ：そんなにでかいのか．それで「びっくり」マークが付いてるわけだな？

ウィリアム：それはどうか知らないですが、とにかく 100! は 158 桁の数です．そんでもって 10^{100} は「たった」101 桁しかないから、比較にならないくらい 100! の方が大きいわけですね．

チャールズ：ちょっと待てよ．コンピューターを使おうが何をしようが、結局は計算してみないと分からないんだろう？

ウィリアム：いえいえ、そんなことはないですよ．ここで数学者の出番となるわけですが、10^{100} と 100! を比較したいわけですよね．そこでとりあえず

$$10^{100} = 10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10,$$
$$100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$$

って書いてみると、最初の 10 項は上は $10 \times 10 \times \cdots \times 9 \times 10$ っていうふうに 10 が 10 個並ぶのに対し、下の方は $1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10$ っていうふうに 1 から 10 までの数が順番に並ぶから、ここまでなら計算するまでもなく下よりも上の方が大きいわけです．

チャールズ：ふむふむ．

ウィリアム：ところが、11 番目からは上はあいかわらず $10 \times 10 \times \cdots \times 10 \times 10$ っていうふうに 10 が 90 個ずらっと並ぶのに対し、下の方は $11 \times 12 \times \cdots \times 99 \times 100$ っていうふうに延々と増え続けるわけです．これが例えば 10^{1000} と 1000! になったら、101 番目以降も 10^{1000} の方はひたすら 10 ばかり並ぶのに対し、1000! の方は 101 から 1000 までの数が並ぶんだから、1000! の方が圧倒的に大きいのは計算するまでもなく明らかですよね．こういう風に、いかにして計算せずに済ませるのが数学の醍醐味の一つでもあるんです．言ってみれば「楽をするために必死で考える」ってとこでしょうかね．

チャールズ：なるほど．サボるために頭を使うって訳だ．

ウィリアム：そういう言い方をすると語弊があるような気もしますが、まあいいでしょう．

ヘンリー　：とにかく、階乗は指数関数よりも強いってわけですね．じゃあ、これが最強なんですか？

ウィリアム：いやいや、そんなことは無いよ．

$$f(x) = x^x$$

みたいにすれば階乗よりも大きくなるし、それよりもさらに大きくしようと思えば例えば

$$f(x) = 10^{x^2}$$

みたいなのもあるね．

ヘンリー　：あ、なるほど．指数関数と多項式を合体させたわけですね．

ウィリアム：そう.「合体」じゃなくって「合成」というのが正式の呼び方だけどね. さらに大きくしたければ

$$f(x) = 10^{x^{100}}$$

とか、

$$f(x) = x^{x^x}$$

みたいにいくらでも大きくできるから、特に「最強」の関数っていうのはないよ.

ヘンリー：へー. 上には上があるって事ですね. それで、多項式時間っていうのは何のことですか？

ウィリアム：おっと、ついつい脱線してしまったけど、もともとはそういう話題だったね. 多項式時間っていうのは、ある問題が与えられたときに、それを解くのに必要な時間がその問題の「入力データのサイズ」の多項式で表されるって事だよ.「入力データのサイズ」って括弧を付けた理由は、正確な定義があるけどここでは言わないってこと.

ヘンリー：... おっしゃる意味が全然わからないんですが...

ウィリアム：例えばヘンリー君の宿題の場合、街の地図が渡されたときに最短の逃げ道を探しなさい、というのが問題だろう.

ヘンリー：そうですね.

ウィリアム：それじゃあ、地図がいったいどういう情報を持ってるかが問題なわけだ. 地図には例えば警察署がここにあって、駅がここにあって、みたいな情報がいろいろと書いてあるわけだけど、今回は別にそういうところに寄りたい訳じゃないから、警察署の場所みたいな情報は余分だろう.

ヘンリー：そりゃそうですよ. 誰が暗殺現場から逃げる途中で警官に道を聞いたりしますか.

ウィリアム：それに、今回は道だけを通って逃げる予定なんだよね. だから、道以外の場所がどうなってるかはどうでもいいわけだ. それに、道が真っ直ぐかそれとも曲がっているか、太いか細いか、みたいな情報は実は必要なくて、結局はそこを通るのに何分かかるのか、という事だけが分かればいい.

チャールズ：でも、実際の現場じゃ時間だけじゃなくって、人混みの方が尾行されにくいとか、挟み撃ちにあったら民家の庭を通って逃げるとか、他にもいろいろ考慮しないといけない事があるぜ.

