幾何学基礎 1 演義

問題 1.1. 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 S を

$$S = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \text{ は正の自然数} \right\}$$

で定義する．この時 S の上限を求めよ．

問題 1.2. 実数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ実数 α と β に収束するとき、数列 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを示せ.

問題 1.3. 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 S が最大元 $x \in S$ を持つ時、x は S の上限になることを示せ.

問題 1.4. 零でない実数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が零でない実数 α に収束するとき、数列 $\{a_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は α^{-1} に収束することを示せ.

問題 1.5. 整数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する時、ある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n と m に対して $a_n = a_m$ となることを示せ.

問題 1.6. 正の実数からなる Cauchy 列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、$\{a_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列にはならないものを与えよ.

問題 1.7. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を 1 未満の正数の列、r を 1 未満の正数とするとき、数列

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i r^i, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

が収束することを示せ.

問題 1.8. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数の列、r を

$$\frac{1}{r} > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

を満たす正数とするとき、数列

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i r^i, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

が収束することを示せ.（ヒント：$\dfrac{1}{r} > \ell > \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ を満たす実数 ℓ を何でもよいからひとつ固定すると、$r\ell < 1$ が成り立ち、かつ、ある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n に対して $a_n < \ell^n$ が成立する.）

定義 1.1. p を素数とし、有理数 a と b の間の p 進距離 $|a-b|_p$ を

$$|a-b|_p = \begin{cases} p^{-\operatorname{ord}_p(a-b)} & a \neq b \text{ の時}, \\ 0 & a = b \text{ の時} \end{cases}$$

で定義する．ただし $\operatorname{ord}_p(a-b)$ は、$a-b$ を割り切る p 冪の中で最大となるような冪指数を指す．つまり、整数 k と p で割り切れない整数 m, n によって

$$a-b = p^k \frac{n}{m}$$

と表されるとき、$\operatorname{ord}_p(a-b) = k$ と定める．

問題 1.9. 任意の有理数 a, b および c に対して次が成り立つことを示せ：

1. $|a-b|_p \geq 0.$
2. $|a-b|_p = 0 \iff a = b.$
3. $|a-b|_p = |b-a|_p.$
4. $|a-c|_p \leq \max\{|a-b|_p, |b-c|_p\} \leq |a-b|_p + |b-c|_p.$

定義 1.2. 有理数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p 進距離に関して Cauchy 列であるとは、

- 任意の正数 ϵ に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 m と n に対して $|a_m - a_n|_p < \epsilon$ が成り立つ

ことを指す．

問題 1.10. 整数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p 進距離に関して Cauchy 列であることの必要十分条件は、

- 任意の自然数 M に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 m と n に対して $a_m - a_n$ が p^M で割り切れる

であることを示せ．

問題 1.11. 任意の素数 p に対し、整数の列 $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ は p 進距離に関して Cauchy 列であることを示せ．

問題 1.12. 有理数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

で新しい数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定義する．この時、$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p 進距離に関して Cauchy 列であるための必要十分条件は、実数の列 $\{|a_n|_p\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することであることを示せ．

幾何学基礎 1 演義

問題 2.1. 0 以上 p 未満の整数の列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し、

$$s_n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n,$$
$$t_n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_n p^n,$$

で新しい数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及び $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定義する．この時、これらの数列は p 進距離に関して Cauchy 列であり、実数の列 $\{|s_n - t_n|_p\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束する必要十分条件は、任意の自然数 n に対し $a_n = b_n$ となることである事を示せ.

問題 2.2. a を p と互いに素な整数とする．この時、次を示せ：

1. ある整数 b と c が存在して、$ab + pc = 1$ が成立する.
2. 整数の列 $\{b_n\}$ で、実数の列 $\{|a^{-1} - b_n|_p\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものが存在する.

注意 2.3. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ に、p 進距離に関する Cauchy 列の極限を付け加えた集合を $\mathbb{Q}_p$ で表す．同様に、整数の集合 $\mathbb{Z}$ に、p 進距離に関する Cauchy 列で、整数からなるものの極限を付け加えた集合を $\mathbb{Z}_p$ で表す．問題 2.2 は、$a \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ が p と互いに素ならば、$a^{-1} \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ であることを示している.

