幾何学基礎 2 演義

問題 1.1. f を集合 X から集合 Y への写像、g を集合 Y から集合 Z への写像とする．この時、次のそれぞれの主張に対し、正しければ証明を、正しくなければ反例を与えよ：

1. f が全射なら $g \circ f$ は全射.
2. f が単射なら $g \circ f$ は単射.
3. g が全射なら $g \circ f$ は全射.
4. g が単射なら $g \circ f$ は単射.
5. $g \circ f$ が全射なら f は全射.
6. $g \circ f$ が単射なら f は単射.
7. $g \circ f$ が全射なら g は全射.
8. $g \circ f$ が単射なら g は単射.

問題 1.2. 適当な集合 X とその上の二項関係 $\sim$ で、次のようなものの例を与えよ：

1. 反射的だが、対称でも推移的でもないもの.
2. 対称だが、反射的でも推移的でもないもの.
3. 推移的だが、反射的でも対称でもないもの.

問題 1.3. X を集合、$\sim$ を X の上の同値関係とする.

1. X から商集合 $X/_\sim$ への自然な全射

$$p : X \to X/_\sim$$

で、X の元 x を x の属する同値類に送るものが存在することを示せ.

2. Y を集合とし、X から Y への写像 $f : X \to Y$ で、$x \sim y$ なら $f(x) = f(y)$ となるものが与えられたとする．この時、写像 $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ で $f = \overline{f} \circ p$ となるものがただ一つ存在することを示せ.

問題 1.4. 適当な集合 X とその上の二項関係 $\leq$ で、次のようなものの例を与えよ：

1. 反射的だが、反対称でも推移的でもないもの.
2. 反対称だが、反射的でも推移的でもないもの.
3. 推移的だが、反射的でも反対称でもないもの.

定義 1.1. 全順序集合 $(X, \leq)$ で任意の空でない部分集合が最小元を持つものを**整列集合 (well-ordered set)** と呼ぶ.

問題 1.5. 次のようなものの例を与えよ：

1. 順序集合だが、全順序集合でないもの.
2. 全順序集合だが、整列集合ではないもの.
3. 整列集合.

問題 1.6. 順序集合が最小元を持てば、それが唯一の極小元になることを示せ.

問題 1.7. 順序集合とその元で、極小ではあるが最小ではないものの例を与えよ.

問題 1.8. 整列集合の任意の部分集合には自然に整列集合の構造が入ることを示せ.

問題 1.9. 「任意の集合は、その上に適当に順序を定めることによって整列集合にできる」という命題を Zermelo の**整列定理 (well-ordering theorem)** と呼び、**選択公理**と同値であることが知られている. この整列定理を仮定して、選択公理と同値であることが知られている次の命題を示せ：

1. Λ を添字集合とする空ではない集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も空ではない.
2. 集合 X から集合 Y への全射 $f : X \to Y$ に対し、ある単射 $g : Y \to X$ が存在して $f \circ g$ が Y の恒等写像になる.

問題 1.10. 整数係数の多項式の根として得られる複素数を**代数的数 (algebraic number)** と呼ぶが、代数的数の集合が可算集合であることを示せ.

問題 1.11. 実数の集合 $\mathbb{R}$ と、その直積 $\mathbb{R}^2$ の濃度が等しいことを示せ.

定義 1.2. 集合 X と Y に対し、X から Y への写像全体の集合を Y^X で表わす.

問題 1.12. 有限集合 X と Y に対し

$$\left|X^Y\right| = |X|^{|Y|}$$

となることを示せ. 但し、有限集合 X に対し $|X|$ で X の元の個数を表わす.

問題 1.13. 集合 X に対し、X から 2 つの元からなる集合への写像全体の集合を 2^X で表わすと、2^X は X の冪集合と自然な 1 対 1 対応を持つことを示せ.

問題 1.14. 有理数の集合の冪集合と実数の集合の濃度が等しいことを示せ.

問題 1.15. 任意の集合に対し、その冪集合ともとの集合の濃度は等しくないことを示せ.

問題 1.16. 集合が無限集合であることと、その真部分集合との間に全単射が存在することが同値であることを示せ. ただし、整列定理は仮定して良い.

幾何学基礎 2 演義

問題 2.1. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への全単射は存在するが、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な全単射で、逆も連続になるようなものは存在しない．このことを次のようにして示せ：

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を連続な全単射とすると、f を $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に制限したもの $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ も像への連続な全単射になる．

2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の任意の 2 点 p と q に対し、連続写像 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で $c(0) = p$ かつ $c(1) = q$ となるものが存在する．

3. ところが、$\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ の 2 点 r と s で、どのような連続写像 $d : [0,1] \to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ を持ってきても $d(0) = r$ かつ $d(1) = s$ とはできないものが存在する．

4. 一方、$f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ が連続なので、任意の $r, s \in \mathbb{R}$ に対して $f(p) = r$, $f(q) = s$ となる $p, q \in \mathbb{R}^2$ と、$c(0) = p$ かつ $c(1) = q$ となる連続写像 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を取って $d = f \circ c : [0,1] \to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ とおくと、この d は $d(0) = r$ かつ $d(1) = s$ なる連続写像を与える．

5. 従って、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な全単射で、逆も連続になるようなものは存在しない．このことを指して、$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}$ は**同相 (homeomorphic)** ではないと言う．より強く、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な単射は存在しない．

また、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な全射は存在する．従って、上の議論では単射性を本質的に使っているのだが、それはどこか．