ウィリアム：それはそうかも知れませんが、今日の宿題では単に最短の逃走経路を見つけよ、っていうだけの問題だから、そういうことは考えなくてもいいんですよ. こういう風に必要な性質だけを抜き出すことを**抽象**、そしてそれと同時に必要の無い性質を忘れることを**捨象**というんです. そんで

もって、数学者はなるべく思考を節約するために、問題を極限まで抽象化したがるんですよ．

チャールズ：でも、現実は複雑だぜ．そんな風に何でもかんでも抽象化しちまうと、現実と合わなくなっていつか大きな失敗をするぞ．だいたい、さっきは計算をさぼろうとしてたが、今回は思考までさぼろうっていうのかい．

ウィリアム：うーん、数学者というのはずぼらな人種なのかも知れないですね．抽象化をするときに必要な性質まで捨象しないように気をつけないといけないのはおっしゃる通りです．でも、抽象化することのメリットは単に思考を節約することだけじゃなくって、**問題の本質を明らかにする**ことと、**幅広い問題に応用できる**ことがあります．それに、難しい問題をいくつかのステップに分けて、解き易くするのにも役立ちますしね．

チャールズ：デカルトの「困難は分割せよ」だな．

ウィリアム：ああ、あれはデカルトの言葉だったんですか．私はてっきりマーフィーの法則か何かだと思ってました．

チャールズ：ばかやろう．大体、デカルトも数学者じゃないのか？

ウィリアム：そうですね．お恥ずかしい限りです．それはそうとして、話を元に戻すと、この逃走経路の問題を解くには、道がどういう風につながっていて、ある交差点から次の交差点までは何分かかるかさえ知っていればいいわけですね．

チャールズ：それはそうだな．

ウィリアム：そういうのを数学では「辺に重みの付いたグラフ」と言ったりします．つまり、頂点と辺があって、辺には正の数字が割り振られているわけです．そういうものは、頂点のリストと、各頂点を結ぶ辺の長さの表を与えれば決まるから、この場合の「入力データのサイズ」っていうのはおおよそこの表の大きさになるわけです．

チャールズ：例えば上の問題だと

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	2	2	3		4		
b	2	0			5			
c	2		0			3		
d	3			0	6	5	7	
e		5		6	0		3	2
f	4		3	5		0	3	
g				7	3	3	0	4
h					2		4	0

みたいになるわけだな．

ウィリアム：そうです．この表みたいに数字を縦と横に長方形に並べたものを**行列**って言ったりします．行列については面白い話がいろいろあるのですが、あまりにもいろいろありすぎて語り始めると収拾がつかなくなるので、今日はぐっと我慢してもとの話題に戻ることにすると、この「入力データのサイズ」が大きければ大きいほど問題は当然難しくなるわけですが、この難しくなり方の早さがどのくらいか、というのがさっき言った「多項式時間」がどうのこうの、という話になるわけです．ただ、単に「難しさ」と言うと漠然とし過ぎているので、正式にはコンピューターで解こうとするとどれくらい時間がかかるか、ということを問題にします．

ヘンリー　：すみません、完全に落ちこぼれちゃったみたいなんですが、上の表は何を表してるんですか？

ウィリアム：交差点から交差点までの所要時間だよ．例えば d の行を見ると、左から 3、空白、空白、0、6、5、7、空白となってるけど、これは d から a、e、f、g までの所要時間がそれぞれ 3 分、6 分、5 分、7 分であることを表している．空白は道がない事を意味していて、d から d までは 0 分で行けると解釈するわけだ．

ヘンリー　：なるほど．

ウィリアム：今回の問題では町中だから例えば a から b に行くのにかかる時間と b から a に行くのにかかる時間は同じだけど、もしこれが山道だったら、a から b には 2 分で行けるけど、b から a には登り坂で 5 分かかるということもあり得る．だから、今回の表は対角線を軸にして対称になっているけど、問題によっては対称にならないこともあるんだ．

ヘンリー　：それで、多項式時間って何ですか？

ウィリアム：今回の最短経路問題で言うと、交差点が全く無ければ一本道だから最短経路も何も無いわけだよね．で、逆に交差点がいっぱいあればそれだけ道が枝分かれしているってことで、選択肢が増えるから問題が難しくなるわけだ．そんでもって、コンピューターを使って問題を解くときに、交差点の個数を x、解くのにかかる時間を $f(x)$ とおくと、適当な多項式 $g(x)$ があって、x がある値以上の時に

$$f(x) < g(x)$$

となるとき、多項式時間で解けるっていうんだよ．

ヘンリー　：えっ？適当な多項式 $g(x)$ って？やっぱり意味が分からないんですけど？

ウィリアム：適当な多項式は適当な多項式だよ．意味が分からないって、何が分からないの？

チャールズ：「何が分からないの」って質問し返すのは良くないな．むしろ何が分からないかも分かってないんじゃないかな．

ソフィー　：とりあえずは「適当」っていう言葉の意味が分かってないんじゃない？

ウィリアム：ああ、適当っていうのは、何でもいいってことだよ．

ヘンリー　：ん？ん？$g(x)$ は何でもいいんですか？だったら $g(x)$ をめっちゃ大きく取れば、

$$f(x) < g(x)$$

にはできるから、どんな問題でも多項式時間で解けるんじゃないですか?

ウィリアム：いや、x を止めれば確かにそうかも知れないけど、ここで要求してるのは x がある値より上ならずーっと

$$f(x) < g(x)$$

だってことだから、例えば $f(x) = 10^x$ だったら $g(x)$ としてどんな多項式を持ってきても、たとえ x がある程度までの大きさなら $g(x)$ の方が大きくても、いずれは $f(x)$ の方が追い抜かして、それ以降は $f(x)$ の方が $g(x)$ よりも圧倒的に大きくなるんだ．

チャールズ：どんなにでかい多項式を持ってきたって、最後には指数関数に抜かれるってわけだな．

ソフィー　：ウサギとカメの話みたいね．

ウィリアム：指数関数はちょっとカメのイメージとは違いますけどね...

