幾何学序論演義

問題 1.1. 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 X が開集合であることの定義を述べよ．また、その定義が開集合の公理を満たすことを示せ．

問題 1.2. 実数の集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像が連続であることの、ϵ–δ 論法を用いた定義と開集合を用いた定義が同値であることを示せ．

問題 1.3. 連結な位相空間の連続写像による像が連結であることを示せ．また、この事から中間値の定理が従うことを示せ．

問題 1.4. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像の像がコンパクトであることを示せ．また、この事から最大値の定理が従うことを示せ．

問題 1.5. 弧状連結な位相空間は連結であることを示せ．また、連結だが弧状連結でない位相空間の例を挙げよ．

問題 1.6. 実数の集合 $\mathbb{R}$ から単位円周

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

への写像 f を $\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(\theta) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$$

で定めるとき、以下の問いに答えよ：

1. f が連続であることを示せ．
2. S^1 が連結かつコンパクトであることを示せ．
3. $\mathbb{R}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を $\theta - \phi$ が整数の時 $\theta \sim \phi$ として定めると、これは同値関係になることを示せ．
4. 上の同値関係 $\sim$ による $\mathbb{R}$ の商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は S^1 と同相であることを示せ．

問題 1.7. $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ 上の同値関係 $\sim$ を、実数 r が存在して $(x, y) = r(x', y')$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ として定めると、この同値関係による $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ の商空間は S^1 と同相になることを示せ．

問題 1.8. $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を、正の実数 r が存在して $(x, y) = r(x', y')$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ として定めると、この同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商空間は Hausdorff にならないことを示せ．

問題 1.9. $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を、実数 r と r' が存在して $r(x, y) = r'(x', y')$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ として定めると、この同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商空間は一点からなる空間と同相であることを示せ．

幾何学序論演義

問題 2.1. 多様体は Euclid 空間の開集合を同相写像で張り合わせることによって定義されるが、ここで開集合ではなく閉集合を使うと条件としては強くなるか、弱くなるか、それとも同値になるかを答えよ.

問題 2.2. 一点からなる位相空間は多様体であることを示せ.

問題 2.3. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は多様体であることを示せ.

問題 2.4. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は多様体ではないことを示せ.

問題 2.5. 実数の集合 $\mathbb{R}$ は多様体であることを示せ.

問題 2.6. 実数の集合 $\mathbb{R}$ を $|x| > 1$ かつ $y = -x$ なら $x \sim y$ なる同値関係で割った商空間は、Hausdorff 性を除く多様体の公理を全て満たすことを示せ.

問題 2.7. 実数の集合 $\mathbb{R}$ を $|x| \geq 1$ かつ $y = -x$ なら $x \sim y$ なる同値関係で割った商空間は、Hausdorff だが位相多様体ではないことを示せ.

問題 2.8. 2 次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

は多様体であることを示せ.

問題 2.9. 2 次元球面 S^2 は一つの座標近傍では覆えない (すなわち、Euclid 空間のどんな開集合とも同相にならない) ことを示せ.

問題 2.10. 2 次元円盤

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

は多様体ではないことを示せ．特に、D^2 と S^2 は同相でない．(実は D^2 は**境界付き位相多様体**というより広いクラスに入る．)

問題 2.11. 2 次元円盤 D^2 を $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1$ なら $(x, y) \sim (x', y')$ なる同値関係で割った商空間は S^2 と同相であることを示せ.

問題 2.12. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相ではないことを示せ.

問題 2.13. 次元の異なる Euclid 空間は同相ではないことを示せ.

問題 2.14. 連結な多様体は弧状連結であることを示せ.

問題 2.15. 連結な多様体に対し、次元が意味を持って定まることを示せ.

問題 2.16. $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ or } y = z = 0\}$$

は多様体ではないことを示せ.

幾何学序論演義

問題 3.1. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

で定義するとき、次の問いに答えよ：

1. f は連続であることを示せ.
2. f は全微分可能であることを示せ.
3. 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ と $r > 0$ に対し

   $$f(rx, ry) = f(x,y)$$

   となることを示せ.
4. f の最大値と最小値を求めよ.
5. f を連続な関数 $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に拡張することは出来ないことを示せ.
6. f のグラフを描け.

問題 3.2. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = |x|$ で定義し、この関数のグラフを

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

とおく. x 射影 $\pi : \Gamma \to \mathbb{R}$ を $(x,y) \in \Gamma$ に対し

$$\pi(x,y) = x$$

で定義する時、次の問いに答えよ：

1. π は同相写像であり、Γ に可微分多様体の構造を定めることを示せ.
2. 関数 $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ を $(x,y) \in \Gamma$ に対し

   $$g(x,y) = xy$$

   で定義すると、g は微分可能であることを示せ.
3. 埋め込み写像 $\iota : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ を $(x,y) \in \Gamma$ に対し

   $$\iota(x,y) = (x,y)$$

   で定義すると、ι は微分不可能であることを示せ.
4. 埋め込み写像 $\iota : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ を微分可能にするような Γ の微分構造を一つ与えよ.