問題 2.3. 素数 p と整数 a に対し、$a^p - a$ は p で割り切れることを示せ.

問題 2.4. 素数 p と整数 a に対し、数列 $\{a^{p^n}\}_{n=1}^{\infty}$ は p 進距離に関して Cauchy 列であることを示せ.

問題 2.5. 素数 p に対し、整数 a と b が

$$|a - b|_p < 1$$

を満たせば、実数の列 $\{|a^{p^n} - b^{p^n}|_p\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ.

注意 2.4. 奇素数 p と整数 a に対し

$$\mathrm{Teich}(a) = \lim_{n\to\infty} a^{p^n} \in \mathbb{Z}_p$$

とおくと、これは群の準同型

$$\mathrm{Teich} : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} \to (\mathbb{Z}_p)^{\times}$$

を誘導する．これを **Teichmüller 指標**と呼ぶ.

問題 2.6. 任意の有理数 a に対し、

$$|a| \cdot \prod_{p:\text{素数}} |a|_p = 1$$

が成り立つことを示せ.

問題 2.7. 任意の素数 p と任意の整数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で p 進距離に関して Cauchy 列であるものが存在することを示せ.

問題 2.8. 任意の素数 p に対しある有理数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列が p 進距離に関して Cauchy 列にはならないことを示せ.

問題 2.9. π を円周率とし、実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = 10^n\pi - [10^n\pi]$$

で定義する．さらに、実数 x と自然数 n に対し、小数第 n 位における切り捨て $[x]_n$ を

$$[x]_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

とおく．このとき、次を示せ：

1. 数列 $\{[\pi]_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.
2. 任意の自然数 k に対し、自然数の列 $0 < n_{k1} < n_{k2} < \dots$ が存在して、数列 $\{[a_{n_{ki}}]_k\}_{i=1}^{\infty}$ が収束する.
3. 任意の正数 ϵ に対し自然数の列 $0 < n_{\epsilon 1} < n_{\epsilon 2} < \dots$ が存在して、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_{\epsilon i}}\}_{i=1}^{\infty}$ は以下を満たす：
   - ある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 i と j に対して $|a_{n_{\epsilon i}} - a_{n_{\epsilon j}}| < \epsilon$ が成り立つ.
4. 自然数の列 $0 < n_{01} < n_{02} < \dots$ が存在して、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_{0i}}\}_{i=1}^{\infty}$ は以下を満たす：
   - 任意の正数 ϵ に対しある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 i と j に対して $|a_{n_{0i}} - a_{n_{0j}}| < \epsilon$ が成り立つ.

問題 2.10. 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が任意の自然数 n に対して $0 \le a_n \le 1$ を満たすとき、

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} a_n \le 1$$

となる．このことを使って、$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の部分列で収束するものが存在することを示せ.

幾何学基礎１演義

定義 3.5. 実数 x に対し、$[x]$ で x を越えない最大の整数を表す.

定義 3.6. 整数の列 $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ で $n \geq 1$ の時 $a_n \geq 2$ となるものに対し、

$$[[a_0, a_1, \ldots, a_n]] = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_n}}}}$$

とおき、連分数と呼ぶ.

問題 3.1. 任意の自然数 n に対し $a_n = 2$ とおくと、数列 $\{[[a_0, a_1, \ldots, a_n]]\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少列であり、従って収束することを示せ. また、その極限を求めよ.

問題 3.2. 整数の列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ で $n \geq 1$ の時 $a_n \geq 2$ となるものに対し、次を示せ：

1. 任意の正の整数 n に対し
$$0 < \cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n+1}}} < 1$$
が成り立つ.

2. 任意の正の整数 n に対し
$$0 < \cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n+1} - \cfrac{1}{a_{n+2}}}} < 1$$
が成り立つ.

3. 任意の正の整数 n に対し
$$0 < -[[0, a_1, a_2, \ldots, a_n]] < 1$$
が成り立つ.