チャールズ：でも、コンピューターで解くって、どういう意味だ?どういうコンピューターを使うかによってかかる時間は違うし、同じコンピューターでも誰がプログラムするかで違うだろう？

ウィリアム：そうですね．だから正確にはどのコンピューターとどのプログラムを使ったときに、多項式時間で解けるかどうか、ということを問題にするわけです．普通は決定性チューリングマシンという理想的なコンピューターを考えて、それで解く際のステップの数を計算時間と定義します．今流行りの量子コンピューターとかを使うと、この定義では多項式時間で解く方法が知られていない問題に対しても多項式時間で解く方法があったりするらしいですよ．

チャールズ：それに、現実の問題だと x はそんなに大きくないこともあるから、多項式時間のプログラムより指数時間のプログラムの方が早く答えが出るって事もあるだろう．

ウィリアム：それもおっしゃる通りです．あくまで x が十分大きいときにどちらの方が時間がかかるか、ということを問題にしているのですから、x が小さければ指数時間のプログラムだって早く終わるかも知れません．それに、いくら多項式時間でも、$f(x) = x^{100}$ みたいなプログラムだと実際には使えないですしね．

ヘンリー　: で、結局今日の宿題はどうやって解けばいいんですか？

ソフィー　: それはこうすればいいのよ．まず、毛糸を道の長さに合わせて切って、地図の通りに結ぶのよ．それから、逃げ始める場所とアジトをそれぞれ右手と左手に持って、ピンと引っ張るの．そうすれば最短経路が分かるわ．

ヘンリー　: わっ、あったまいい！でも、そんな方法でいいんですか？毛糸を切ったり結んだりするのは面倒くさそうだし．

ウィリアム: 毛糸コンピューターですね．毛糸を切るのにかかる時間も結ぶのにかかる時間も表の大きさに比例して、引っ張るのは一瞬でできるから、確かに多項式時間で解けてますね．それに、同じことを毛糸コンピュータではなく普通のコンピューターでやることも出来て、それでもやっぱり多項式時間で解けることが簡単に分かります．これをダイクストラ法と言うんですが、どういうプログラムを書けばいいかは、ヘンリーくんの宿題ということにしておきましょうか．

ヘンリー　: うっ、宿題を教えてもらうはずが、逆に宿題を出されてしまいましたね...

ソフィー　: 多項式時間で解ける問題のことをPっていうのよね？P は多項式（Polynomial）の略？

ウィリアム: そうです．良くご存知ですね．P だからといって現実に簡単かどうかは分からないですが、理論計算機科学者は第一近似として、ある問題がPならそれは簡単だと考えるみたいです．

3　オイラー閉路問題—トポロジーの芽生え—

ヘンリー　: 今日は昨日の地図で、「アジトから出発して、全ての道を一度ずつ通って再びアジトに帰ってくるような経路を見つけよ」という問題が出ました．これってどうやったら解けるんですか？

チャールズ: 暗殺を決行する前にあらかじめ地図にある全ての道を通るのにかかる時間を自分の足で調べておけって訳だな．しかも、あまりうろちょろすると怪しまれるから、一度通った道は二度と通るなって事だ．

ソフィー　: いわゆる一筆書きの問題ね．それは解けるときもあるし、解けないときもあるわ．でも、解けるか解けないかはすぐ分かるし、解けるときに答えを見つけるのも簡単よ．

ウィリアム: それは数学ではオイラー閉路問題という有名な問題だよ．1786 年にオイラーという数学者が、ケーニヒスブルクという街にかかった 7 つの橋を一度ずつ通ってもとの場所に帰ってこられるか、という問題を否定的に解いたのが始まりだね．

ヘンリー　:「否定的に解く」って何ですか？

ソフィー　: 答えがないって答える事よ.

ヘンリー　: えっ、そんなのでも答えになるんですか？

チャールズ: そうだ. だいたい、世の中の大事な問題には答えが無いことも多いぞ. そういう時には何かを諦めないといけない.

ヘンリー　: うーん... で、今の問題の場合はどうなんですか？

ソフィー　: 一筆書きできるかどうかは、交差点に集まっている道の本数が奇数か偶数かだけで決まるのよ. もしも一筆書きできるとしたら、出発点以外のどの交差点にも一度入ったら必ず出ないといけない. 一方、出発点は一度出ていったら必ず帰ってこないといけないから、一筆書きできる地図ではどの交差点にも必ず偶数本の道がないとだめなのよ.

ヘンリー　: じゃあ逆に、交差点に集まっている道の本数が常に偶数なら一筆書きできるんですか？

ソフィー　: そうよ. だから、今回の地図は一筆書きできることになるわ. じゃあ、どう行けばいいか分かる？

ヘンリー　: うーんと、まず h から出発して e に行きますよね. で、次に b に行って、a に行って、d に行って、f に行って、g に行って、d に行って、e に行って、また g に行って、あれ、これだともう h に帰ってくるしかなくって、c には行けなくなっちゃいますね. どこで間違ったんだろう...

チャールズ: f から g に行ったせいだな. そこはまず c に行って、a に行って、また f に戻ってきてから、さっきと同じように行けば全部回れるぜ.