問題 2.2. V を実 3 次元のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ とし、W を $(1,1,1) \in V$ で生成される V の部分ベクトル空間とする．V の同値関係 $\sim$ を、$x, y \in V$ に対し $x - y \in W$ の時 $x \sim y$ として定め、これによる商空間を V/W と書く．この時、V/W 上の線形写像 f を、$[(x,y,z)] \in V/W$ に対し

$$f([(x,y,z)]) = x + y + z$$

となるように定義することはできない（well-defined ではない）ことを示せ．

問題 2.3. X を集合、$f : X \to X$ を X から X への写像とし、f を 2 回合成したもの $f^2 : X \to X$ が X の恒等写像になると仮定する．この時、次が成り立つことを示せ：

1. f は全射．

2. f は単射．

問題 2.4. 集合 X と関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が距離空間の公理から「$x, y \in X$ が $d(x,y) = 0$ を満たせば $x = y$」という条件を除いたものを満たすとき、組 (X, d) を**擬距離空間 (pseudometric space)** と呼ぶ．擬距離空間 (X, d) に対し X の 2 項関係 $\sim$ を、$d(x,y) = 0$ の時 $x \sim y$ として定義すると、$\sim$ は同値関係になることを示せ．さらに、写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ は写像 $\overline{d} : (X/\sim) \times (X/\sim) \to \mathbb{R}$ を引き起こし、組 $(X/\sim, \overline{d})$ は距離空間になることを示せ．これを擬距離空間 (X, d) に付随する距離空間と呼ぶ．

定義 2.1. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V から非負の実数の集合 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像 $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$ が**ノルム**であるとは、次の 3 つの条件を満たすことを指す：

- 任意の $v \in V$ に対し、$v = 0$ と $\|v\| = 0$ は同値.
- 任意の $v \in V$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
- 任意の $v, w \in V$ に対して $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

ベクトル空間とその上のノルムの組を**ノルム空間**と呼ぶ.

問題 2.5. ノルム空間 $(V, \|\bullet\|)$ に対し、関数 $d : V \times V \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定義すると、これは V 上の距離を与えることを示せ.

問題 2.6. ノルム空間 $(V, \|\bullet\|)$ に対し、ノルムを保つ線形自己同型の集合は群をなすことを示せ.

問題 2.7. 有限次元のノルム空間 $(V, \|\bullet\|)$ からノルム空間 $(W, \|\bullet\|)$ への線形写像の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ の上の関数 $\|\bullet\|$ を、$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して

$$\|f\| = \sup_{v \in V} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}$$

で定義すると、これは $\mathrm{Hom}(V, W)$ のノルムを与えることを示せ．このノルムを $\mathrm{Hom}(V, W)$ の**作用素ノルム**と呼ぶ．また、この定義は V が無限次元の時にはうまく行かないことを示せ.
(ヒント：sup が存在しないような線形写像を与えよ．)

定義 2.2. 距離空間 (X, d) の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy 列**であるとは、任意の正数 ϵ に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n と m に対して $d(p_n, p_m) < \epsilon$ が成り立つことを指す.

定義 2.3. 距離空間 (X, d) の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $p \in X$ に**収束する (converge)** とは、任意の正数 ϵ に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n に対して $d(p_n, p) < \epsilon$ が成り立つことを指す.

問題 2.8. 距離空間 (X, d) の収束する点列は Cauchy 列であることを示せ.

問題 2.9. 距離空間 (X, d) の Cauchy 列が収束するとき、その収束先はただ一つに定まることを示せ.

定義 2.4. 距離空間 (X, d) は、Cauchy 列が必ず X の中に収束先を持つとき 完備 (**complete**) であると言う.

問題 2.10. $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とし、関数 $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して $d(x, y) = |x - y|$ で定義すると、組 $(\mathbb{Q}, d)$ は完備ではない距離空間になることを示せ.

幾何学基礎2演義

問題 3.1. 距離空間 (X,d) の Cauchy 列の集合を $\widetilde{X}$ とおくと、$\{p_n\}_{n=1}^{\infty},\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \in \widetilde{X}$ に対して

$$\widetilde{d}(\{p_n\}_{n=1}^{\infty},\{q_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} d(p_n,q_n)$$

とおくことで $\widetilde{X}$ の擬距離 $\widetilde{d}:\widetilde{X}\times\widetilde{X}\to\mathbb{R}$ が定まることを示せ．この擬距離空間 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ に付随する距離空間を (X,d) の**完備化 (completion)** と呼び、$(\overline{X},\overline{d})$ で表わす.

注意 3.1. 問題 2.10 で与えられた距離空間 $(\mathbb{Q},d)$ の完備化として、実数の集合に通常の距離を入れたものが得られる.

問題 3.2. 任意の距離空間に対し、その完備化への距離を保つ自然な単射が存在することを示せ.

定義 3.2. 距離空間 (X,d_X) から (Y,d_Y) への写像が**一様連続 (uniformly continuous)** であるとは、任意の正数 ϵ に対してある正数 δ が存在して、$x,x'\in X$ が $d_X(x,x')<\delta$ を満たせば $d_Y(f(x),f(x'))<\epsilon$ となることを指す.

問題 3.3. 距離空間 (X,d) の完備化 $(\overline{X},\overline{d})$ は次の性質で特徴づけられることを示せ：

- $(\overline{X},\overline{d})$ は (X,d) を部分空間として持つ完備距離空間であり、任意の完備距離空間 (N,d_N) と一様連続写像 $f:X\to N$ に対して、一様連続写像 $\overline{f}:\overline{X}\to N$ で f の拡張になっているものがただ一つ存在する.

