2007 年 10 月 2 日

幾何学基礎 2 演義

定義 1.1. 集合 X とその部分集合 Y に対し $X \setminus Y$ で差集合 $\{x \in X \mid x \notin Y\}$ を表す.

定義 1.2. X と Y を集合、$f : X \to Y$ を写像とする. 任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ となるとき f を**全射 (surjection)**、任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $f(x_1) = f(x_2) \in Y$ なら $x_1 = x_2$ となるとき f を**単射 (injection)** という. 全射かつ単射な写像のことを**全単射 (bijection)** と呼ぶ.

定義 1.3. X と Y を集合、$f : X \to Y$ を写像とする. X の部分集合 S と Y の部分集合 U に対し、S の f による**像 (image)** は $f(S) = \{f(x) \in Y \mid x \in S\} \subset Y$、$U$ の f による**逆像 (inverse image)** は $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\} \subset X$ で定義される.

問題 1.1. f を集合 X から集合 Y への写像、g を集合 Y から集合 Z への写像とする. この時、次のそれぞれの主張に対し、正しければ証明を、正しくなければ反例を与えよ：

1. f が全射なら $g \circ f$ は全射.
2. f が単射なら $g \circ f$ は単射.
3. g が全射なら $g \circ f$ は全射.
4. g が単射なら $g \circ f$ は単射.
5. $g \circ f$ が全射なら f は全射.
6. $g \circ f$ が単射なら f は単射.
7. $g \circ f$ が全射なら g は全射.
8. $g \circ f$ が単射なら g は単射.

問題 1.2. f が集合 X から集合 Y への写像で、S と T が X の部分集合、U と V が Y の部分集合であるとする. この時、次のそれぞれの主張に対し、正しければ証明を、正しくなければ反例を与えよ：

1. $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$,
2. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$,
3. $f(X \setminus S) = Y \setminus f(S)$,
4. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V)$,
5. $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V)$,
6. $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$.

定義 1.4. X を集合、$\sim$ を X の二項関係、x, y, z を X の任意の元とする.

1. $x \sim x$ となるとき、$\sim$ は**反射的 (reflexive)** であるという.
2. $x \sim y$ なら $y \sim x$ となるとき、$\sim$ は**対称 (symmetric)** であるという.
3. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ なら $x \sim z$ となるとき、$\sim$ は**推移的 (transitive)** であるという.

反射的かつ対称で、しかも推移的な二項関係のことを**同値関係**と呼ぶ.

問題 1.3. 適当な集合 X とその上の二項関係 $\sim$ で、次のようなものの例を与えよ：

1. 反射的だが、対称でも推移的でもないもの.
2. 対称だが、反射的でも推移的でもないもの.
3. 推移的だが、反射的でも対称でもないもの.

定義 1.5. X を集合、$\sim$ を X の上の同値関係とする．この時、$x \sim y$ となるような x と y を同一視して得られる集合を **X の $\sim$ による商集合**とよび、$X/_\sim$ で表わす.

問題 1.4. X を集合、$\sim$ を X の上の同値関係とする.

1. X から商集合 $X/_\sim$ への自然な全射

$$p : X \to X/_\sim$$

   で、X の元 x を x の属する同値類に送るものが存在することを示せ.

2. Y を集合とし、X から Y への写像 $f : X \to Y$ で、$x \sim y$ なら $f(x) = f(y)$ となるものが与えられたとする．この時、写像 $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ で $f = \overline{f} \circ p$ となるものがただ一つ存在することを示せ.

問題 1.5. X と Y を集合、$f : X \to Y$ をそれらの間の写像とする.

1. X 上の二項関係 $\sim$ を、$x, y \in X$ に対し $f(x) = f(y)$ なら $x \sim y$ として定義すると、これは同値関係になることを示せ.
2. 自然な写像 $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ は $X/_\sim$ と $f(X)$ の間の全単射を与える事を示せ.

問題 1.6. 集合 X と Y に対し、X から Y への全単射が存在するときに $X \sim Y$ と書く事にする．この時、$\sim$ は反射的、対称かつ推移的になることを示せ.

2007年10月9日

幾何学基礎2演義

定義 2.1. X を集合、$\leq$ を X の二項関係、x, y, z を X の任意の元とする.

1. $x \leq x$ となるとき、$\leq$ は**反射的 (reflexive)** であるという.
2. $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$ となるとき、$\leq$ は**反対称 (antisymmetric)** であるという.
3. $x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$ となるとき、$\leq$ は**推移的 (transitive)** であるという.

反射的かつ反対称で、しかも推移的な二項関係のことを**順序**と呼ぶ.

問題 2.1. 適当な集合 X とその上の二項関係 $\leq$ で、次のようなものの例を与えよ：

1. 反射的だが、反対称でも推移的でもないもの.
2. 反対称だが、反射的でも推移的でもないもの.
3. 推移的だが、反射的でも反対称でもないもの.

定義 2.2.

1. 集合 X とその上の順序 $\leq$ の組 $(X, \leq)$ を**半順序集合 (partially ordered set)** と呼ぶ. 単に順序集合と呼ぶこともある.
2. 半順序集合 $(X, \leq)$ の部分集合 A に対し、X の元 x が A の**上界**であるとは、任意の $a \in A$ に対して $a \leq x$ となることを指す. 同様に、x が A の**下界**であるとは、任意の $a \in A$ に対して $x \leq a$ となることを指す. さらに、上界 $x \in X$ が A の元であるとき、x は A の**最大 (maximum)** 元であるという. 同様に、下界 $x \in X$ が A の元であるとき、x は A の**最小 (minimum)** 元であるという.
3. 半順序集合 $(X, \leq)$ の元 a が X の**極大 (maximal)** 元であるとは、X の任意の元 x に対し、$a \leq x$ ならば $a = x$ となる事を指す. 同様に、a が X の**極小 (minimal)** 元であるとは、X の任意の元 x に対し、$x \leq a$ ならば $a = x$ となる事を指す.
4. 半順序集合 $(X, \leq)$ で、X の任意の元 x と y に対し $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つものを**全順序集合 (totally oredered set)** と呼ぶ. これを線形順序集合と呼ぶこともある.
5. 全順序集合 $(X, \leq)$ で、任意の空でない部分集合が最小元を持つものを**整列集合 (well-ordered set)** と呼ぶ.

問題 2.2. 次のようなものの例を与えよ：

1. 半順序集合だが、全順序集合でないもの.
2. 全順序集合だが、整列集合ではないもの.
3. 整列集合.

問題 2.3. 半順序集合が最小元を持てば、それが唯一の極小元になることを示せ.

問題 2.4. 半順序集合とその元で、極小ではあるが最小ではないものの例を与えよ.

問題 2.5. 整列集合の任意の部分集合には自然に整列集合の構造が入ることを示せ.