ソフィー　: 一筆書きを成功させるためのルールも簡単よ. まず、ある道を通ったら地図からその道を消すの. で、ある交差点まで行って、次にどこの交差点に行くかを決めるときに、地図を見て、次に通る道を消したらグラフがばらばらになってしまうような道は避けるの. 一筆書きできる地図はこの手順で必ず一筆書きできるわ. その証明は難しくないから、ヘンリーくんの今日の宿題ね.

ヘンリー　: ああ、今日もまた宿題が増えてしまいましたね...

ウィリアム: ところで、前回の最短経路問題を考えるときには実際の街を抽象化して、道の繋がり方と長ささえ分かれば良かったけど、今回は道の長さも忘れてしまって良くて、繋がり方さえ知っていればいい訳だよね. だから、ある意味で究極に抽象化されてるわけだ. こういう風に長さを忘れて繋がり方だけを問題にするような幾何学があって、トポロジーと呼ばれている. これは図形が持っている一番基本的な性質を研究する学問で、20 世紀に大きく進歩したんだけど、今日出てきたオイラーの仕事はその先駆けになっているんだよ.

4　ハミルトン閉路問題—NP 完全って何？—

ヘンリー　：今日は「全ての交差点を一度だけ通る道を探せ」っていう宿題が出ました．これ、どうすれば解けるんでしょう？

ソフィー　：昨日の宿題と似てるわね．昨日は全ての道を通れっていう指令だったけど、今日は全ての交差点を偵察しろっていう訳ね．別に全部の道を通らなくていいんだから、昨日の問題より簡単なんじゃないかしら．例えば $h \to e \to b \to a \to c \to f \to d \to g \to h$ が答えね.

ウィリアム：それも数学ではすごく有名な問題で、ハミルトン閉路問題と呼ばれているんですよ．確かにこの問題だけ見れば昨日よりも易しそうですけど、実は NP 完全と呼ばれるクラスに属する有名な難問なんです.

ヘンリー　：NP 完全って何ですか？

ウィリアム：それにはまず NP を説明しないといけないね．NP というのは非決定性多項式時間（Non-deterministic Polynomial time）の略で、非決定性チューリングマシンという機械を使えば多項式時間で解けるような問題の事だよ.

ソフィー　：非多項式時間（Not Polynomial time）の略じゃないのね．でも、非決定性チューリングマシンって何？

ウィリアム：正式の定義は長くて分かりにくいのでここで説明するのは控えますが、イメージとしては非常に強力な並列計算機のようなものですね．普通のコンピューターでは多項式時間で出来ない計算も多項式時間で出来ちゃうという点では量子コンピューターと似ていますが、一般には量子コンピューターよりもさらに強力だと思われているようです.

ヘンリー　：うーん、「並列マシンなら多項式時間で解ける」みたいに言われてもいまいちイメージが掴めないんですが...

ウィリアム：別の言い方をするなら、普通のコンピューターで多項式時間のうちに解を検証できるのが NP の定義と思ってもいい.

ヘンリー　：... やっぱり良く分からないですが...

ウィリアム：つまり、例えばある問題があって、その答えの候補が与えられたときに、それが本当に答えになっているかどうかを検証するプログラムが多項式時間でイエスかノーかの答えを出すなら、その問題は NP ということだよ.

ヘンリー　：あれ、答えが多項式時間で検証できるなら、総当たりをすれば多項式時間で問題が解けちゃって、P と NP を区別する意味が無くなりません？

ウィリアム：おっと、それは違うよ．総当たりをしようとすると、それぞれは多項式時間で終わっても、問題が複雑になるときの答えの候補の増え方が多項式とは限らないことに注意しないと.

ヘンリー　：あっ、そうか．でも、逆はどうですか？P なら NP なんですか？

ウィリアム：それは自明だね．

ヘンリー　：じゃあ問題はNPならPかってことですね．NPだけどPじゃない問題ってあるんですか？

ウィリアム：それはアメリカのクレイ数学研究所というところが出した「ミレニアム懸賞問題」という問題に入っていて、解けば100万ドルもらえる有名な問題だよ．

ヘンリー　：100万ドルですか．いいなー（遠い目）．それだけあればモナコで遊んで暮しますよ．

ウィリアム：モナコで遊んで暮したいなら100万ドルでは足りないような気もするけど、それはさておき、NPならPかどうかは難しい問題だけど、実はこの問題がPならNPの問題は全部Pだという問題があって、それが**NP完全**と呼ばれているんだ．

ヘンリー　：NP完全ですか．それはNPの中で最強の問題ってことですか？

ウィリアム：うーん、まあそうだね．もう少し正確に言うと、ある問題がNP完全とは、どんなNPの問題も多項式時間でその問題に帰着できることを言うんだ．だから、あるNP完全問題を多項式時間で解く手順があれば、どんなNPの問題も多項式時間で解くことができるというわけ．

ヘンリー　：でも、どんなNPの問題も多項式時間でその問題に帰着できるって証明するのは大変そうですね．大体、NPの問題がどれだけあるか見当もつかないから、それが全部多項式時間である問題に帰着できるなんてどうやって証明していいのか全然分かりませんね．