4. 任意の正の整数 n に対し
$$-[[0, a_1, a_2, \ldots, a_n]] < -[0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}]$$
が成り立つ.

5. 数列 $\{[[a_0, a_1, \ldots, a_n]]\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少列であり、従って収束する.

注意 3.7. 連分数に関して次が知られている：

1. 実数 α に対して実数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ と整数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\alpha_0 = \alpha,\ a_i = [\alpha_i] + 1,\ \alpha_{i+1} = \frac{1}{a_i - \alpha_i}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

で定めると、この対応によって実数の集合 $\mathbb{R}$ と、整数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ で $n \geq 1$ の時 $a_n \geq 2$ となるものの間に 1 対 1 の対応がある.

2. α が有理数であるための必要十分条件は、ある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n に対し $a_n = 2$ となることである.

3. α が整数を係数とする 2 次方程式を満たすための必要十分条件は、ある自然数 N と正の整数 r が存在して、N より大きい任意の自然数 n に対し $a_{n+r} = a_n$ となることである.

問題 3.3. 注意 3.7 の手順を用いて $\sqrt{2}$ の連分数展開を求めよ.

問題 3.4. 次で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は全て $\sqrt{2}$ に収束することを示せ：

1.
$$a_0 = 1 + \frac{1}{2},\ a_1 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},\ a_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \ldots$$

2.
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2) \ldots (\frac{1}{2} - (n-1))}{n!}$$

3.
$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}.$$

問題 3.5. 問題 3.3 で求めた連分数展開の最初の 5 項を有効数字 8 桁の精度で求めよ.

問題 3.6. 問題 3.4 で与えられた数列の最初の 5 項を有効数字 8 桁の精度で求めよ.

問題 3.7. 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

の和の順序を入れ替えることによって、任意の実数に収束する級数が得られることを示せ.（ヒント：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n}$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}$ がともに発散することを使え.）

幾何学基礎１演義

問題 4.1. 複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次の条件を考える：

1. ある自然数 N が存在して、任意の正数 ϵ と N より大きい任意の自然数 m と n に対して $|a_m - a_n| < \epsilon$ が成立する.

2. 任意の正数 ϵ に対しある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 m と n に対して $|a_m - a_n| < \epsilon$ が成立する.

3. ある自然数 m と正数 ϵ が存在して、$|a_m - a_n| < \epsilon$ をみたす自然数 n は無限個存在する.

この時、上の条件 (1)∼(3) の各々と同値な条件を下の条件 (i)∼(iii) から選べ：

(i) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する.

(ii) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束する部分列を持つ.

(iii) ある自然数 N が存在して、$a_{N+1} = a_{N+2} = a_{N+3} = \dots$ となる.

問題 4.2. 数列

$$a_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^i}{i+1}\right), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

は収束することを示せ.

問題 4.3. 複素数 z に対し、無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

が収束するための必要十分条件を与えよ.

問題 4.4. z を絶対値が 1 より小さい複素数とし、自然数 n に対して

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} z^k,$$

とおく. この時、次を示せ：

1. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する.

2. 数列 $\{a_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ は収束する.

3. 数列 $\{a_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ は $\dfrac{1}{1-z}$ に収束する.

<table>
<tr><td rowspan="2">学籍番号</td><td rowspan="2">名前</td><td colspan="3">問題 4.1</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(3)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

幾何学基礎 1 演義

定義 5.1. V を複素数体上のベクトル空間、$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ を V 上の実数値関数とする．$\|\cdot\|$ が次の性質を満たすとき、$\|\cdot\|$ を**セミノルム**と呼ぶ：

1. 任意の $v \in V$ に対し $\|v\| \geq 0$.
2. 任意の $v \in V$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
3. 任意の $v, w \in V$ に対して $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

さらに、セミノルム $\|\cdot\|$ が次の性質を満たすとき、$\|\cdot\|$ を**ノルム**、組 $(V, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**と呼ぶ：

4. 任意の $v \in V$ に対し、$\|v\| = 0$ と $v = 0$ は同値.

ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ の元の列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとは、任意の正数 ϵ に対してある自然数 N が存在して、N より大きい任意の自然数 n と m に対して $\|v_n - v_m\| < \epsilon$ が成り立つことを指す.