問題 2.6. 「任意の集合は、その上に適当に順序を定めることによって整列集合にできる」という命題を Zermelo の**整列定理 (well-ordering theorem)** と呼び、**選択公理**と同値であることが知られている．この整列定理を仮定して、選択公理と同値であることが知られている次の命題を示せ：

1. Λ を添字集合とする空ではない集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も空ではない.

2. 集合 X から集合 Y への全射 $f : X \to Y$ に対し、ある単射 $g : Y \to X$ が存在して $f \circ g$ が Y の恒等写像になる.

定義 2.3. 半順序集合 $(X, \leq)$ が**帰納的順序集合 (inductively ordered set)** であるとは、X の任意の全順序部分集合が上に有界であることを指す.

定義 2.4. k を体、V を k 上のベクトル空間とする．Λ を添字集合とする V の元の集合 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**線形独立**であるとは、有限個の λ を除いて 0 であるような k の元の列 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda a_\lambda = 0$$

となるのは全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して $\alpha_\lambda = 0$ となる場合に限ることを指す．V の元の集合 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**基底**であるとは、任意の $v \in V$ が有限個の λ を除いて 0 であるような k の元の列 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を用いて

$$v = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda a_\lambda$$

と一意的に表わされることを指す.

問題 2.7. 「帰納的順序集合は少なくとも 1 つの極大元を持つ」という主張を **Zorn の補題**と呼び、選択公理と同値であることが知られている．これを用いて、任意の体上の任意のベクトル空間が基底を持つことを示せ.
(ヒント：体を k、ベクトル空間を V とおき、V の空でない部分集合 A で、A の任意の有限部分集合が k 上線形独立であるようなものの全体を X とおく．X に包含関係で順序を入れると、これは帰納的順序集合になることを示せ．従って Zorn の補題から X には極大元が存在する．これが基底をなすことを証明せよ．)

2007 年 10 月 16 日

幾何学基礎 2 演義

定義 3.1. 集合 X と Y に対し、X から Y への全単射が存在するときに X と Y の**濃度 (cardinality)** が等しいと言う.

問題 3.1. 素数の集合と自然数の集合の濃度が等しいことを示せ.

問題 3.2. 自然数の集合と整数の集合の濃度が等しいことを示せ.

問題 3.3. 整数の集合と有理数の集合の濃度が等しいことを示せ.

定義 3.2. 整数係数の多項式の根として得られる複素数を**代数的数 (algebraic number)** と呼ぶ.

問題 3.4. 整数の集合と代数的数の集合の濃度が等しいことを示せ.

問題 3.5. 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ と $\mathbb{R}$ の濃度が等しいことを示せ.

問題 3.6. 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ と $\mathbb{R}$ の濃度が等しいことを示せ.

問題 3.7. 実数の集合 $\mathbb{R}$ と、その直積 $\mathbb{R}^2$ の濃度が等しいことを示せ.

定義 3.3. 集合 X に対し、X の部分集合全体からなる集合を X の**冪集合 (power set)** と呼ぶ.

定義 3.4. 集合 X と Y に対し、X から Y への写像全体の集合を Y^X で表わす.

問題 3.8. 有限集合 X と Y に対し

$$|X^Y| = |X|^{|Y|}$$

となることを示せ. 但し、有限集合 X に対し $|X|$ で X の元の個数を表わす.

問題 3.9. 集合 X に対し、X から 2 つの元からなる集合への写像全体の集合を 2^X で表わすと、2^X は X の部分集合全体の集合と 1 対 1 に対応することを示せ.

問題 3.10. 有理数の集合の冪集合と実数の集合の濃度が等しいことを示せ.

問題 3.11. 任意の集合に対し、その冪集合ともとの集合の濃度は等しくないことを示せ.

問題 3.12. 集合が無限集合であることと、その真部分集合との間に全単射が存在することが同値であることを示せ. ただし、整列定理は仮定して良い.

問題 3.13. $\widetilde{\mathbb{K}}$ を実数冪の形式的な無限級数の集合

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \{\sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha \mid A \subset \mathbb{R} \text{ は } \mathbb{R} \text{ の任意の部分集合で、} a_\alpha \in \mathbb{C}\}$$

とする. この時 $\widetilde{\mathbb{K}}$ に自然に積を入れようとしても、一般には無限和が現れてうまく行かないことを示せ.

問題 3.14. $\mathbb{K}$ を実数冪の形式的な無限級数の集合

$$\mathbb{K} = \{\sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha \mid A \subset \mathbb{R} \text{ は } \mathbb{R} \text{ の通常の順序に関する整列集合で、} a_\alpha \in \mathbb{C}\}$$

とする. この時 $\mathbb{K}$ に自然な積構造が入り、それに関して $\mathbb{K}$ が体になることを示せ.

問題 3.15. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への全単射は存在するが、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な全単射で、逆も連続になるようなものは存在しない．このことを次のようにして示せ：

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を連続な全単射とすると、f を $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に制限したもの $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ も像への連続な全単射になる．

2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の任意の 2 点 p と q に対し、連続写像 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で $c(0) = p$ かつ $c(1) = q$ となるものが存在する．

3. ところが、$\mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$ の 2 点 r と s で、どのような連続写像 $d : [0,1] \to \mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$ を持ってきても $d(0) = r$ かつ $d(1) = s$ とはできないものが存在する．

4. 一方、$f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ が連続なので、任意の $r, s \in \mathbb{R}$ に対して $f(p) = r$, $f(q) = s$ となる $p, q \in \mathbb{R}^2$ と、$c(0) = p$ かつ $c(1) = q$ となる連続写像 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を取って $d = f \circ c : [0,1] \to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ とおくと、この d は $d(0) = r$ かつ $d(1) = s$ なる連続写像を与える．

5. 従って、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な全単射で、逆も連続になるようなものは存在しない．このことを指して、$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}$ は**同相 (homeomorphic)** ではないと言う．より強く、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な単射は存在しない．

また、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続な全射は存在する．従って、上の議論では単射性を本質的に使っているのだが、それはどこか．

問題 3.16. V を実 3 次元のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ とし、W を $(1,1,1) \in V$ で生成される V の部分ベクトル空間とする．V の同値関係 $\sim$ を、$x, y \in V$ に対し $x - y \in W$ の時 $x \sim y$ として定め、これによる商空間を V/W と書く．この時、V/W 上の線形写像 f を、$[(x,y,z)] \in V/W$ に対し

$$f([(x,y,z)]) = x + y + z$$

となるように定義することはできない（well-defined ではない）ことを示せ．

2007 年 10 月 30 日

幾何学基礎 2 演義

問題 4.1. X を集合、$f : X \to X$ を X から X への写像とし、f を 3 回合成したもの $f^3 : X \to X$ が X の恒等写像になると仮定する．この時、次が成り立つことを示せ：

1. f は全射．
2. f は単射．

2007年10月30日

幾何学基礎2演義

定義 4.1. 4次元の実ベクトル空間

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

に積を

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + wk) = (ax - by - cz - dw) + (ay + bx + cw - dz)i \\ + (az - bw + cx + dy)j + (aw + bz - cy + dx)k\end{aligned}$$