ウィリアム：クックという人が1971年に充足可能性問題という問題がNP完全だというのを証明したので、その後はその問題が多項式時間で帰着できることを示せば良くなったんだよ．クックはこの業績で計算機科学のノーベル賞とも呼ばれるチューリング賞を受賞したんだ．

ヘンリー　：へえ．で、今日の宿題はNP完全なんですか．

ウィリアム：そう．クックの仕事を受けてカープという人が1972年にNP完全な問題の21個のリストを挙げたんだ．ハミルトン閉路問題はその中に入っている．

ヘンリー　：21個も？よっぽど暇だったんでしょうかね．

ウィリアム：こらこら．彼もこの業績でチューリング賞を受賞している．

ヘンリー　：ふーん．

ウィリアム：ちなみにチューリング賞には、インテルがスポンサーになって10万ドルの賞金がついているらしいよ．クレイの100万ドルや、ノーベル賞の約100万ユーロよりはずっと少ないけどね．

ヘンリー　：10 万ドルですか．それじゃあモナコで遊んで暮すには全然足りなさそうですね．あ、でも P と NP が違うことを証明すれば、両方とももらえるかも知れないんですよね．110 万ドルあったら何に使おうかなー．

ソフィー　：単に 110 万ドルが目当てだったら理論計算機科学をやるよりインテルとかマイクロソフトに入った方がいいんじゃない？

ヘンリー　：それもそうですね．じゃあ、スパイをクビになったらインテルに入ろうかな♪

チャールズ：やれやれ...

5　巡回セールスマン問題—欲張ると損をする事も—

ヘンリー　：明日は試験なんですけど、何でも「全ての都市を一度ずつ通る最短経路を選べ」っていう問題が出るそうなんですよ．

ウィリアム：その問題は数学では**巡回セールスマン問題**って言って、**NP 困難**だというので有名だね．

ヘンリー　：「NP 困難」ですか？「NP 完全」じゃなくて？

ウィリアム：「NP 完全」っていうのは NP の問題にしか使わないけど、「NP 困難」っていうのは NP の問題が多項式時間で帰着できる問題なら何でもそう呼ぶんだ．だから、「NP 困難かつ NP ならば NP 完全」ということになる．

ヘンリー　：へえ、じゃあ超難しい問題というわけですね．そんな問題、ちゃんと時間内に解けるかな...

ソフィー　：そんなに心配しなくてもいいわよ．教官もああ見えて実はやさしいから、最短経路じゃなくても、最短経路からそれほど離れていない道を答えれば合格させてくれるわよ．

ウィリアム：あ、受ける前からそんな裏情報教えちゃっていいんですか？それに、私は正解じゃない回答でも合格させるっていうあのポリシーには賛成しかねるんですが．

チャールズ：いいってことよ．だいたい、世の中ではあほみたいに時間をかけて厳密な答えを出すよりも、ほどほどの時間でいい近似をした方がいい場合がたくさんあるんだから．

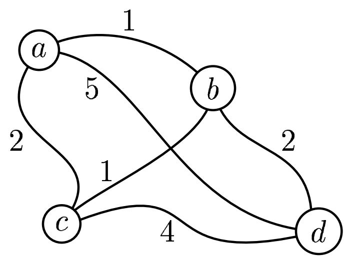
ソフィー　：そうね．

ウィリアム：でも、総当たり以外の厳密解法もいろいろと研究されていて、今では数万都市の巡回セールスマン問題でも厳密に解けたりするみたいですよ．

チャールズ：それはpla33810の事かい．たしかにそういう例もあるけど、あれは2.66GHzのIntel Xeonプロセッサーの CPU 時間で15年以上もかかるような計算の結果らしいからな．[1]

ヘンリー　：最短経路を求める問題なんだから、ダイクストラ法と同じように近い方、近い方と選んだらいいんじゃないですか？

チャールズ：それは甘いな．じゃあこんな場合を考えてみよう．



aからスタートして貪欲アルゴリズムで道を選ぶと、まずaから一番近いbに行くことになる．bから見てa以外で一番近いのはcなので、結局$a \to b \to c \to d \to a$という順番になるけど、この場合の距離は11になる．一方、この場合の道の選び方は6通りあるけど、逆向きに回っても距離は同じだから、本質的には3通りだけ調べれば良いことになる．そうすると、上の道順以外の2通りというのは$a \to c \to b \to d \to a$という道順と$a \to b \to d \to c \to a$という道順で、距離はそれぞれ10と9だ．つまり、$a$からスタートすると、貪欲アルゴリズムでは最悪の選択をしてしまうことになる．
交差点の数を4からもっと増やしても同じようなことは起きる．つまり、地図によっては貪欲アルゴリズムがあり得る最長の経路を選択してしまうんだな．

ウィリアム：ダイクストラ法で解が求まる最短経路問題の時と違うのは、最適解の一部を取っても必ずしも部分問題の最適解になっていない事ですね．

ソフィー　：最適解を求めるのが難しいときには上で使ったみたいな経験的アルゴリズムを使わざるを得なくなるんだけど、誤差の保証が無いアルゴリズムを使うときには十分注意しないといけないって事ね．1分の差が命取りになることもあるんだから．

ヘンリー　：話を聞いていて明日の試験がますます不安になってきました．うーん、どうしよう...