定義 3.3. 素数 p に対し有理数体 $\mathbb{Q}$ の p **進距離 (p-adic metric)**d_p を、$a,b\in\mathbb{Q}$ に対し

$$d_p(a,b) = \begin{cases} p^{-\operatorname{ord}_p(a-b)} & a\neq b \text{ の時,} \\ 0 & a=b \text{ の時} \end{cases}$$

で定義する．ただし $\operatorname{ord}_p(a-b)$ は、$a-b$ を割り切る p 冪の中で最大となるような冪指数を指す．つまり、整数 k と p で割り切れない整数 m, n によって

$$a-b = p^k\frac{n}{m}$$

と表されるとき、$\operatorname{ord}_p(a-b)=k$ と定める.

問題 3.4. 任意の有理数 a に対し、

$$|a|\cdot\prod_{p:\text{素数}} d_p(a,0) = 1$$

が成り立つことを示せ.

問題 3.5. 素数 p と p 進距離 d_p に対し、$(\mathbb{Q},d_p)$ は距離空間であることを示せ.

問題 3.6. 素数 p と任意の有理数 a,b,c に対し、p 進距離 d_p は三角不等式よりも強い次の不等式を満たすことを示せ:

$$d_p(a,c)\leq \max\{d_p(a,b),d_p(b,c)\}.$$

この不等式を満たす距離を**非 Archimedes 的距離**と呼ぶ.

問題 3.7. 素数 p と p 進距離 d_p に対し、距離空間 $(\mathbb{Q}, d_p)$ は完備ではないことを示せ.

定義 3.4. 素数 p と p 進距離 d_p に対し、距離空間 $(\mathbb{Q}, d_p)$ の完備化を **p 進有理数体 (the field of p-adic rational numbers)** と呼び、$\mathbb{Q}_p$ で表わす．また、$(\mathbb{Q}, d_p)$ の部分距離空間 $(\mathbb{Z}, d_p)$ の完備化は $\mathbb{Q}_p$ の部分距離空間であるが、これを $\mathbb{Z}_p$ で表わす.

問題 3.8. $\mathbb{Q}$ の加法と乗法は、$\mathbb{Q}_p$ の加法と乗法に連続に拡張されることを示せ.

問題 3.9. 整数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p 進距離に関して Cauchy 列であることの必要十分条件は、

- 任意の自然数 M に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 m と n に対して $a_m - a_n$ が p^M で割り切れる

であることを示せ.

問題 3.10. 任意の素数 p に対し、整数の列 $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ は p 進距離に関して Cauchy 列であることを示し、その $\mathbb{Z}_p$ における極限を求めよ.

問題 3.11. 有理数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

で新しい数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定義する．この時、$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{Q}_p$ において収束するための必要十分条件は、実数の列 $\{d_p(a_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することであることを示せ.

問題 3.12. $\mathbb{Z}_p$ の任意の元は 0 以上 p 未満の整数の列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を用いて

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$$

と一意的に表されることを示せ.

問題 3.13. a を p と互いに素な整数とする．この時、次を示せ：

1. ある整数 b と c が存在して、$ab + pc = 1$ が成立する.
2. 整数の列 $\{b_n\}$ で、実数の列 $\{d_p(a^{-1}, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものが存在する.
3. $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$.

問題 3.14. 素数 p と整数 a に対し、$a^p - a$ は p で割り切れることを示せ.

問題 3.15. 素数 p と整数 a に対し、数列 $\{a^{p^n}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{Z}_p$ で収束することを示せ.

問題 3.16. 素数 p に対し、整数 a と b が

$$d_p(a, b) < 1$$

を満たせば、数列 $\{a^{p^n}\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b^{p^n}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{Z}_p$ の同じ元に収束することを示せ.

注意 3.5. 奇素数 p と整数 a に対し

$$\mathrm{Teich}(a) = \lim_{n \to \infty} a^{p^n} \in \mathbb{Z}_p$$

とおくと、これは群の準同型

$$\mathrm{Teich} : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} \to (\mathbb{Z}_p)^{\times}$$

を誘導する．これを **Teichmüller 指標**と呼ぶ.

幾何学基礎 2 演義

問題 4.1. 実数の集合 $\mathbb{R}$ の次のような部分集合に、実数の通常の大小関係 $\geq$ から定まる順序を入れて得られる順序集合は、整列集合かどうかを答えよ：

1. $P = \{p \in \mathbb{R} \mid p$ は素数$\}$.
2. $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
3. $X = \{m + n\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $Y = \{m + n\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

問題 4.2. 日本に住民票を持つ人間の集合を X とおくとき、次の問いに答えよ：

1. X に、x が y の子孫であるか $x = y$ のときに $x \succeq_1 y$ として 2 項関係を定義する．この時、$(X, \succ_1)$ は順序集合になるか．また、もし順序集合になるとすると、これは全順序集合、あるいは整列集合か.
2. X に、x の生年月日が y の生年月日よりも後であるか $x = y$ の時に $x \succeq_2 y$ として 2 項関係を定義する．この時、$(X, \succ_2)$ は順序集合になるか．また、もし順序集合になるとすると、これは全順序集合、あるいは整列集合か.
3. $(X, \succeq_1)$ および $(X, \succeq_2)$ の極大元、極小元はどのような元か.
4. 写像 $f_{21} : (X, \succeq_1) \to (X, \succeq_2)$ を X の恒等写像が引き起こす写像とするとき、f_{21} は順序を保つか.
5. 写像 $f_{12} : (X, \succeq_2) \to (X, \succeq_1)$ を X の恒等写像が引き起こす写像とするとき、f_{12} は順序を保つか.

問題 4.3 (Bolzano-Weierstrass の定理)**.** 閉区間 $[0, 1]$ 上の任意の点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する部分列を持つことを示せ.

問題 4.4. 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は一様連続であることを示せ.