で定義したものを**4元数体**と呼ぶ．さらに、

$$\begin{aligned}S^3 &= \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}, \\ S^2 &= \{bi + cj + dk \in S^3 \mid b, c, d \in \mathbb{R}\}, \\ S^1 &= \{a + bi \in S^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

とおく．

問題 4.1. $\mathbb{H}$ を4元数体とするとき、次を示せ：

1. $x, y \in \mathbb{H}$ に対して $xy = yx$ とは限らない．
2. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = jki = kij = -jik = -ikj = -kji = -1$.
3. 任意の0でない元 $x \in \mathbb{H}$ に対し、ある $y \in \mathbb{H}$ が存在して $xy = yx = 1$ が成り立つ．
4. $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対して $\overline{x} = a - bi - cj - dk$ とおくと、任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対し
$$\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$$
となる．
5. $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対して $|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおくと、
$$|x|^2 = x\overline{x}$$
となる．
6. 任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対して
$$|xy| = |x||y|$$
となる．
7. $\mathbb{H}$ に同値関係 $\sim$ を、$x, y \in \mathbb{H}$ に対してある正の実数 r が存在して $y = rx$ となるときに $x \sim y$ として定義すると、$(\mathbb{H} \setminus \{0\})/_\sim$ は自然に S^3 と1対1に対応することを示せ．
8. S^3 には $\mathbb{H}$ の積によって自然に群構造が入ることを示せ．
9. S^2 は S^3 の部分群ではないことを示せ．
10. S^1 は S^3 の部分群であることを示せ．

問題 4.2. G を群、H をその部分群とする．G の 2 項関係 $\sim$ を、$x, y \in G$ に対してある $h \in H$ が存在して $x = yh$ となるときに $x \sim y$ として定義する時、次を示せ：

1. $\sim$ は同値関係である.
2. $\sim$ による商集合に、$x, y \in G$ に対して $[x][y] = [xy]$ となるような群構造が入るための必要十分条件は、H が G の正規部分群であることである.

注意 4.2. 群 G とその部分群 H に対し、G を $x = yh$, $h \in H$ の時 $x \sim y$ という同値関係で割った商集合を G/H で表わす．同様に、G を $x = hy$, $h \in H$ の時 $x \sim y$ という同値関係で割った商集合を $H\backslash G$ で表わす.

問題 4.3. S^1 は S^3 の正規部分群ではないことを示せ.

問題 4.4. 4 元数体 $\mathbb{H}$ から $\mathbb{H}$ への写像 ϕ を、$x \in \mathbb{H}$ に対して

$$\phi(x) = xi\overline{x}$$

で定義する．この時、次が成り立つことを示せ：

1. S^3 の ϕ による像 $\phi(S^3)$ は S^2 と一致する.
2. 任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対し、$\phi(x) = \phi(y)$ であることとある $z \in S^1$ が存在して $x = yz$ となる事は同値である.

従って、S^3/S^1 は S^2 と自然な 1 対 1 対応を持つ．この写像 $\phi : S^3 \to S^2$ を **Hopf のファイバー束**と呼ぶ.

問題 4.5. 2 行 2 列の複素行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = -\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = -1$$

を満たすものを見つけよ.（ヒント：$\mathbb{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の 2 次元ベクトル空間と見て、i, j および k の作用を行列で表示せよ.）

問題 4.6. 問題 4.5 で得られた行列を使って、2 次の特殊ユニタリ群

$$SU(2) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) \mid U^*U = 1 \text{ and } \det U = 1\}$$

が S^3 と群として同型であることを示せ.

2007 年 11 月 6 日

幾何学基礎 2 演義

定義 5.1. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の**内積 (inner product)** とは、写像

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

で次の条件を満たすものを指す.

1. 任意の $v, w \in V$ に対して $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
2. 任意の $u, v, w \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して
$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle.$$
3. 任意の零でない元 $v \in V$ に対して $\langle v, v \rangle > 0$ が成り立つ.

定義 5.2. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V から非負の実数の集合 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像 $\| \bullet \| : V \to \mathbb{R}$ が**ノルム**であるとは、次の 3 つの条件を満たすことを指す：

- 任意の $v \in V$ に対し、$v = 0$ と $\|v\| = 0$ は同値.
- 任意の $v \in V$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
- 任意の $v, w \in V$ に対して $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

ベクトル空間とその上のノルムの組を**ノルム空間**と呼ぶ.

定義 5.3. 集合 X に対し、その直積の上の関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が**擬距離 (pseudometric)** であるとは、次の 3 つの性質を満たすことを指す：

1. 任意の $x \in X$ に対して $d(x, x) = 0$.
2. 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) = d(y, x)$.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

擬距離 d がさらに性質

3. $x, y \in X$ が $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ の時に限る.

を満たすとき、d を**距離 (metric)** といい、組 (X, d) を**距離空間 (metric space)** と呼ぶ.

問題 5.1. 擬距離空間 (X, d) に対し X の 2 項関係 $\sim$ を、$d(x, y) = 0$ の時 $x \sim y$ として定義すると、$\sim$ は同値関係になることを示せ. さらに、写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ は写像 $\overline{d} : (X/\sim) \times (X/\sim) \to \mathbb{R}$ を引き起こし、組 $(X/\sim, \overline{d})$ は距離空間になることを示せ. これを擬距離空間 (X, d) に付随する距離空間と呼ぶ.

問題 5.2. 距離空間の部分集合には自然に距離空間の構造が入ることを示せ.

問題 5.3. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V が内積 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ を持つとき、関数 $\| \bullet \| : V \to \mathbb{R}$ を $v \in V$ に対して

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

で定義すると、これは V 上のノルムを与えることを示せ.

問題 5.4. ノルム空間 $(V, \| \bullet \|)$ に対し、関数 $d : V \times V \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定義すると、これは V 上の距離を与えることを示せ.

問題 5.5. ベクトル空間のノルムが内積から来るとき、そのノルムを与えるような内積はただ一つに定まることを示せ.

問題 5.6. ベクトル空間のノルムが内積から来るための必要十分条件を与えよ.

問題 5.7. ノルム空間 $(V, \| \bullet \|)$ に対し、ノルムを保つ線形自己同型の集合は群をなすことを示せ.

問題 5.8. 有限次元のノルム空間 $(V, \| \bullet \|)$ からノルム空間 $(W, \| \bullet \|)$ への線形写像の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ の上の関数 $\| \bullet \|$ を、$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して

$$\|f\| = \sup_{v \in V} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}$$

で定義すると、これは $\mathrm{Hom}(V, W)$ のノルムを与えることを示せ．このノルムを $\mathrm{Hom}(V, W)$ の**作用素ノルム**と呼ぶ．また、この定義は V が無限次元の時にはうまく行かないことを示せ.
(ヒント：sup が存在しないような線形写像を与えよ．)

定義 5.4. 距離空間 (X, d) の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy 列**であるとは、任意の正数 ϵ に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n と m に対して $d(p_n, p_m) < \epsilon$ が成り立つことを指す.