ソフィー　：大丈夫よ．人間の直感っていうのは意外とあてになるらしくって、正確な地図を「ぐっと睨んで」探した経路は最適解とそう掛け離れていない

[1] W. Cook, D. Espinoza, and M Goycoolea, *Computing with Domino-Parity Inequalities for the TSP* というプレプリントで33810都市の巡回セールスマン問題の最適解がアナウンスされている．

事が多いらしいから．[2]

ウィリアム：そういうひらめきみたいなものって、定式化するのが難しいんですよね．

チャールズ：いくらコンピューターが進歩しても、人間もまだまだ捨てたもんじゃないって事だな．

6 パーティーの席順—ラムゼー理論—

ヘンリー　：今日はラムゼー理論とかいうのを教わったんですが、完全グラフがどうとか、補グラフがどうとか、難しすぎて何が何やらさっぱりですよ．

ウィリアム：確かにラムゼーの定理の厳密な定式化と証明は初心者にはちょっと難しいかも知れないね．

ソフィー　：でもラムゼーの定理の一番簡単なバージョンは「友人と他人の定理」と呼ばれていて、証明も割と簡単よ．

ヘンリー　：何ですか？その「友人と他人の定理」って？

ソフィー　：例えばあるパーティーがあって、基本的にテーブルには 2 人一組で座ってもらうんだけど、参加者の人数が奇数だから、どうしても 1 つだけ 3 人掛けのテーブルができるとするわね．ここに招待客から 3 人を選んで座ってもらうんだけど、そのうち 2 人は友達だけどそこに 1 人だけ他人が混じっていると、2 人だけで会話が弾んじゃって 1 人はさみしい思いをするから、なるべく 3 人とも友達であるか、それが無理ならせめて 3 人とも他人になるように選びたいんだけど、このパーティーの参加者が何人だったら必ずそういう選び方があるか、っていうのが問題よ．

ヘンリー　：なんだかこじつけみたいな問題ですね．で、答えは何人なんですか？

ソフィー　：上の問題だと 7 人ね．でも、人数が偶数でも良ければ、6 人いれば必ず友達か他人の 3 人を選べるわ．これを 3 人から何人にしても、十分たくさんの参加者がいればそれだけの人数の友達か他人のグループを作れるっていうのがラムゼーの定理よ．これを例えば 4 人にしようと思ったら、必要な参加者の数は 18 よ．つまり、18 人以上のパーティーでは必ず 4 人の友達グループか、4 人のお互いに全く知らないグループができるって訳ね．

ウィリアム：あと、ラムゼーの定理の面白いところは証明が非構成的なことだね．つまり、十分大きなパーティーならかならずそういうグループが作れるということはいつでも証明されているのに、必要な人数が何人なのかはほとんどの場合に知られていないんだ．

[2] The Journal of Problem Solving という雑誌の第一巻は巡回セールスマン問題に対する人間の能力を特集している．

チャールズ：ラムゼー理論の一番簡単な場合は「友人と他人の定理」じゃなくって鳩の巣原理だろう.

ウィリアム：Dirichlet の部屋割り論法とも言いますね.

ヘンリー　：何なんですか？その鳩の巣とか部屋割りとかいうのは？

ソフィー　：鳩の数の方が鳩の巣の数より多かったら、必ず一つの巣に一羽以上鳩が入らないと全部の鳩は入りきらない、っていう原理よ.

ヘンリー　：何だ、そんなの当たり前じゃないですか. そんなことにいちいち人の名前がついてるんですか？

ウィリアム：でも、大事な原理ではあるんだよ. 例えばこれから、ファイルを圧縮するときに、もとに戻せるような圧縮方式（いわゆる可逆圧縮）だとサイズが大きくなってしまうような場合が必ずあることが分かる.

ソフィー　：それに、例えばこんな問題にも使えるわ. ある人がタンスの中に白い靴下を 10 個（つまり 5 足）黒い靴下を 12 個、青い靴下を 14 個ばらばらに持っていたとして、ある日停電が起こって暗闇で靴下を探さないといけなくなったとき、何個靴下を掴めば必ずその中に同じ色の組を見つけられると思う？

ヘンリー　：えーっと、14+12+2 で 28 個くらい？

ソフィー　：それは全ての色の組が最低一組はあるために必要な個数よね. そうじゃなくって、単に同じ色の組が一つでもあればいいんだから、4 つで十分なのよ. この場合、鳩が靴下で、鳩の巣が靴下の色ね. 巣が 3 つあるので、1 つの巣に最低 2 羽の鳩がいるためには全部で 4 羽いれば十分なのよ.

チャールズ：その他に、ロンドンには髪の毛の本数がぴったり同じの市民が少なくとも 2 人はいるということも簡単に証明できるぜ. 人間の髪の毛の数なんて 10 万ー15 万本程度なのに、ロンドン市の人口は 700 万人以上いるからな. だから、実際には最低でも 20 人くらいは髪の毛の本数が同じ人がいる計算になる.

ウィリアム：ちょっと脱線するけど、髪の毛といえば、全人類が禿だっていうのが数学的帰納法で証明できるのは知ってる？ただし、ここで「禿」っていうのは髪の毛が一本もないという意味ではなくって、単に髪の毛が薄いっていう意味だとして.