問題 4.5 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が $f(0) < 0$ かつ $f(1) > 1$ を満たすとき、$f(x) = 0$ となるような $x \in (0, 1)$ が存在することを示せ.

問題 4.6 (最大値の定理)**.** 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は最大値を持つことを示せ.

問題 4.7 (Arzelà-Ascoli の定理)**.** 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数の族 $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ が一様有界かつ同程度連続ならば、一様収束する部分列を持つことを示せ.

問題 4.8. 正の自然数の集合 $\mathbb{N}^+$ に対し、関数 $d_1, d_2, d_3 : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ を

$$
\begin{aligned}
d_1(x,y) &= |x-y|, \\
d_2(x,y) &= \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & \text{otherwise}, \end{cases} \\
d_3(x,y) &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|,
\end{aligned}
$$

で定義する

1. 組 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ は距離空間であることを示せ.
2. 組 $(\mathbb{N}^+, d_2)$ は距離空間であることを示せ.
3. 組 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ は距離空間であることを示せ.
4. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ から距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_2)$ への全単射連続写像で、逆写像も連続になるようなものの例を与えよ.
5. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ から距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ への全単射連続写像の例を与えよ.
6. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ から距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ への全単射連続写像で、逆写像が一様連続になるようなものは存在しないことを示せ.
7. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ は有界ではないことを示せ.
8. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_2)$ は有界であることを示せ.
9. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ は有界であることを示せ.
10. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ は完備であることを示せ.
11. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_2)$ は完備であることを示せ.
12. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ の完備化を求めよ.
13. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ は全有界ではないことを示せ.
14. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_2)$ は全有界ではないことを示せ.
15. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ は全有界であることを示せ.
16. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ は可分であることを示せ.
17. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_2)$ は可分であることを示せ.
18. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ は可分であることを示せ.
19. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_1)$ 上の連続関数で、最大値を持たないものの例を与えよ.
20. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_2)$ 上の連続関数で、最大値を持たないものの例を与えよ.
21. 距離空間 $(\mathbb{N}^+, d_3)$ 上の連続関数で、最大値を持たないものの例を与えよ.

幾何学基礎 2 演義 (中間試験)

問題 5.1. X を集合、2^X を X の冪集合とする時、X の濃度と 2^X の濃度は等しくないことを示せ.

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　名前

問題 5.2. $f : V \to U$ を体 k 上のベクトル空間の間の線形写像とし、$W \subset V$ を V の部分ベクトル空間とする．この時、以下の問いに与えられたキーワードを用いて答えよ：

1. V の W による商空間 V/W を (集合として) 定義せよ（キーワード：同値関係）.
2. 商空間 V/W には自然に k 上のベクトル空間の構造が入り、自然な射影 $\pi : V \to V/W$ は線形写像になることを示せ（キーワード：well-defined）.
3. 線形写像 $\overline{f} : V/W \to U$ が存在して $f = \overline{f} \circ \pi$ となるための必要十分条件を与えよ（キーワード：核）.

幾何学基礎 2 演義 (中間試験・解答例)

問題 5.1. X を集合、2^X を X の冪集合とする時、X の濃度と 2^X の濃度は等しくないことを示せ.

解答例

集合 X からその冪集合 2^X への全射は存在しないことを背理法で示す．全射 $f : X \to 2^X$ が存在すると仮定し、

$$T = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

とおく．写像 $f : X \to 2^X$ が全射であり、$T \in 2^X$ なので、ある $y \in X$ が存在して

$$T = f(y)$$

となる．この時 $y \in T$ か $y \notin T$ のどちらかが成り立つ．仮に $y \in T$ とすると、$y \in T = f(y)$ となり、T の定義に反する．また、仮に $y \notin T$ とすると、$y \notin T = f(y)$ となり、再び T の定義に反する．従って、このような写像 f は存在しない.

問題 5.2. $f: V \to U$ を体 k 上のベクトル空間の間の線形写像とし、$W \subset V$ を V の部分ベクトル空間とする．この時、以下の問いに与えられたキーワードを用いて答えよ：

1. V の W による商空間 V/W を (集合として) 定義せよ（キーワード：同値関係）.
2. 商空間 V/W には自然に k 上のベクトル空間の構造が入り、自然な射影 $\pi: V \to V/W$ は線形写像になることを示せ（キーワード：well-defined）.
3. 線形写像 $\overline{f}: V/W \to U$ が存在して $f = \overline{f} \circ \pi$ となるための必要十分条件を与えよ（キーワード：核）.

解答例

1. 集合 V 上の 2 項関係 $\sim$ を、2 つの元 $v, v' \in V$ に対し $v - v' \in W$ の時 $v \sim v'$ として定めると、次が成立する：

対称律： V の 2 つの元 v と v' が $v \sim v'$ を満たすならば、ある $w \in W$ が存在して $v - v' = w$ となる．W は部分ベクトル空間なので、$w \in W$ ならば $-w \in W$ である．従って $v' - v = -w \in W$ であり、$v' \sim v$ が成立する.

反射律： W は部分ベクトル空間なので、$0 \in W$ である．従って任意の $v \in V$ に対し $v - v = 0 \in W$ となり、$v \sim v$ が成立する.

推移律： $v \sim v'$, $v' \sim v''$ ならば、$v - v' = w$, $v' - v'' = w'$ となる $w, w' \in W$ が存在する．この時 $v - v'' = w + w' \in W$ となるので、$v \sim v''$ となる.

従って $\sim$ は同値関係であり、商空間 V/W は集合 V をこの同値関係 $\sim$ で割って得られる商集合として定義される.