定義 5.5. 距離空間 (X, d) の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $p \in X$ に**収束する (converge)** とは、任意の正数 ϵ に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n に対して $d(p_n, p) < \epsilon$ が成り立つことを指す.

問題 5.9. 距離空間 (X, d) の収束する点列は Cauchy 列であることを示せ.

問題 5.10. 距離空間 (X, d) の Cauchy 列が収束するとき、その収束先はただ一つに定まることを示せ.

2007 年 11 月 13 日

幾何学基礎 2 演義

問題 6.1. JR 環状線の大阪駅を出発して、平日ダイヤで始発から終電までの間に環状線の中だけを通って環状線の別の駅に至る全ての経路（無駄があっても良い）の集合を P とおく．また、環状線の駅の集合を S とおき、経路 $p \in P$ に対してその終点を対応させる写像を $t : P \to S$ で表わす．この時、次の問いに答えよ：

1. 二つの経路 $p, q \in P$ に対し、$t(p) = t(q)$ の時 $p \sim q$ と定義した時、この $\sim$ は同値関係になるか？
2. $P/\sim$ と S の濃度はどちらが大きいか？
3. $P/\sim$ の代表元 $[p]$ に対し、経路 $p \in P$ を通って大阪駅から $t(p)$ まで行くのに必要な時間を対応させる写像はきちんと定義される (well-defined) か？
4. $P/\sim$ の代表元 $[p]$ に対し、経路 $p \in P$ を通って大阪駅から $t(p)$ まで行くのに必要な運賃を対応させる写像はきちんと定義される (well-defined) か？

2007 年 11 月 13 日

幾何学基礎 2 演義

定義 6.1. 距離空間 (X, d) は、Cauchy 列が必ず X の中に収束先を持つとき **完備 (complete)** であると言う.

問題 6.2. $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とし、関数 $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して $d(x, y) = |x - y|$ で定義すると、組 $(\mathbb{Q}, d)$ は完備ではない距離空間になることを示せ.

問題 6.3. 距離空間 (X, d) の Cauchy 列の集合を $\widetilde{X}$ とおくと、$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \{q_n\}_{n=1}^{\infty} \in \widetilde{X}$ に対して

$$\widetilde{d}(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \{q_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$

とおくことで $\widetilde{X}$ の擬距離 $\widetilde{d} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ が定まることを示せ. この擬距離空間 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ に付随する距離空間を (X, d) の**完備化 (completion)** と呼び、$(\overline{X}, \overline{d})$ で表わす.

注意 6.2. 問題 6.2 で与えられた距離空間 $(\mathbb{Q}, d)$ の完備化として、実数の集合に通常の距離を入れたものが得られる.

問題 6.4. 任意の距離空間に対し、その完備化への距離を保つ自然な単射が存在することを示せ.

定義 6.3. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像が**一様連続 (uniformly continuous)** であるとは、任意の正数 ϵ に対してある正数 δ が存在して、$x, x' \in X$ が $d_X(x, x') < \delta$ を満たせば $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ となることを指す.

問題 6.5. 距離空間 (X, d) の完備化 $(\overline{X}, \overline{d})$ は次の性質で特徴づけられることを示せ：

- 任意の完備距離空間 (N, d_N) と一様連続写像 $f : X \to N$ に対して、一様連続写像 $\overline{f} : \overline{X} \to N$ で f の拡張になっているものがただ一つ存在する.

定義 6.4. 素数 p に対し有理数体 $\mathbb{Q}$ の p **進距離 (p-adic metric)**d_p を、$a, b \in \mathbb{Q}$ に対し

$$d_p(a, b) = \begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p(a-b)} & a \neq b \text{ の時,} \\ 0 & a = b \text{ の時} \end{cases}$$

で定義する. ただし $\mathrm{ord}_p(a - b)$ は、$a - b$ を割り切る p 冪の中で最大となるような冪指数を指す. つまり、整数 k と p で割り切れない整数 m, n によって

$$a - b = p^k \frac{n}{m}$$

と表されるとき、$\mathrm{ord}_p(a - b) = k$ と定める.

問題 6.6. 素数 p と p 進距離 d_p に対し、$(\mathbb{Q}, d_p)$ は距離空間であることを示せ.

問題 6.7. 素数 p と p 進距離 d_p に対し、距離空間 $(\mathbb{Q}, d_p)$ は完備ではないことを示せ.

定義 6.5. 素数 p と p 進距離 d_p に対し、距離空間 $(\mathbb{Q}, d_p)$ の完備化を p **進有理数体 (the field of p-adic rational numbers)** と呼び、$\mathbb{Q}_p$ で表わす. また、$(\mathbb{Q}, d_p)$ の部分距離空間 $(\mathbb{Z}, d_p)$ の完備化は $\mathbb{Q}_p$ の部分距離空間であるが、これを $\mathbb{Z}_p$ で表わす.

定義 6.6. $\mathbb{Q}$ の加法と乗法は、$\mathbb{Q}_p$ の加法と乗法に連続に拡張されることを示せ.

定義 6.7. 集合 X とその冪集合の部分集合 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ が**位相空間 (topological space)** であるとは、$\mathcal{O}$ が次の 3 つの性質を満たすことを指す：

1. 空集合 $\emptyset$ と全体集合 X は $\mathcal{O}$ の元である.
2. $\mathcal{O}$ の元の有限個の列 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ に対し、それらの共通部分 $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ も再び $\mathcal{O}$ の元になる.
3. $\mathcal{O}$ の任意の部分集合 Λ に対し、それらの和集合 $\bigcup_{U \in \Lambda} U$ も再び $\mathcal{O}$ の元になる.

$\mathcal{O}$ の元を $(X, \mathcal{O})$ の**開集合 (open set)** と呼び、$\mathcal{O}$ を X(あるいは $(X, \mathcal{O})$) の**位相 (topology)** と呼ぶ. また、何が開集合か明らかな場合には、$\mathcal{O}$ を省略して単に「X が位相空間である」ということもある.

定義 6.8. 集合 X の上の 2 つの位相 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{Q}$ が $U \in \mathcal{O}$ ならば $U \in \mathcal{Q}$ を満たすとき、$\mathcal{Q}$ は $\mathcal{O}$ より**強い (finer/stronger)** （あるいは、$\mathcal{O}$ は $\mathcal{Q}$ よりも**弱い (coarser/weaker)**）と言う.

定義 6.9. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の点 p に対し、p を含むような $\mathcal{O}$ の元のことを p の**近傍 (neighborhood)** と呼ぶ.