ヘンリー　：えっ、そうなんですか？聞いたことがないですね.

ウィリアム：簡単だよ. まず、髪の毛が一本もなければ禿だよね. 次に、髪の毛が n 本の時に禿だとすれば、そこから 1 本くらい髪の毛を増やしたって禿だよね.

ヘンリー　：確かに実感として、髪の毛 1 本の差で禿になったり禿じゃなくなったりはしないですね.

ウィリアム：じゃあ数学的帰納法の原理で、髪の毛が何本あっても禿だということになるよね．

ヘンリー　：あれっ、何かが変ですね．どこがおかしいんだろう...

ウィリアム：じゃあ聞くけど、髪の毛が 1000 本だと禿だと思う？

ヘンリー　：うーん、1000 本くらいだったら禿げといってもいいんじゃないですか．

ウィリアム：じゃあ、一万本だったら？

ヘンリー　：普通の人は十万本くらいあるんですよね？だったら、やっぱり禿じゃないですか？

ウィリアム：じゃあ、五万本だったら？

ヘンリー　：うーん、それは生え方によるんじゃないですか？まんべんなく生えていたら禿じゃないかも知れないけど、横にばっかり生えていて頭頂部がつるつるだったら禿って言ってもいいような気がするから．

ウィリアム：じゃあ禿っていうのは本数だけでは決まらないって事だよね．だから、本数を基準に禿を決めているさっきの議論は間違ってるって事になる．大体、一万本では禿で、十万本では禿でないとしても、一万と十万の間にはっきりとした禿のボーダーラインがある訳じゃないだろう．

ヘンリー　：そりゃそうですね．例えば七万本がボーダーだとしたら、七万本の人は一本髪の毛が抜けるとその日から禿だと宣告されちゃうわけですか．それはかわいそうですよね．

ウィリアム：結局、禿っていうのは厳密に定義できないので、そういうものに対して数学的な議論をしようとしても意味がないんだよ．だから、「禿」のかわりに「髪の毛が七万本以下の人」と言えばちゃんと厳密な議論ができる．

チャールズ：大体、世の中を禿とそれ以外の二つに分けようっていうのがそもそも間違ってるんだ．この話に限らず、世の中は複雑なんだから、善と悪とか、敵と味方みたいにむりやり二つに分ける議論には気をつけた方がいいぜ．

7　正直者と嘘つきの論理学

ヘンリー　：今日は論理的に考えるトレーニングとかいうのをさせられました．嘘つきの教官と正直者の教官がいて、嘘つきは必ず嘘を、正直者は必ず真実を話すんですが、誰が嘘つきで誰が正直者かはあらかじめ知らされずに、会話をしているうちに誰が嘘つきで誰が正直者か区別しろ、というんです．明日は試験なんですが、不安だなぁ...

チャールズ：論理的に考えるっていうのは大事だからな．もちろん人間は論理的じゃないし、世の中の嘘つきは嘘の中に本当のことも混ぜるから始末に悪い

んだけど、最初の練習として嘘つきは必ず嘘をつくっていう設定にしてあるんだ.

ウィリアム：嘘つきと正直者を見分けるコツとしては、考えられる可能性を全てリストアップしておいて、そこから会話を重ねるごとに矛盾する選択肢をどんどん排除していくことかな．最後に一つだけ可能性が残れば、それが正解だね.

ソフィー：じゃあ明日のために私たちで予行演習をしてあげましょうか．例えば、秘密のメモがあって、それの隠し場所を教えるけど、盗聴されている可能性があるから私たちのうちのだれかは嘘つきで、誰かは正直だという設定にしましょう．じゃあ始めるわよ.

チャールズ：とりあえず、俺は正直だ．で、メモは庭の木の下に埋めてある.

ソフィー：正直なのは私よ．メモは浴室の鏡の裏側に隠してあるわ.

ウィリアム：二人とも嘘つきだ．正直なのは僕で、メモは床下に隠してあるよ.

チャールズ：これでメモはどこにあるか分かったかな？

ヘンリー：ちょっ、ちょっと待ってくださいね．おかしいな．三人とも自分が正直だって言っているわけですよね．で、正直なら自分は正直だって言うわけだし、嘘つきでも自分は正直だって言うんだから、それだけじゃあ誰が正直か分からないんじゃないですか？

ウィリアム：ところがそうじゃないんだな．僕は「二人とも嘘つきだ」って言っただろう．これがポイントなんだ.

ヘンリー：ちょっと待ってくださいね... ウィリアムが嘘つきなら、「二人とも嘘つき」って言うことは二人とも正直だって事になりますよね．でも、二人は言っていることが食い違っているからこれはありえない．だからウィリアムは正直で、メモは床下ですね！[3]

ソフィー：良くできました！ここでは、正直者は真実しか言わず、嘘つきは嘘しかつかないということが大事なわけね.

ウィリアム：今回は3人がそれぞれ正直か嘘つきかで $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りの可能性があって、チャールズの発言の直後ではどれもあり得るんだけど、その次のソフィーの発言で2人とも正直だという可能性が無くなって7通りになり、僕の発言で可能性がたった1つに絞られるんだね.

ヘンリー：なんだかパズルみたいですね.