2. 上で得られた商集合 V/W に次のようにしてベクトル空間の構造を入れる：

- V の元 v_1 と v_2 を代表元に持つ V/W の 2 つの元 $[v_1], [v_2]$ と、基礎体 k の 2 つの元 α, β に対し、$\alpha[v_1] + \beta[v_2] = [\alpha v_1 + \beta v_2]$.

これが well-defined であることを示すために別の代表元 $v_1' = v_1 + w_1$ と $v_2' = v_2 + w_2$ を取ると、

$$\alpha v_1' + \beta v_2' = (\alpha v_1 + \beta v_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2)$$

となる．W が V の部分ベクトル空間なので $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$ であり、$\alpha[v_1] + \beta[v_2]$ が代表元の取り方によらずに定まることが分かる．こうして定義した V/W の和とスカラー倍がベクトル空間の公理を満たすことは V がベクトル空間であることから容易に従い、自然な射影 $\pi: V \to V/W$ は線形写像になる.

3. 上のような線形写像 $\overline{f}$ が存在するための必要十分条件は、$v \in V$ に対して $\overline{f}([v]) = f(v)$ と定義した時、これが well-defined になることである．二つの元 $v, v' \in V$ が同値であるための必要十分条件は $v - v' = w \in W$ となることであり、この時 $f(v) - f(v') = f(w)$ となる．従って、$\overline{f}$ が well-defined になるための必要十分条件は、任意の $w \in W$ に対して $f(w) = 0$ となることである．一方、f の核は

$$\mathrm{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

で定義されるので、この条件は $W \subset \mathrm{Ker} f$ と言い換えることが出来る.

幾何学基礎 2 演義

問題 6.1. (X, d_X) を距離空間、$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を X の点列、x_∞ を X の点とするとき、次の 2 つの条件は同値であることを示せ：

1. 点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は点 $x_\infty \in X$ に収束する.
2. 点 x_0 を含む X の任意の開集合 U に対し、ある自然数 N が存在して、N より大きな任意の自然数 n に対して $x_n \in U$ となる.

問題 6.2. (X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間、$f : X \to Y$ を X から Y への写像、x_∞ を X の 1 点とするとき、次の 2 つの条件は同値であることを示せ：

1. 任意の正数 ϵ に対してある正数 δ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $d_X(x, x_\infty) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x_\infty)) < \epsilon$.
2. X の任意の点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ で x_∞ に収束するものに対し、Y の点列 $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ は $f(x_\infty)$ に収束する.

問題 6.3. (X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間、$f : X \to Y$ を X から Y への写像、x_0 を X の 1 点とするとき、次の 2 つの条件は同値であることを示せ：

1. 任意の正数 ϵ に対してある正数 δ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $d_X(x, x_0) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
2. $f(x_0)$ を含む任意の Y の開集合 U に対してある X の開集合 V が存在して、V に含まれる任意の X の開集合 W に対して $f(W) \subset U$ となる.

問題 6.4. (X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間、$f : X \to Y$ を X から Y への写像とするとき、次の 4 つの条件は同値であることを示せ：

1. 任意の点 $x_0 \in X$ と任意の正数 ϵ に対して、ある正数 δ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $d_X(x, x_0) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
2. X の任意の収束する点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$$
が成り立つ.
3. 任意の点 $x_0 \in X$ と $f(x_0)$ を含む任意の Y の開集合 U に対して、ある X の開集合 V が存在して、V に含まれる任意の X の開集合 W に対して $f(W) \subset U$ となる.
4. Y の任意の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ は X の開集合になる.

問題 6.5. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
で定めるとき、これが連続にならないことを問題 6.4 の同値な 4 つの条件のそれぞれを用いて確かめよ.

問題 6.6. $f : X \to Y$ を集合 X から集合 Y への写像とし、$(V_\xi)_{\xi\in\Xi}$ を添字集合 Ξ を持つような X の部分集合の族、$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を添字集合 Λ を持つような Y の部分集合の族とする．この時、次のそれぞれの主張に対し、正しければ証明を、正しくなければ反例を与えよ．ただし、集合 A に対し A^c で A の補集合を表す.

1. $f\left(\bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi\right) = \bigcap_{\xi\in\Xi} f(V_\xi)$.
2. $f\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} V_\xi\right) = \bigcup_{\xi\in\Xi} f(V_\xi)$.
3. $\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} V_\xi\right)^c = \bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi^c$.
4. $\left(\bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi\right)^c = \bigcup_{\xi\in\Xi} V_\xi^c$.
5. $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$.
6. $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$.
7. $f(V_\xi^c) = f(V_\xi)^c$.
8. $f^{-1}(U_\lambda^c) = f^{-1}(U_\lambda)^c$.

問題 6.7. (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) を距離空間、$f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ を連続写像とする．この時、合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続になることを ϵ-δ 論法を用いて示せ.

問題 6.8. $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$, $(Z, \mathscr{O}_Z)$ を位相空間、$f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ を連続写像とする．この時、合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続になることを示せ.

問題 6.9. $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して、開集合の族 $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ で共通部分 $\cap_{n=1}^\infty U_n$ が開集合ではない例を与えよ.

問題 6.10. $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して、閉集合の族 $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ で、和集合 $\cup_{n=1}^\infty U_n$ が閉集合ではない例を与えよ.

問題 6.11. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分集合 S に対し、S を含む X の最小の閉集合を S の**閉包 (closure)** と呼ぶ．$\mathbb{R}$ の通常の位相に関して、次の部分集合の閉包を求めよ：

1. 開区間 $(0, 1)$.
2. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

幾何学基礎 2 演義

問題 7.1. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間、$\iota : Y \to X$ を単射とするとき、ここから定まる Y の相対位相は ι を連続にするような Y の位相のうちで最弱であることを示せ.