問題 5.1. S を集合とし、S 上の有界複素数値関数の集合を V で表す．V の元 f, g および複素数 α, β に対し $\alpha f + \beta g \in V$ を、$s \in S$ に対し

$$(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha f(s) + \beta g(s)$$

で定めると、V は複素数体上のベクトル空間になる．この時、$f \in V$ に対して

$$\|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|$$

とおくと、組 $(V, \|\cdot\|)$ はノルム空間になることを示せ.

問題 5.2. S を有限集合とし、問題 5.1 の方法でノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ を定める．さらに V の基底 $\{e_s\}_{s \in S}$ を、$t \in S$ に対し

$$e_s(t) = \begin{cases} 1 & s = t, \\ 0 & s \neq t \end{cases}$$

で定め、V の新しいノルム $\|\cdot\|_2$ を、任意の複素数の列 $(a_s)_{s \in S}$ に対し

$$\left\| \sum_{s \in S} a_s e_s \right\|_2 = \sqrt{\sum_{s \in S} |a_s|^2}$$

で定義する．この時、V の元の列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ がノルム $\|\cdot\|$ に関する Cauchy 列であることと、ノルム $\|\cdot\|_2$ に関する Cauchy 列であることは同値であることを示せ.（ヒント：S に対して 1 以下の正数 r が存在して、任意の $v \in V$ に対して

$$r\|v\|_2 \leq \|v\| \leq \frac{1}{r}\|v\|_2$$

が成り立つ.）

幾何学基礎 1 演義

問題 6.1. $f(x) = 1/x$ で定義される開区間 $(0,1)$ 上の連続関数は一様連続では無いことを示せ.

問題 6.2. S を $\mathbb{C}$ の部分集合とし、問題 5.1 の方法でノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ を定める．この時、V の元の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることと一様収束することが同値であることを示せ.

問題 6.3. $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に一様収束するとき、f も連続であることを示せ.

問題 6.4. $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ で、不連続な関数に各点収束するものを与えよ.

問題 6.5 (Weierstrass の定理)**.** 閉区間 $[-1,1]$ 上の任意の連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し、多項式の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ で f に一様収束するものが存在することを示せ.

問題 6.6. 閉区間 $[-1,1]$ 上の滑らかな関数 f で、多項式の列

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(0)}{dx^k} \frac{x^k}{k!}, \qquad n = 0, 1, \dots$$

が f と異なる関数に収束するものを挙げよ.（ヒント：例えば $f(x) = e^{-1/x^2}$ を考えよ.）

問題 6.7. 滑らかな関数 $\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ で、

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 2, \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

を満たすものが存在することを示せ.

問題 6.8 (Borel の定理)**.** 任意の数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し、$\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数 f で、任意の自然数 k に対し

$$\frac{d^k f(0)}{dx^k} = a_k$$

が成り立つものが存在することを次のようにして示せ：

1. 問題 6.7 の条件を満たす関数 ϕ と自然数 j、それに正数 ϵ に対し、

   $$g_{j,\epsilon}(x) = \phi(x/\epsilon) \frac{a_j}{j!} x^j$$

   とおくと、任意の自然数 k に対してある正数 $C_{j,k}$ が存在して、任意の実数 x と任意の正数 ϵ に対して

   $$\left| \frac{d^k g_{j,\epsilon}(x)}{dx^k} \right| < C_{j,k} \epsilon^{j-k}$$

   が成り立つ.（ヒント：$s = t/\epsilon$ とおいてみよ.）

2. 任意の自然数 j に対してある正数 ϵ_j が存在して、任意の $x \in \mathbb{R}$ と j より小さな自然数 k に対して

$$\left|\frac{d^k g_{j,\epsilon_j}(x)}{dx^k}\right| < 2^{-j}$$

が成り立つ.

3. 級数

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_{j,\epsilon_j}(x)$$

は一様収束する.

4. 級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{dg_{j,\epsilon_j}(x)}{dx}$$

は $f'(x)$ に一様収束する.