[3] ここでウィリアムが「二人とも嘘つき」と言ったのは、「チャールズが嘘つき」という主張と「ソフィーが嘘つき」という主張の両方を同時にしていると解釈している．これをもし「チャールズが嘘つきで、かつソフィーも嘘つき」という単独の主張と解釈すると、その否定は「チャールズかソフィーのどちらかは正直」となり、この会話では誰が正直か分からなくなる.

ウィリアム：うーん、論理的な推論で解ける問題っていうのは多かれ少なかれパズルだよね．例えば他に次のような問題もあるよ．赤い帽子が１つと青い帽子が２つあって、２人のプレーヤーが暗闇でそのうちの１つずつを選んで頭に被る．そうして電気をつけるんだが、相手の帽子の色は分かるが自分の帽子は自分からは見えないとする．ゲームのルールは相手よりも先に自分の帽子の色を叫べば勝ちというものだが、実際に電気をつけてみると二人ともしばらく無言だった．次の瞬間、二人のうちのより論理的な方が自分の色を叫んでゲームの勝者になったんだけど、彼の帽子の色が何色で、どうして彼はそれが分かったと思う？

ヘンリー　：うーんと、彼は相手の帽子の色を見て自分の帽子の色が分かったんですよね．でも、相手の帽子の色が青かったら、自分の帽子の色は青かも知れないし、赤かも知れない．だから、彼の帽子の色は青で、相手の帽子が赤かったんですね！

ウィリアム：はずれー．そうじゃないんだな．もし相手の帽子の色が赤だったらすぐに自分の帽子の色が青だって分かっただろうし、「二人のうちのより論理的な方が勝者になった」ということにもならない．二人ともしばらく無言だったのが重要なポイントだね．

ヘンリー　：でも、二人とも青だったら自分の帽子の色が分かるわけないじゃないですか．

ウィリアム：電気をつけた瞬間に限って言えばその通りだよ．でも、今回はプレーヤーは相手の帽子の色の他に、さらに余分の情報も持ってるんだよ．つまり、ゲームのルールと、相手がすぐには自分の色が分からなかった、という情報さ．

ヘンリー　：あ、ちょっと分かってきた気がします... つまり、もし自分の帽子の色が赤かったら、相手が即座に「青！」って叫んでゲームが終わっていたはずなのに、しばらく黙っているって事は、自分の帽子が青いに違いない、っていうわけですね！なるほど．

ウィリアム：これをもっとややこしくすると、例えば３人で赤が２つ、青が３つにして、プレーヤーが輪になって順番に自分の色が分かるかどうか答える、っていう形式にもできるね．これで何人目で正解が出るかで、色の配置がどうなっているかがある程度分かるんだよ．

ヘンリー　：えっと、考えさせてくださいね．まず、一人目が答えたとしたら、帽子の色は一人目から順に青、赤、赤ですよね．二人目が答えたとしたら、赤、青、赤で、三人目が答えたとしたら赤、赤、青ですか．

ウィリアム：そんなに簡単じゃないよ．全員が論理的に考えるとしたら、他にも可能性があるはずだし、四人目になって初めて答えるというケースもありえる．

ヘンリー　: えっ、そうなんですか？あっ、そうか、もし配置が青、青、赤だったら、一人目が答えられず、二人目は一人目が答えられなかったので青、赤、赤ではないと分かっているので、青、青、赤だと正しく答えられますね.

ウィリアム: そうだ. そして、同じ理屈でもし配置が赤、青、青や青、赤、青だったとしても、三人目は自分の色を答えられる.

ヘンリー　: なるほど. じゃあ配置が青、青、青だったら、三人目も自分の色は分からないわけですが、三人目も分からなかったという事から、もう一度最初の人に順番が回ってきたとき、自分の色は青だと分かるわけですね. うーん、難しい...

ウィリアム: ここでのポイントは、赤い帽子が高々2個しかないという情報と、全てのプレーヤーが論理的だという情報だ. このどちらが欠てもこのゲームは成り立たないからね.

チャールズ: 相手が常に論理的な行動をとると分かっていると、相手の出方を観察することで情報が引き出せるって訳だな. 例えばポーカーでは、どんなカードの組合わせが初めに自分に回ってきたときに、どのカードを交換するのが最も有利か（つまり、勝つ確率が高くなるか）というのはきちんと計算できる. だったらその通り交換するのが論理的な行動なんだが、実はこれで相手にもある程度自分の手がばれることになる. 自分が何枚カードを交換するかは相手にも分かるからな. 例えば、カードを3枚交換すれば、いかにもいい手じゃないというのがばればれだ. もっとも、その交換の結果としてとてもいい手になることもあり得るけど.

ソフィー　: だから、あまりにも論理的な行動をとりすぎると手の内を明すことになって、駆け引きで不利な状況に追い込まれたりすることもあるってことね. こういうことから分かるのは、常に嘘をつく人間や、完璧に論理的な行動をするプレーヤーはある意味で扱いやすいってことよ. 逆に言うと、相手を騙そうと思えば嘘と真実を適当に織り混ぜたり、常に最適の行動をとるんじゃなくって時折不合理な行動をとったりしないといけないの. まあ、あまりまっとうな生き方とは言えないかもしれないけどね.