問題 7.2. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間、$\iota : Y \to X$ を単射とするとき、ここから定まる Y の相対位相 $\mathscr{O}_Y$ は次の性質で特徴付けられることを示せ.

- 任意の位相空間 $(Z, \mathscr{O}_Z)$ と任意の連続写像 $f : (Z, \mathscr{O}_Z) \to (X, \mathscr{O}_X)$ で $f(Z) \subset \iota(Y)$ を満たすようなものに対し、連続写像 $g : (Z, \mathscr{O}_Z) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ で $f = \iota \circ g$ を満たすものが唯一つ存在する.

問題 7.3. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間、$p : X \to Y$ を全射とするとき、ここから定まる Y の商位相は p を連続にするような位相のうちで最強であることを示せ.

問題 7.4. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間、$p : X \to Y$ を全射とするとき、ここから定まる Y の商位相 $\mathscr{O}_Y$ は次の性質で特徴付けられることを示せ.

- 任意の位相空間 $(Z, \mathscr{O}_Z)$ と任意の連続写像 $f : (X, \mathscr{O}_X) \to (Z, \mathscr{O}_Z)$ で、任意の $x, x' \in X$ に対し $p(x) = p(x')$ ならば $f(x) = f(x')$ を満たすようなものに対し、連続写像 $g : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (Z, \mathscr{O}_Z)$ で $f = g \circ p$ を満たすものが唯一つ存在する.

問題 7.5. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分集合 C が閉であることと、C の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X の点 p に収束するならば $p \in C$ となることが同値であることを示せ.

問題 7.6. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ が Hausdorff 空間であれば、X の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束先は高々1 つであることを示せ.

問題 7.7. (X, d) を距離空間とするとき、距離から定まる位相に関して X がコンパクトであることと、X の任意の点列が収束する部分列を持つことが同値であることを示せ.

問題 7.8. 有限集合を Hausdorff 空間にするような位相は離散位相に限ることを示せ.

問題 7.9. 離散なコンパクト集合は有限集合であることを示せ.

問題 7.10. 自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ の中で有限個の多項式の共通零点として定義される部分集合を閉集合として定義すると、これは $\mathbb{R}^n$ の位相を与える（すなわち、その補集合を開集合と定義すると、これは位相の公理を満たす）ことを示せ. これを $\mathbb{R}^n$ の **Zariski 位相**と呼ぶ.

問題 7.11. 正の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ は Zariski 位相に関して Hausdorff ではない事を示せ.

問題 7.12. 正の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ は通常の位相ではコンパクトではないことを示せ.

問題 7.13. 任意の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ は Zariski 位相に関して Hausdorff ではないコンパクト空間であることを示せ.

注意 7.1. コンパクト空間の定義に Hausdorff 性を含めることも多い. この場合、Hausdorff 性を仮定しないコンパクト空間を**準コンパクト (quasi-compact)** 空間と呼ぶ.

問題 7.14. 位相空間のコンパクトな部分集合で、閉部分集合ではないものを与えよ.

問題 7.15. $\mathbb{R}$ の部分集合が Zariski 位相に関して開集合であることと、その補集合が有限集合であることは同値であることを示せ.

問題 7.16. $\mathbb{R}$ の Zariski 位相に関する任意の開集合は Hausdorff ではないコンパクト空間であることを示せ.

問題 7.17. $\mathbb{R}$ の Zariski 位相に関する任意の開集合の閉包は $\mathbb{R}$ 全体になることを示せ.

問題 7.18. 有限とは限らない集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとし、Λ の任意の有限部分集合 I と、各 $\lambda \in I$ に対して X_λ の開集合 $U_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ を選んだとき、これに対して直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の部分集合 $U(I; \{U_\lambda\}_{\lambda\in I})$ を

$$U(I; \{U_\lambda\}_{\lambda\in I}) = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid x_\lambda \in U_\lambda \text{ if } \lambda \in I\}$$

で定義する．この時、

$$\mathscr{O} = \{U(I; \{U_\lambda\}_{\lambda\in I}) \mid I \subset \Lambda \text{ is finite and } U_\lambda \subset X_\lambda \text{ is open for any } \lambda \in I\}$$

の元を開集合と定義することで、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に位相を入れることができることを示せ．これを $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の**直積位相 (product topology)** と呼ぶ.

問題 7.19. 無限集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ と、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して X_λ の空でも全体でもない開集合 $U_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ が与えられたとき、直積集合

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

は $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の直積位相に関する開集合ではないことを示せ.

問題 7.20. 集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の直積位相は任意の $\mu \in \Lambda$ に対して μ 成分への射影

$$\pi_\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\mu$$

を連続にするような最弱の位相であることを示せ.

問題 7.21. 集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の直積位相は次の性質で特徴づけられることを示せ：任意の位相空間 $(Y, \mathscr{Q})$ と連続写像の族 $\{f_\lambda : Y \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、連続写像 $f : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で任意の $\mu \in \Lambda$ に対して $f_\mu = \pi_\mu \circ f$ を満たすものがただ一つ存在する.

問題 7.22. 離散位相空間の無限直積は離散位相空間ではないことを示せ.

問題 7.23. 離散有限集合の直積はコンパクトであることを示せ.

問題 7.24. 素数 p に対し、p 個の元からなる集合 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ に離散位相を入れたものの可算無限直積空間

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \ldots$$

は p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ と同相であることを示せ.

幾何学基礎 2 演義 (中間試験 (その 2))

問題 8.1. 集合 X と、X の冪集合 2^X の部分集合 $\mathscr{O} \subset 2^X$ の組 $(X, \mathscr{O})$ が位相空間であることの定義を述べよ.