定義 6.10. 集合 X と X の冪集合の部分集合 $\mathcal{Q}$ が与えられたとき、$\mathcal{Q}$ を含む X の冪集合の部分集合 $\mathcal{O}$ で開集合の公理を満たすもののうち、包含関係に関して最小のものを **$\mathcal{Q}$ で生成される X の位相**と呼ぶ. これは、$\mathcal{Q}$ に空集合 $\emptyset$ と全体集合 X を付け加えた後、そこから有限の共通部分と任意の和集合を取る操作を繰り返して得られるような X の部分集合を全て $\mathcal{Q}$ に付け加えて得られるような集合である.

定義 6.11. (X, d) を距離空間として、$p \in X$ と正の実数 a に対して d に関する開球 $U(p, a)$ を

$$U(p, a) = \{q \in X \mid d(p, q) < a\}$$

で定義する. この時、全ての開球の集合 $\{U(p, a) \mid p \in X \text{ かつ } a \in \mathbb{R}_{>0}\}$ で生成される X の位相のことを X の距離 d から決まる位相と呼ぶ.

問題 6.8. 距離空間 (X, d) の部分集合 U が距離 d から定まる位相に関して開集合であることと、任意の $p \in U$ に対してある正数 a が存在して $U(p, a) \subset U$ となることが同値であることを示せ.

問題 6.9. $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して、開集合の族 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ で共通部分 $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ が開集合ではない例を与えよ.

2007 年 11 月 27 日

幾何学基礎 2 演義 (中間試験)

次の 2 つの問題に対し、与えられた答案が正しければ丸を付け、正しくなければどこが正しくないかを指摘せよ.

問題 7.1. X を集合、$f : X \to X$ を X から X への写像とし、f を 3 回合成したもの $f^3 : X \to X$ が X の恒等写像になると仮定する．この時、次が成り立つことを示せ：

1. f は全射.
2. f は単射.

(答案 1)
$f \circ f : X \to X$ と $f : X \to X$ の合成写像 $f \circ (f \circ f)$ は X の恒等写像であるので、特に全射である．一般に、写像 $g : U \to V$ と $h : V \to W$ を合成したもの $h \circ g : U \to W$ が全射であれば、$h : V \to W$ は全射であるので、f は全射である．同様に、$\mathrm{id}_X = (f \circ f) \circ f$ が単射であり、写像 $g : U \to V$ と $h : V \to W$ を合成したもの $h \circ g : U \to W$ が単射であれば $g : U \to V$ は単射であるので、f は単射である.

(答案 2)
1. ある $x, y \in X$ に対して $f(x) = f(y)$ であると仮定すると、両辺を $f \circ f$ で移して $(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(y)$ となる．ところが、$f \circ f \circ f$ は X の恒等写像なので、結局 $x = y$ となり、f は全射である.
2. 任意の $x \in X$ に対して、$y = (f \circ f)(x)$ とおくと、

$$x = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(y)$$

となるので、f は単射である.

(答案 3)
$(f \circ f) \circ f = \mathrm{id}_X$ なので、$f \circ f : X \to X$ は $f : X \to X$ の逆写像 f^{-1} である．逆写像を持つ写像は全単射なので、f は全単射である.

問題 7.2. JR 環状線の大阪駅を出発して、平日ダイヤで始発から終電までの間に環状線の中だけを通って環状線の別の駅に至る全ての経路（無駄があっても良い）の集合を P とおく．また、環状線の駅の集合を S とおき、経路 $p \in P$ に対してその終点を対応させる写像を $t : P \to S$ で表わす．この時、次の問いに答えよ：

1. 二つの経路 $p, q \in P$ に対し、$t(p) = t(q)$ の時 $p \sim q$ と定義した時、この $\sim$ は同値関係になるか？

2. $P/\sim$ と S の濃度はどちらが大きいか？

3. $P/\sim$ の代表元 $[p]$ に対し、経路 $p \in P$ を通って大阪駅から $t(p)$ まで行くのに必要な運賃を対応させる写像はきちんと定義される (well-defined) か？

(答案)

1. 同値関係であることを示すには対称律、反射律、推移律の 3 つを確かめれば良い．この問題の場合、このいずれも容易にチェックすることができ、$\sim$ が同値関係であることが分かる．

2. $P/\sim$ は環状線の駅の集合 S から大阪駅を除いたものと 1 対 1 に対応するので、$P/\sim$ より S の方が濃度が大きい．

3. 環状線の中での運賃は発着駅のみにより、経路にはよらないので、大阪駅から $t(p)$ まで行くのに必要な運賃を対応させる写像はきちんと定義される．

2007 年 11 月 27 日

幾何学基礎 2 演義 (中間試験) 解答例

次の 2 つの問題に対し、与えられた答案が正しければ丸を付け、正しくなければどこが正しくないかを指摘せよ.

問題 7.1. X を集合、$f : X \to X$ を X から X への写像とし、f を 3 回合成したもの $f^3 : X \to X$ が X の恒等写像になると仮定する．この時、次が成り立つことを示せ：

1. f は全射.
2. f は単射.

(答案 1)

$f \circ f : X \to X$ と $f : X \to X$ の合成写像 $f \circ (f \circ f)$ は X の恒等写像であるので、特に全射である．一般に、写像 $g : U \to V$ と $h : V \to W$ を合成したもの $h \circ g : U \to W$ が全射であれば、$h : V \to W$ は全射であるので、f は全射である．同様に、$\mathrm{id}_X = (f \circ f) \circ f$ が単射であり、写像 $g : U \to V$ と $h : V \to W$ を合成したもの $h \circ g : U \to W$ が単射であれば $g : U \to V$ は単射であるので、f は単射である.

正しい.

(答案 2)

1. ある $x, y \in X$ に対して $f(x) = f(y)$ であると仮定すると、両辺を $f \circ f$ で移して $(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(y)$ となる．ところが、$f \circ f \circ f$ は X の恒等写像なので、結局 $x = y$ となり、f は全射である.

2. 任意の $x \in X$ に対して、$y = (f \circ f)(x)$ とおくと、

$$x = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(y)$$

となるので、f は単射である.

全射性と単射性の証明が逆である.

(答案 3)

$(f \circ f) \circ f = \mathrm{id}_X$ なので、$f \circ f : X \to X$ は $f : X \to X$ の逆写像 f^{-1} である．逆写像を持つ写像は全単射なので、f は全単射である.

逆写像であることを示すには $f \circ (f \circ f) = \mathrm{id}_X$ も必要である.