5. $f(x)$ は滑らかな関数であり、任意の自然数 k に対し

$$\frac{d^k f(0)}{dx^k} = a_k$$

を満たす.

問題 6.9. 閉区間 $[-1,1]$ 上の滑らかな関数 f で、任意の $x \neq 0$ に対し数列

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(0)}{dx^k}\frac{x^k}{k!}, \qquad n = 0, 1, \dots$$

が発散するものが存在することを示せ.

問題 6.10. 正の整数 n に対し、n 次の Chebyshev 多項式 T_n を

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

で定義する．この時、次を示せ：

1. $T_n(x)$ は n 次の多項式であり、最高次の項の係数は 2^{n-1} である.

2. $x \in [-1,1]$ に対して $|T_n(x)| \leq 1$ であり、しかも $|T_n(x) = 1$ となるような $x \in [-1,1]$ はちょうど $n+1$ 個ある.

定義 6.1. 最高次の項の係数が 1 であるような多項式をモニックな多項式と呼ぶ.

問題 6.11. n を正の整数、$f(x)$ をモニックな n 次の多項式とする．この時、ある正数 r と任意の $x \in [-1,1]$ に対して $f(x)$ が

$$|f(x)| \leq r$$

を満たせば $r \geq 2^{-n+1}$ であり、しかも $r = 2^{-n+1}$ ならば $f(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$ となることを示せ.（ヒント：$r \leq 2^{-n+1}$ と仮定すると、$f(x) - 2^{-n+1}T_n(x)$ が n 個の零点を持つ $n-1$ 次の多項式であり、従って定数になることを示せ.）

幾何学基礎１演義

定義 7.1. 次の式

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \in \mathbb{Q}[x][[t]]$$

で **Bernoulli 多項式** $B_n(x)$ を定義する．また、$B_n = B_n(1)$ を **Bernoulli 数**と呼ぶ.

問題 7.1. Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ と Bernoulli 数 B_n に関して次を示せ：

1. $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

2. $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

3. $B_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$.

（ヒント：例えば 1 は

$$\frac{te^{(x+1)t}}{e^t - 1} - \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = te^{xt}$$

から従う．3 については

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{t^n}{n!}$$

を使え.）

問題 7.2. 上に挙げた Bernoulli 多項式の性質を使い、冪和の公式

$$\sum_{\ell=1}^{n} \ell^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}$$

を証明せよ.（ヒント：まず問題 7.1 の 1 を使って

$$\sum_{\ell=1}^{n} \ell^k = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1))$$

を示し、次に 2 と 3 を使って

$$B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

を示せ.）

問題 7.3. 上の結果を使って、自然数 n と正の実数 a に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{ai}{N}\right)^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

が成り立つことを示せ.

問題 7.4. a を正数、q を 1 未満の正数とし、連続関数 $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ と自然数 n に対し

$$s_n = (1-q)a\sum_{i=0}^{n} q^i f(q^i a)$$

とおくと、数列 $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束することを示せ.

注意 7.2. 上の状況で、

$$\int_0^a f(x)d_q x = (1-q)a\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a)$$

と書き、**Jackson 積分**と呼ぶ.

問題 7.5. 正数 a と連続関数 $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ に対し、

$$\lim_{q \nearrow 1}\int_0^a f(x)d_q x = \int_0^a f(x)dx$$

を示せ.

定義 7.3. 複素数 a と $q \neq 1$ に対し

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

とおき、q**-number** と呼ぶ.

問題 7.6. 自然数 n と正数 a および 1 未満の正数 q に対し、

$$\int_0^a x^n d_q x = \frac{a^{n+1}}{[n+1]_q}$$

を示せ.

問題 7.7. 自然数 n に対し

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

とおく. この時、次を示せ：

1. $n \geq 2$ に対し漸化式

   $$S_n = \frac{n-1}{n}S_{n-2}$$

   が成り立つ.

2. 正の整数 m に対し

   $$S_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$
   $$S_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}$$

   が成り立つ.