問題 8.2. 位相空間の間の写像 $f : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ が与えられているとする.

1. f が連続であることの定義を述べよ.

2. f が同相写像であることの定義を述べよ.

問題 8.3. X を集合とし、$\mathscr{O}_1$ と $\mathscr{O}_2$ を X に入る 2 通りの位相とする. この時、$\mathscr{O}_1$ が $\mathscr{O}_2$ よりも強い位相であることの定義を述べよ.

問題 8.4. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ が Hausdorff であることの定義を述べよ.

学籍番号　　　　　　　　　　　　　名前

問題 8.5. 以下の問いに答えよ：

1. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とするとき、X の部分集合 Y に入る相対位相 $\mathscr{O}_Y$ の定義を述べよ.

2. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間、$\sim$ を X 上の同値関係とする時、商集合 $Y = X/_\sim$ に入る商位相 $\mathscr{O}_Y$ の定義を述べよ.

3. $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とするとき、直積集合 $X \times Y$ に入る直積位相 $\mathscr{O}_{X\times Y}$ の定義を述べよ.

問題 8.6. 次の空欄に「最強」または「最弱」のどちらかの言葉を入れて文章を完成させよ：

1. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間、$\iota : Y \hookrightarrow X$ を単射とする時、ι の定める Y の相対位相は ι を連続にするような位相の中で（　　　　）のものである.

2. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間、$\sim$ を X 上の同値関係、$Y = X/_\sim$ を商集合、$\pi : X \to Y$ を自然な射影とする時、π の定める Y の商位相は π を連続にするような位相の中で（　　　　）のものである.

3. $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間、$X \times Y$ を直積集合、$\pi_X : X \times Y \to X$ および $\pi_Y : X \times Y \to Y$ を自然な射影とする時、$X \times Y$ の直積位相は π_X および π_Y を連続にするような位相の中で（　　　　）のものである.

問題 8.7. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ がコンパクトであることの定義を述べよ.

幾何学基礎 2 演義 (中間試験 (その 2)・解答例)

問題 8.1. 集合 X と、X の冪集合 2^X の部分集合 $\mathscr{O} \subset 2^X$ の組 $(X, \mathscr{O})$ が位相空間であることの定義を述べよ.

(i) 全体集合及び空集合が $\mathscr{O}$ の元であること：$X \in \mathscr{O}$ かつ $\emptyset \in \mathscr{O}$.

(ii) $\mathscr{O}$ が任意の和集合について閉じていること：$\forall \lambda \in \Lambda,\ U_\lambda \in \mathscr{O} \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}$.

(ii) $\mathscr{O}$ が有限個の共通部分について閉じていること：$U_1, \ldots, U_k \in \mathscr{O} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{k} U_k \in \mathscr{O}$.

問題 8.2. 位相空間の間の写像 $f : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ が与えられているとする.

1. f が連続であることの定義を述べよ.

   Y の任意の開集合に対し、その f による逆像が X の開集合になること：

$$\forall U \in \mathscr{O}_Y,\ f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X.$$

2. f が同相写像であることの定義を述べよ.

   f が連続な全単射であり、その逆写像も連続になること.

問題 8.3. X を集合とし、$\mathscr{O}_1$ と $\mathscr{O}_2$ を X に入る 2 通りの位相とする. この時、$\mathscr{O}_1$ が $\mathscr{O}_2$ よりも強い位相であることの定義を述べよ.

$(X, \mathscr{O}_2)$ の開集合が必ず $(X, \mathscr{O}_1)$ の開集合でもあること：$\mathscr{O}_2 \subset \mathscr{O}_1$.

問題 8.4. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ が Hausdorff であることの定義を述べよ.

X の任意の相異なる 2 点が開集合で分離できること. すなわち、任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し、ある $U, V \in \mathscr{O}$ が存在して、$x \in U,\ y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となること.

問題 8.5. 以下の問いに答えよ：

1. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とするとき、X の部分集合 Y に入る相対位相 $\mathscr{O}_Y$ の定義を述べよ.

$$\mathscr{O}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathscr{O}_X\}.$$

2. $(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間、$\sim$ を X 上の同値関係とする時、商集合 $Y = X/_\sim$ に入る商位相 $\mathscr{O}_Y$ の定義を述べよ.

   自然な射影を $\pi : X \to Y$ と置くと、

$$\mathscr{O}_Y = \{U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X\}.$$

3. $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とするとき、直積集合 $X \times Y$ に入る直積位相 $\mathscr{O}_{X\times Y}$ の定義を述べよ.

$$\mathscr{O}_{X\times Y} = \left\{ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times V_\lambda \,\middle|\, \forall\lambda \in \Lambda,\ U_\lambda \in \mathscr{O}_X,\ V_\lambda \in \mathscr{O}_Y \right\}.$$

問題 8.6. 次の括弧の中に「最強」または「最弱」のどちらかの言葉を入れて文章を完成させよ：

1. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間、$\iota : Y \hookrightarrow X$ を単射とする時、ι の定める Y の相対位相は ι を連続にするような位相の中で（最弱）のものである.

2. $(X, \mathscr{O})$ を位相空間、$\sim$ を X 上の同値関係、$Y = X/_\sim$ を商集合、$\pi : X \to Y$ を自然な射影とする時、π の定める Y の商位相は π を連続にするような位相の中で（最強）のものである.

3. $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間、$X \times Y$ を直積集合、$\pi_X : X \times Y \to X$ および $\pi_Y : X \times Y \to Y$ を自然な射影とする時、$X \times Y$ の直積位相は π_X および π_Y を連続にするような位相の中で（最弱）のものである.