問題 7.2. JR 環状線の大阪駅を出発して、平日ダイヤで始発から終電までの間に環状線の中だけを通って環状線の別の駅に至る全ての経路（無駄があっても良い）の集合を P とおく．また、環状線の駅の集合を S とおき、経路 $p \in P$ に対してその終点を対応させる写像を $t : P \to S$ で表わす．この時、次の問いに答えよ：

1. 二つの経路 $p, q \in P$ に対し、$t(p) = t(q)$ の時 $p \sim q$ と定義した時、この $\sim$ は同値関係になるか？
2. $P/\sim$ と S の濃度はどちらが大きいか？
3. $P/\sim$ の代表元 $[p]$ に対し、経路 $p \in P$ を通って大阪駅から $t(p)$ まで行くのに必要な運賃を対応させる写像はきちんと定義される (well-defined) か？

(答案)

1. 同値関係であることを示すには対称律、反射律、推移律の 3 つを確かめれば良い．この問題の場合、このいずれも容易にチェックすることができ、$\sim$ が同値関係であることが分かる．

2. $P/\sim$ は環状線の駅の集合 S から大阪駅を除いたものと 1 対 1 に対応するので、$P/\sim$ より S の方が濃度が大きい．

3. 環状線の中での運賃は発着駅のみにより、経路にはよらないので、大阪駅から $t(p)$ まで行くのに必要な運賃を対応させる写像はきちんと定義される．

1, 2, 3 とも全て正しい．

2007 年 11 月 27 日

幾何学基礎 2 演義

定義 8.1. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間、$\iota: Y \to X$ を単射とするとき、ι が連続になるような最弱の位相を Y の**相対位相 (relative topology)** と呼ぶ.

問題 8.1. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間、$\iota: Y \to X$ を単射とするとき、Y の部分集合 U が X の位相に対する Y の相対位相に関して開集合であることと、X の開集合 V が存在して $U = \iota^{-1}(V)$ となることは同値であることを示せ.

定義 8.2. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間、$p: X \to Y$ を全射とする．この時、p を連続にするような Y の位相で最強のものを Y の p に関する**商位相 (quotient topology)** と呼ぶ.

問題 8.2. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間、$p: X \to Y$ を全射とするとき、Y の部分集合 U が商位相に関して開集合であることと、$p^{-1}(U)$ が $(X,\mathcal{O})$ の開集合であることが同値であることを示せ.

問題 8.3. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に $\mathbb{R}^2$ の通常の位相から定まる相対位相を与えたものと、加法群 $\mathbb{R}$ を正規部分群 $\mathbb{Z}$ で割った商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に $\mathbb{R}$ の通常の位相から定まる商位相を入れたものの間に、位相を保つような全単射があることを示せ.

定義 8.3. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が**離散 (discrete)** であるとは、任意の点 $p \in X$ に対して、一点からなる集合 $\{p\} \subset X$ が $\mathcal{O}$ の元であることを指す.

問題 8.4. 離散位相空間は距離空間から来る（すなわち、任意の離散位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対して X の上の距離 d が存在して、d から来る位相と $\mathcal{O}$ が一致する）ことを示せ.

定義 8.4. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が **Hausdorff 空間**であるとは、任意の異なる二点 $p,q \in X$ に対して p の近傍 U と q の近傍 V が存在して、U と V が交わらないことを指す.

問題 8.5. 距離空間は距離から定まる位相に関して Hausdorff 空間であることを示せ.

定義 8.5. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $p \in X$ に**収束する (converge)** とは、p の任意の近傍 U に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n に対して p_n が U に入ることを指す.

問題 8.6. Hausdorff 空間の点列の収束先はただ一つに定まることを示せ.

問題 8.7. 距離空間 (X,d) の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ と点 $p \in X$ に対して、$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が距離 d に関して点 $p \in X$ に収束することと、距離 d から定まる位相に関して p に収束することは同値であることを示せ.

定義 8.6. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ から位相空間 $(Y,\mathcal{Q})$ への写像 $f: X \to Y$ が**連続 (continuous)** であるとは、任意の $V \in \mathcal{Q}$ に対して $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ である事を指す.

問題 8.8. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ から位相空間 $(Y,\mathcal{Q})$ への写像 $f: X \to Y$ が**連続 (continuous)** であることと、任意の点 $p \in X$ と p に収束する X の任意の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、Y の点列 $\{f(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(p)$ に収束する事は同値であることを示せ.

定義 8.7. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が**準コンパクト (quasi-compact)** であるとは、任意の開被覆 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ に対して有限の部分被覆 (すなわち、Λ の有限部分集合 Λ' で $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}U_\lambda$ となるもの) が存在する事を指す．準コンパクト位相空間が Hausdorff 空間の時、**コンパクト (compact)** であるという．

問題 8.9. 準コンパクトな位相空間の連続写像による像は準コンパクトであることを示せ．特に、コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像の像は必ずコンパクトになる．

問題 8.10. (X,d) を距離空間とするとき、距離から定まる位相に関して X がコンパクトであることと、X の任意の点列が収束する部分列を持つことが同値であることを示せ．

定義 8.8. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 C が**閉 (closed)** であるとは、補集合 $X\setminus C$ が $(X,\mathcal{O})$ の開集合であることを指す．

問題 8.11. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 C が閉であることと、C の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X の点 p に収束するならば $p\in C$ となることが同値であることを示せ．

問題 8.12. Hausdorff 空間のコンパクトな部分集合は閉部分集合であることを示せ．

問題 8.13. コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトであることを示せ．

問題 8.14. 位相空間のコンパクトな部分集合で、閉部分集合ではないものを与えよ．

問題 8.15. 有限集合は任意の位相に対してコンパクトであることを示せ．

問題 8.16. 離散なコンパクト集合は有限集合であることを示せ．

問題 8.17. 自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ の中で多項式の零点として定義される部分集合を閉集合として定義すると、これは $\mathbb{R}^n$ の位相を与える（すなわち、その補集合を開集合と定義すると、これは位相の公理を満たす）ことを示せ．これを $\mathbb{R}^n$ の **Zariski 位相**と呼ぶ．

問題 8.18. 正の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ は Zariski 位相に関して Hausdorff ではない事を示せ．

問題 8.19. 正の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ は通常の位相ではコンパクトではないことを示せ．

問題 8.20. 任意の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ は Zariski 位相に関して準コンパクトであることを示せ．

問題 8.21. $\mathbb{R}$ の部分集合が Zariski 位相に関して開集合であることと、その補集合が有限集合であることは同値であることを示せ．

問題 8.22. $\mathbb{R}$ の Zariski 位相に関する任意の開集合は準コンパクトであることを示せ．

定義 8.9. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 S に対し、S を含む X の最小の閉集合を S の**閉包 (closure)** と呼ぶ．

問題 8.23. $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して、次の部分集合の閉包を求めよ：

1. 開区間 $(0,1)$.
2. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

問題 8.24. $\mathbb{R}$ の Zariski 位相に関する任意の開集合の閉包は $\mathbb{R}$ 全体になることを示せ．

2007 年 12 月 4 日

幾何学基礎 2 演義

問題 9.1. 位相空間 X から位相空間 Y への写像が**開写像 (open map)** であるとは、X の任意の開集合の像が Y の開集合になることを指す．同様に、X から Y への写像が**閉写像 (closed map)** であるとは、X の任意の閉集合の像が Y の閉集合になることを指す.