問題 7.8. 円周率 π に対する Wallis の公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}$$

を示せ.（ヒント：問題 7.7 で定義された数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し

$$0 < S_{2m+1} \leq S_{2m} \leq S_{2m-1}$$

が成り立つことを使って

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_{2m}}{S_{2m+1}} = 1$$

を示せ.）

問題 7.9. 任意の自然数 m と問題 7.7 で定義された数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し

$$S_{2m} = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}}, \qquad S_{2m+1} = \int_0^1 (1-t^2)^m dt$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：前者に対しては $t = \cot x$、後者に対しては $t = \cos x$ と置け.）

問題 7.10. 極限

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx$$

が存在することを示せ.

問題 7.11. $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ に対し次を示せ：

1. 正の整数 m に対し
$$I = \sqrt{m} \int_0^\infty e^{-mt^2} dt.$$

2. 正の整数 m に対し
$$\sqrt{m} \int_0^1 (1-t^2)^m dt < I < \sqrt{m} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^m}.$$
（ヒント：正数 t に対し
$$1 - t^2 < e^{-t^2} < \frac{1}{1+t^2}$$
が成り立つ.）

3. 問題 7.7 で定義された数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し
$$\lim_{m\to\infty} \sqrt{m} S_{2m+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
（ヒント：
$$\sqrt{m} S_{2m+1} = \sqrt{m} \sqrt{\frac{S_{2m+1}}{S_{2m}}} \sqrt{\frac{\pi}{4m+2}}$$
を使え.）

問題 7.12. 問題 7.11 の結果を使って

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せ.

問題 7.13. 複素数 s が負の整数ではない時、

$$a_n = \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

で定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は収束することを示せ.

問題 7.14. Euler の Γ 関数を

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

で定義すると、正の整数 n に対し

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

であり、関数等式

$$\Gamma(s) = s\Gamma(s-1)$$

を満たすことを示せ.

問題 7.15. 二重 Γ 関数 ψ を

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}\log\Gamma(s)$$

で定義すると、

$$\psi(s) = \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \cdots - \frac{1}{s+n-1}\right)$$

となることを示せ.

問題 7.16. 正数 k に対し、積分公式

$$\log(k) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-kt}}{t}dt$$

および

$$\frac{1}{k} = \int_0^\infty e^{-kt}dt$$

を示せ.

問題 7.17. 二重 Γ 関数 ψ に対し

$$\begin{aligned}\psi(s) &= \lim_{k\to\infty}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-kt}}{t}dt - \int_0^\infty \frac{1-e^{-kt}}{1-e{-t}}e^{-st}dt\right)\\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}dt\right)\\ &= \log s + \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-st}dt\end{aligned}$$

を示せ.

問題 7.18. 絶対値が 2π より小さい複素数 t に対し

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{m+1}}{(m+1)!}t^m$$

を示せ．但し B_m は Bernoulli 数である.

問題 7.19. 問題7.17 の結果に問題7.18 の級数展開を代入して形式的に項別積分すると

$$\psi(s) \sim \log s - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{m}s^{-m}$$

を得ることを示せ.

注意 7.4. 問題7.19 の結果を積分することにより形式的な冪級数展開

$$\log(\Gamma(s)) \sim s\log s - s + \frac{1}{2}\log(2\pi) - B_1\log s + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{m(m-1)}s^{-m+1}$$

を得る（Stirling）．Bernoulli 数の母関数が有限の収束半径を持つことから、上の冪級数は発散する（すなわち、収束半径が零になる）ことが分かる．しかし、部分和

$$\sim s\log s - s + \frac{1}{2}\log(2\pi) - B_1\log s + \sum_{m=2}^{N}\frac{B_m}{m(m-1)}s^{-m+1}$$

において s を固定して $N\to\infty$ とするかわりに N を固定して $s\to+\infty$ とすると、この部分和は $\log(\Gamma(s))$ に漸近することが知られている．特に、十分大きな自然数 n に対して近似

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$

が成立する．例えば、$n = 1000$ のとき

$$\begin{aligned}\log(n!) &\sim 5912.128178488164,\\ \log(\sqrt{2\pi}n^n e^{-n}) &\sim 5912.128095154833\end{aligned}$$

となり、この近似が高い精度を持つことが分かる.