問題 8.7. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ がコンパクトであることの定義を述べよ.

X の任意の開被覆に対し、有限の部分被覆が存在すること．すなわち、X の部分集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が

- $\forall\lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathscr{O}$
- $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$

の 2 つの条件を満たすならば、ある有限個の元 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$X = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$$

となること.

幾何学基礎 2 演義

問題 9.1. 位相空間 X から位相空間 Y への写像が**開写像 (open map)** であるとは、X の任意の開集合の像が Y の開集合になることを指す. 同様に、X から Y への写像が**閉写像 (closed map)** であるとは、X の任意の閉集合の像が Y の閉集合になることを指す.

問題 9.2. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像で、次のような性質を満たすものを与えよ：

1. 開かつ閉の写像.
2. 開だが閉ではない写像.
3. 閉だが開ではない写像.
4. 連続な開写像
5. 連続でない開写像
6. 開でない連続写像
7. 連続でない閉写像
8. 閉でない連続写像

問題 9.3. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像であることを示せ.

問題 9.4. 全単射な連続写像は必ずしも同相写像とは限らないことを示せ.

問題 9.5. 任意の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ の部分集合が有界であることと全有界であることは同値であることを示せ.

問題 9.6. 有界だが全有界ではない距離空間を与えよ.

定義 9.1. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分集合 Y の点 $p \in Y$ が Y の**内点 (interior point)** であるとは、p を含むような X の開集合 $U \in \mathscr{O}$ で、Y に含まれるようなものが存在することを指す. Y が内点を持たない時、Y は**粗 (nowhere dense)** であると言う.

定義 9.2. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分集合 Y の点 $p \in Y$ が Y の**孤立点 (isolated point)** であるとは、X の開集合 $U \in \mathscr{O}$ で、$U \cap Y = \{p\}$ となるものが存在することを指す.

定義 9.3. 0 と 2 のみからなる 3 進小数展開を持つような 0 以上 1 以下の実数のなす集合を **Cantor 集合**と呼ぶ.

問題 9.7. Cantor 集合について、次の性質を示せ：

1. 閉集合である.
2. 粗である.
3. 孤立点を持たない.
4. 非可算である.

5. 離散位相空間 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の可算無限直積空間 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \cdots$ と同相である.

定義 9.4. 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ が**完全不連結 (totally disconnected)** とは、空集合と一点集合以外の任意の部分集合が連結ではないことを指す.

問題 9.8. 任意の素数 p に対し、p 進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ は完全不連結であることを示せ.

問題 9.9. Cantor 集合は完全不連結であることを示せ.

定義 9.5. X, Y を位相空間、$\mathrm{Map}(X, Y)$ を X から Y への連続写像の集合とする. X のコンパクト集合 C と Y の開集合 U に対し

$$\mathscr{O}(C, U) = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f(C) \subset U\}$$

とおくとき、

$$\{\mathscr{O}(C, U) \mid C \subset X \text{ is compact and } \ U \subset Y \text{ is open}\}$$

で生成される位相を $\mathrm{Map}(X, Y)$ の**コンパクト開位相 (compact open topology)** と呼ぶ.

問題 9.10. 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコンパクト開位相に関して収束することと、一様収束することが同値であることを示せ.

定義 9.6. X を位相空間、Y を距離空間とするとき、$\mathrm{Map}(X, Y)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**広義一様収束する (converge compactly)** とは、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を K に制限したもの $\{f_n|_K\}_{n=1}^{\infty}$ が一様収束することを指す.

問題 9.11. X を位相空間、Y を距離空間とすると、$\mathrm{Map}(X, Y)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコンパクト開位相に関して収束することと、X 上で広義一様収束することが同値であることを示せ.

定義 9.7. Hausdorff 空間 $(G, \mathscr{O})$ が群の構造を持ち、積を与える写像 $G \times G \to G$ と逆元を与える写像 $G \to G$ が連続写像であるとき、$(G, \mathscr{O})$ を**位相群 (topological group)** と呼ぶ.

問題 9.12. $\mathbb{R}$ は加法と通常の位相に関して位相群であることを示せ.

問題 9.13. p 進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ の可逆元全体の集合 $(\mathbb{Q}_p)^{\times}$ は乗法と p 進位相に関して位相群であることを示せ.

問題 9.14. p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の可逆元全体の集合 $(\mathbb{Z}_p)^{\times}$ は乗法と p 進位相に関して $(\mathbb{Q}_p)^{\times}$ のコンパクトな正規位相部分群であることを示せ.

問題 9.15. 加法群 $\mathbb{Z}$ は位相群 $\mathbb{R}$ の離散正規部分群であり、商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ に通常の位相と乗法で位相群の構造を入れたものと位相群として同型であることを示せ.

問題 9.16. 商群 $(\mathbb{Q}_p)^{\times}/(\mathbb{Z}_p)^{\times}$ は離散群 $\mathbb{Z}$ と位相群として同型であることを示せ.

問題 9.17. 加法群 $\mathbb{Q}$ は位相群 $\mathbb{R}$ の正規部分群であるが、商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は位相群ではない事を示せ.

問題 9.18. 位相群を離散部分群で割った商空間は Hausdorff 空間であることを示せ.

問題 9.19. 位相群をコンパクトな部分群で割った商空間は Hausdorff 空間であることを示せ.

注意 9.8. 実は、位相群を閉部分群で割った商空間は Hausdorff 空間である事が知られている.

問題 9.20. 位相群の準同型 $f : G \to H$ に対し、$\mathrm{Ker} f$ が G の閉正規部分群で、商群 $G/\mathrm{Ker} f$ は $\mathrm{Im} f$ と位相群として同型になることを示せ.