問題 9.2. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像で、次のような性質を満たすものを与えよ：

1. 開かつ閉の写像.
2. 開だが閉ではない写像.
3. 閉だが開ではない写像.
4. 連続な開写像
5. 連続でない開写像
6. 開でない連続写像
7. 連続でない閉写像
8. 閉でない連続写像

問題 9.3. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像であることを示せ.

定義 9.1. 位相空間 X から Y への連続写像 f が**同相写像 (homeomorphism)** であるとは、Y から X への連続写像 g が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_X$ と $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が成り立つことを指す.

問題 9.4. $\mathbb{R}$ に通常の位相を入れたものを X、Zariski 位相を入れたものを Y とおき、$\mathbb{R}$ の恒等写像を X から Y への写像と考えたものを f、Y から X への写像と考えたものを g で表わす．このとき、f および g はそれぞれ連続かどうかを答えよ.

問題 9.5. 全単射な連続写像は必ずしも同相写像とは限らないことを示せ.

問題 9.6. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射は同相写像であることを示せ.

問題 9.7. 有限とは限らない集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとし、Λ の任意の有限部分集合 I と、各 $\lambda \in I$ に対して X_λ の開集合 $U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ を選んだとき、これに対して直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の部分集合 $U(I;\{U_\lambda\}_{\lambda\in I})$ を

$$U(I;\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}) = \{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid x_\lambda \in U_\lambda \text{ if } \lambda \in I\}$$

で定義する．この時、

$$\mathcal{O} = \{U(I;\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}) \mid I \subset \Lambda \text{ is finite and } U_\lambda \subset X_\lambda \text{ is open for any } \lambda \in I\}$$

の元を開集合と定義することで、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に位相を入れることができることを示せ．これを $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の**直積位相 (product topology)** と呼ぶ.

問題 9.8. 無限集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ と、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して X_λ の空でも全体でもない開集合 $U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ が与えられたとき、直積集合

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

は $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の直積位相に関する開集合ではないことを示せ.

問題 9.9. 集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の直積位相は任意の $\mu \in \Lambda$ に対して μ 成分への射影

$$\pi_\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\mu$$

を連続にするような最弱の位相であることを示せ.

問題 9.10. 集合 Λ でパラメトライズされた位相空間の族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の直積位相は次の性質で特徴づけられることを示せ：任意の位相空間 $(Y, \mathcal{Q})$ と連続写像の族 $\{f_\lambda : Y \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、連続写像 $f : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で任意の $\mu \in \Lambda$ に対して $f_\mu = \pi_\mu \circ f$ を満たすものがただ一つ存在する.

問題 9.11. 離散位相空間の無限直積は離散位相空間ではないことを示せ.

問題 9.12. 離散有限集合の直積はコンパクトであることを示せ.

問題 9.13. 素数 p に対し、p 個の元からなる集合 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ に離散位相を入れたものの可算無限直積空間

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \dots$$

は p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ と同相であることを示せ.

定義 9.2. 距離空間 (X, d) が**有界 (bounded)** であるとは、ある正数 R が存在して、任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) < R$ が成り立つことを指す.

定義 9.3. 距離空間 (X, d) が**全有界 (totally bounded)** であるとは、任意の正数 R に対してある正の自然数 n と点列 $\{p_i\}_{i=1}^n$ が存在して、任意の点 $p \in X$ に対して $\min\limits_{i=1,\dots,n} d(p_i, p) < R$ が成り立つことを指す.

問題 9.14. 任意の自然数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ の部分集合が有界であることと全有界であることは同値であることを示せ.

問題 9.15. 有界だが全有界ではない距離空間を与えよ.

問題 9.16. 距離空間がコンパクトであることと、完備かつ全有界であることは同値であることを示せ.

定義 9.4. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 Y の点 $p \in Y$ が Y の**内点 (interior point)** であるとは、p を含むような X の開集合 $U \in \mathcal{O}$ で、Y に含まれるようなものが存在することを指す. Y が内点を持たない時、Y は**粗 (nowhere dense)** であると言う.

定義 9.5. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 Y の点 $p \in Y$ が Y の**孤立点 (isolated point)** であるとは、X の開集合 $U \in \mathcal{O}$ で、$U \cap Y = \{p\}$ となるものが存在することを指す.

2007 年 12 月 11 日

幾何学基礎 2 演義

問題 10.1. V、W を実ベクトル空間、$U \subset V$ を V の部分ベクトル空間、$f : V \to W$ を線形写像とするとき、次の問いに答えよ：

1. V の二項関係 $\sim$ を、$v, v' \in V$ に対しある $u \in U$ が存在して $v' = v + u$ となるとき $v \sim v'$ と定義すると、これは V の同値関係を定めることを示せ.
2. 上で与えられた同値関係 $\sim$ に関する商集合 $V/_\sim$ には自然にベクトル空間の構造が入ることを示せ. このベクトル空間を V の U による商ベクトル空間と呼び、V/U で表わす.
3. 線形写像 f が商ベクトル空間 V/U から W への写像 $\overline{f} : V/U \to W$ を定めるための必要十分条件を求めよ.

2007 年 12 月 11 日

幾何学基礎 2 演義

定義 10.1. 0 と 2 のみからなる 3 進小数展開を持つような 0 以上 1 以下の実数のなす集合を **Cantor 集合**と呼ぶ.

問題 10.2. Cantor 集合について、次の性質を示せ：

1. 閉集合である.
2. 粗である.
3. 孤立点を持たない.
4. 非可算である.
5. 離散位相空間 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の可算無限直積空間 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \cdots$ と同相である.

定義 10.2. Hausdorff 空間 $(G, \mathcal{O})$ が群の構造を持ち、積を与える写像 $G \times G \to G$ と逆元を与える写像 $G \to G$ が連続写像であるとき、$(G, \mathcal{O})$ を**位相群 (topological group)** と呼ぶ.

問題 10.3. $\mathbb{R}$ は加法と通常の位相に関して位相群であることを示せ.

問題 10.4. ノルム空間 $(V, \|\bullet\|)$ に対し、ノルムを保つ線形自己同型写像全体のなす群は作用素ノルムに関して位相群である事を示せ.

問題 10.5. p 進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ は加法と p 進位相に関して位相群であることを示せ.

問題 10.6. p 進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ の可逆元全体の集合 $(\mathbb{Q}_p)^\times$ は乗法と p 進位相に関して位相群であることを示せ.

問題 10.7. p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の可逆元全体の集合 $(\mathbb{Z}_p)^\times$ は乗法と p 進位相に関して $(\mathbb{Q}_p)^\times$ のコンパクトな正規位相部分群であることを示せ.

問題 10.8. 位相群を離散部分群で割った商空間は Hausdorff 空間であることを示せ.

問題 10.9. 位相群をコンパクトな部分群で割った商空間は Hausdorff 空間であることを示せ.

注意 10.3. 実は、位相群を閉部分群で割った商空間は Hausdorff 空間である事が知られている.