幾何学基礎1演義

問題 8.1. 尖点 (cusp) を持つ代数曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

に対して、次の問いに答えよ：

1. C が閉集合であることを示せ.
2. C が有界ではないことを示せ.
3. C のグラフを描け.
4. C の定義多項式 $f(x, y) = y^2 - x^3$ の x に関する偏導関数 $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ が消えるような C の点のなす集合を求めよ．また、同様にして $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が消えるような C の点のなす集合を求めよ.
5. C が局所的に滑らかな関数 $y = y(x)$ のグラフとして表されるような C の点のなす集合を求めよ．また、同様にして C が局所的に滑らかな関数 $x = x(y)$ のグラフとして表されるような C の点のなす集合を求めよ.
6. C が局所的に連続関数 $x = x(y)$ のグラフとして表されるような C の点のなす集合を求めよ.

問題 8.2. 代数的バタフライ曲線 (algebraic butterfly curve) と呼ばれる曲線

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^6 + y^6 = x^2\}$$

に対して、次の問いに答えよ：

1. C が有界閉集合であることを示せ．(ヒント：有界性については、$|x|$ も $|y|$ も常に1以下であることを示せば良い．)
2. C のグラフを描け.
3. C の定義多項式 $f(x, y) = x^6 + y^6 - x^2$ の偏導関数 f_x が消えるような C の点のなす集合を求めよ．また、同様にして f_y が消えるような C の点のなす集合を求めよ.
4. C が局所的に関数 $y = y(x)$ のグラフとして表されるような C の点のなす集合を求めよ．また、同様にして C が局所的に関数 $x = x(y)$ のグラフとして表されるような C の点のなす集合を求めよ.

幾何学基礎 1 演義

問題 9.1. Menn 曲面

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 y - y^2\}$$

に対し、次の問いに答えよ：

1. M のグラフを描け.
2. M から xy 平面への射影

$$\begin{array}{cccc} \pi_{xy}: & M & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \cup & & \cup \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

   は全単射連続写像であることを示せ.
3. 写像 $\pi_{xy} : M \to \mathbb{R}^2$ の逆写像 $\pi_{xy}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to M$ が連続であることを示せ.
4. M から yz 平面への射影

$$\begin{array}{cccc} \pi_{yz}: & M & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \cup & & \cup \\ & (x, y, z) & \mapsto & (y, z) \end{array}$$

   の点 $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ における逆像を求めよ.（ヒント：(y, z) の値に応じて空集合、1 点からなる集合または 2 点からなる集合になる.）
5. M から xz 平面への射影

$$\begin{array}{cccc} \pi_{xz}: & M & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \cup & & \cup \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, z) \end{array}$$

   の点 $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ における逆像を求めよ.
6. 写像 $\pi_{yz} \circ \pi_{xy}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の Jacobi 行列および Jacobi 行列式を求めよ.
7. 写像 $\pi_{yz} \circ \pi_{xy}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が局所的に滑らかな逆写像を持つような点 (x, y) のなす集合を求め、その補集合のグラフを描け.
8. 写像 $\pi_{xz} \circ \pi_{xy}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の Jacobi 行列および Jacobi 行列式を求めよ.
9. 写像 $\pi_{xz} \circ \pi_{xy}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が局所的に滑らかな逆写像を持つような点 (x, y) のなす集合を求め、その補集合のグラフを描け.

問題 9.2. 燕尾曲面 (swallowtail surface) を

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\},$$
$$f(x, y, z) = 9x^3 - 12x^2z^2 + 15xy^2z - 3y^4 + 4xz^4 - y^2z^3$$

で定義する時、次の問いに答えよ：

1. 写像
$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \cup & & \cup \\ & (u, v) & \mapsto & (uv^2 + 3v^4, -2uv - 3v^3, u) \end{array}$$
の像が M に含まれることを示せ.

2. 与えられた $z \in \mathbb{R}$ に対して集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y, z) = 0\}$ のグラフを描け.

3. 与えられた $u \in \mathbb{R}$ に対して集合 $\{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \{u\} \mid v \in \mathbb{R}\}$ のグラフを描け.