問題 10.10. 加法群 $\mathbb{Z}$ は位相群 $\mathbb{R}$ の離散正規部分群であり、商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ に通常の位相と乗法で位相群の構造を入れたものと位相群として同型であることを示せ.

問題 10.11. 商群 $(\mathbb{Q}_p)^\times/(\mathbb{Z}_p)^\times$ は離散群 $\mathbb{Z}$ と位相群として同型であることを示せ.

問題 10.12. 加法群 $\mathbb{Q}$ は位相群 $\mathbb{R}$ の正規部分群であるが、商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は位相群ではない事を示せ.

問題 10.13. 位相群の準同型 $f : G \to H$ に対し、$\mathrm{Ker}f$ が G の閉正規部分群で、商群 $G/\mathrm{Ker}f$ は $\mathrm{Im}f$ と位相群として同型になることを示せ.

問題 10.14. 4 元数体 $\mathbb{H}$ の元 x に対し、x の実部 $\Re x$ を

$$\Re x = \frac{x+\overline{x}}{2}$$

で定め、$\mathbb{H}$ の実 3 次元部分空間 $\Im\mathbb{H}$ を

$$\Im\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{H} \mid \Re x = 0\}$$

とおく．ここで写像

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : \Im\mathbb{H} \times \Im\mathbb{H} \to \mathbb{R}$$

を $x, y \in \Im\mathbb{H}$ に対して

$$\langle x, y \rangle = \Re(\overline{x}y)$$

で定めると、これは $\Im\mathbb{H}$ の内積になる事を示せ.

問題 10.15. $\Im\mathbb{H}$ の内積を保つ線形自己同型のなす群は、3 次直交群

$$O(3) = \{O \in M_3(\mathbb{R}) \mid O \cdot O^T = \mathrm{id}\}$$

と群として同型であることを示せ．ただし、$M_3(\mathbb{R})$ は 3 行 3 列の実正方行列の集合で、行列 O に対して O^T で O の転置行列を表わす.

問題 10.16. 3 次直交群の元の行列式は ± 1 であることを示せ.

問題 10.17. 3 次特殊直交群を

$$SO(3) = \{O \in O(3) \mid \det O = 1\}$$

で定義すると、これは $O(3)$ の正規部分群であることを示せ.

問題 10.18. 商群 $O(3)/SO(3)$ が 2 次の巡回群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.

問題 10.19. $SO(3)$ の任意の元はある軸を中心とした回転を表わすことを次のようにして示せ.

1. $O \in SO(3)$ とすると、$O^T = O^{-1}$ から $\det(O - \mathrm{id}) = 0$ が従う．（ヒント：$\det(O - \mathrm{id}) = \det(O^T - \mathrm{id})$ を使え．）
2. 任意の $O \in SO(3)$ に対してある零でないベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ が存在して、$Ov = v$ となる.
3. O の $\mathbb{R}^3$ への作用は $\mathbb{R}v$ を軸とした回転を与える.

問題 10.20. $\mathbb{R}^3$ における任意の回転は、ある $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$ に対して、z 軸の周りに角度 α だけ回転して、これによって回転された座標に関して y 軸の周りに角度 β だけ回転して、さらにこの回転ののち得られる座標に関して z 軸の周りに角度 γ だけ回転することによって得られることを示せ．この角度の組 (α, β, γ) を回転の **Euler 角**と呼ぶ.

問題 10.21. 絶対値が 1 の 4 元数の集合 $S^3 \subset \mathbb{H}$ は、四元数体 $\mathbb{H}$ の 4 次元実ベクトル空間としての位相に関する相対位相と 4 元数の乗法に関して位相群になることを示せ.

問題 10.22. 絶対値が 1 の 4 元数 $g \in S^3$ に対し写像 $\rho(g) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$\rho(g)(x) = gx\overline{g}$$

で定義すると、これは $\Im\mathbb{H}$ の元を $\Im\mathbb{H}$ に移し、内積 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ を保つことを示せ．従って、ρ は S^3 から $O(3)$ への写像になる.

2007 年 12 月 18 日

幾何学基礎 2 演義

問題 11.1. 3 点からなる集合 $\{p, q, r\}$ を X とおく時、次の問に答えよ：

1. $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{p, q\}, \{r\}, X\}$ とおくと、$\mathcal{O}$ は X の位相を定めることを示せ.
2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は連結か？
3. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は準コンパクトか？
4. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff か？
5. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から実数の集合 $\mathbb{R}$ への写像が $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して連続であるための必要十分条件を求めよ.

2007 年 12 月 18 日

幾何学基礎 2 演義

定義 11.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が**連結 (connected)** であるとは、X が 2 つの開集合 $U, V \in \mathcal{O}$ の共通部分を持たない和集合として表わされるならば U または V が空集合になることを指す.

定義 11.2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が**弧状連結 (arcwise connected)** であるとは、任意の 2 点 $p, q \in X$ に対して連続写像 $c : [0,1] \to X$ で $c(0) = p$ かつ $c(1) = q$ を満たすものが存在することを指す.

問題 11.2. 弧状連結な位相空間は連結であることを示せ.

問題 11.3. 連結な位相空間の連続写像による像は連結であることを示せ.

問題 11.4. 3 次直交群 $O(3)$ が連結ではないことを示せ.

問題 11.5. 3 次特殊直交群 $SO(3)$ が弧状連結であることを示せ.

問題 11.6. 問題 10.22 で与えられた写像 $\rho : S^3 \to O(3)$ の像は $SO(3)$ であることを示せ.

問題 11.7. 位相群の同型 $S^3/\{\pm 1\} \cong SO(3)$ を示せ.

定義 11.3. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が**完全不連結 (totally disconnected)** とは、空集合と一点集合以外の任意の部分集合が連結ではないことを指す.

問題 11.8. 任意の素数 p に対し、p 進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ は完全不連結であることを示せ.

問題 11.9. Cantor 集合は完全不連結であることを示せ.

定義 11.4. X, Y を位相空間、$\mathrm{Map}(X, Y)$ を X から Y への連続写像の集合とする. X のコンパクト集合 C と Y の開集合 U に対し

$$\mathcal{O}(C, U) = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f(C) \subset U\}$$

とおくとき、

$$\{\mathcal{O}(C, U) \mid C \subset X \text{ is compact and } \ U \subset Y \text{ is open}\}$$

で生成される位相を $\mathrm{Map}(X, Y)$ の**コンパクト開位相 (compact open topology)** と呼ぶ.

問題 11.10. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコンパクト開位相に関して収束することと、一様収束することが同値であることを示せ.

定義 11.5. X を位相空間、Y を距離空間とするとき、$\mathrm{Map}(X, Y)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**広義一様収束する (converge compactly)** とは、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を K に制限したもの $\{f_n|_K\}_{n=1}^{\infty}$ が一様収束することを指す.

問題 11.11. X を位相空間、Y を距離空間とすると、$\mathrm{Map}(X, Y)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコンパクト開位相に関して収束することと、X 上で広義一様収束することが同値であることを示せ.