4. 写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$ が全射であることを示せ.

5. M のグラフを描け.

6. 陰関数定理を用いて、M が点 $(x, y, z) \in M$ の周りで局所的にある滑らかな関数 $z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のグラフとして表されるための (x, y, z) に対する条件を求めよ.

7. 陰関数定理を用いて、M が点 $(x, y, z) \in M$ の周りで局所的にはある滑らかな関数 $x = x(y, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のグラフとして表されるための (x, y, z) に対する条件を求めよ.

8. 陰関数定理を用いて、M が点 $(x, y, z) \in M$ の周りで局所的にはある滑らかな関数 $y = y(x, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のグラフとして表されるための (x, y, z) に対する条件を求めよ.

9. M から xy 平面への射影
$$\begin{array}{cccc} \pi_{xy}: & M & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \cup & & \cup \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$
の点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ における逆像を求めよ.

10. 写像 $\pi_{xy} \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の Jacobi 行列および Jaboci 行列式を求めよ.

11. 写像 $\pi_{xy} \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の Jacobi 行列式が消えるような点 (u, v) のなす集合を求めよ．また、その集合の φ による像を求めよ.

幾何学基礎 1 演義

問題 10.1. 正数 p, q に対して広義積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

は収束することを示せ．これを **Euler の** B **関数**と呼ぶ.

問題 10.2. 正数 s に対し広義積分

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

は収束することを示せ．これを **Euler の** Γ **関数**と呼ぶ.

問題 10.3. 広義積分

$$S = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}$$

を変数変換

$$x + y = u, \qquad x = uv$$

によって

$$S = \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv$$

と表すことによって、公式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を示せ.

問題 10.4. 正数 p, q, r に対し、3 次元空間内の四面体

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$$

における積分

$$S = \int_K x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}dxdydz$$

を、変数変換

$$x+y+z = \xi,\ y+z = \xi\eta,\ z = \xi\eta\zeta$$

を用いることによって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \xi^{p+q+r-1}(1-\xi)^{s-1}d\xi \int_0^1 \eta^{q+r-1}(1-\eta)^{p-1}d\eta \int_0^1 \zeta^{r-1}(1-\zeta)^{q-1}d\zeta \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)} \end{aligned}$$

と求めよ.

問題 10.5. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ を

$$(v_x(x,y), v_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$$

で定める．原点を中心とする半径 r の円を $C = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\int_C (v_x\,dx + v_y\,dy) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}(-r\sin\theta\cdot(-r\sin\theta\,d\theta) + r\cos\theta\cdot r\cos\theta\,d\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

となる．一方、

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

なので Green の定理が成立しないように見えるが、この理由を説明せよ．

問題 10.6. $\mathbb{R}^3$ 内の半径 r の球を

$$B = \{\boldsymbol{v} = (x, y, z-r) \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{v}| \le r\}$$

とおく時、次の問いに答えよ．

1. 積分

$$\int_B dx\,dy\,dz$$

を計算することによって B の体積 V を求めよ．(ヒント：例えば中心を原点まで平行移動して

$$\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} 2\sqrt{r^2-y^2-z^2}\,dy\,dz$$

を計算せよ．その他に、次項で定義される球座標を用いる方法などもある．)

2. $z < 0$ なる領域が流体で満たされているときに、B に作用する浮力の大きさ F を B の境界に渡る積分によって求めよ．ただし、B の境界の面積要素 $d\mathbf{S}$ に流体が及ぼす力は内向き法線の向きで、大きさは z 座標の絶対値で与えられるとする．(ヒント：まず、球座標によって B の境界の点を

$$\boldsymbol{v} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, -r + r\cos\theta)$$

とおき、この点における内向き単位法線ベクトルを求めよ．この単位法線ベクトルと $(0,0,z)$ の内積がその点において流体が B に及ぼす力の z 成分である．対称性から B に働く力は z 成分しか持たないことに注意すると、この量を B の境界に渡って積分すれば求める浮力の大きさを得る．)

3. 結果として $F = V$ となる（Archimedes の原理）が、これを Gauss の定理から導け．