幾何学序論演義

問題 4.1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

で定義すると、この関数は C^∞ 級になることを示せ.

問題 4.2. 任意の実数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ に対し、ある C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\frac{d^n}{dx^n} f(0) = a_n$$

が成り立つことを示せ.

問題 4.3. C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ で

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 2, \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

を満たすものが存在することを示せ.

問題 4.4. $\mathbb{R}^n$ の任意の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^m$ に対し、ある C^∞ 関数の組 $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ で

$$\varphi_i(x) = 0, \qquad \text{if } x \notin U_i$$

かつ

$$\sum_{i=1}^m \varphi(x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

を満たすものが存在することを示せ.

問題 4.5. 逆関数定理を用いて、写像

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \cup & & \cup \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2(xz + y^2)y - (xz + y^2)^2 z \\ y + (xz + y^2)z \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

は逆写像を持つことを示せ.

幾何学序論演義

問題 5.1. 0 と 2 のみからなる 3 進小数展開を持つような 0 以上 1 以下の実数のなす集合を **Cantor 集合**と呼ぶ．この集合について、次の性質を示せ：

1. 閉集合である．
2. コンパクトである．
3. Hausdorff 空間である．
4. 粗 (nowhere dense) である (すなわち、内点を持たない)．
5. 孤立点を持たない．
6. 非可算である．
7. 完全不連結 (totally disconnected) である (すなわち、非自明な連結部分集合を持たない)．
8. 離散位相空間 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の可算無限直積空間 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \cdots$ と同相である．
9. 多様体の構造を持たない．

問題 5.2. Hausdorff 空間 $(G, \mathcal{O})$ が群の構造を持ち、積を与える写像 $G \times G \to G$ と逆元を与える写像 $G \to G$ が連続写像であるとき、$(G, \mathcal{O})$ を**位相群 (topological group)** と呼ぶ．$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の可算無限直積空間 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \cdots$ には加法によって自然な群構造が入り、多様体の構造を持たない位相群の例を与えることを示せ．

問題 5.3. 多様体の構造を持つ位相群を Lie 群と呼ぶが、$\mathbb{R}$ に加法によって群構造を定めたものは Lie 群になることを示せ．

問題 5.4. 連続写像

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

が加法を保つ、すなわち任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

を満たすとき、f は滑らかになることを示せ．

問題 5.5. 複素平面上の単位円周

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

に積で群構造を定めたものは Lie 群になることを示せ．

問題 5.6. $\mathbb{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

に $\mathbb{R}$ 上の結合代数の構造を

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

で入れたものを **4 元数体 (quaternion algebra)** と呼ぶ.

1. 基底 i, j, k の掛け算の表を与えよ.
2. 任意の 0 でない元 $x \in \mathbb{H}$ に対し、ある $y \in \mathbb{H}$ が存在して $xy = yx = 1$ が成り立つ事を示せ.
3. $\mathbb{C} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i$ は $\mathbb{H}$ の部分体であり、$\mathbb{H}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合代数になることを示せ.
4. $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対して $\overline{x} = a - bi - cj - dk$ とおくと、任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対し
$$\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$$
となる事を示せ.
5. $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対して $|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおくと、
$$|x|^2 = x\overline{x}$$
となる事を示せ.
6. 任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対して
$$|xy| = |x||y|$$
となることを示せ.
7. 長さが 1 の 4 元数の集合
$$S^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$$
は 4 元数の積によって群の構造を持つことを示せ.
8. S^3 は位相群の構造を持つことを示せ.
9. S^3 は連結であることを示せ.
10. S^3 はコンパクトであることを示せ.
11. $S^1 = S^3 \cap \mathbb{C}$ は S^3 の部分群であることを示せ.
12. S^1 は S^3 の正規部分群ではないことを示せ.

問題 5.7. 4 元数体 $\mathbb{H}$ の元 x に対し、x の実部 $\mathfrak{Re}\, x$ を

$$\mathfrak{Re}\, x = \frac{x+\overline{x}}{2}$$

で定め、$\mathbb{H}$ の実 3 次元部分空間 $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ を

$$\mathfrak{Im}\,\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{H} \mid \mathfrak{Re}\, x = 0\}$$

とおく．ここで写像

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \times \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \to \mathbb{R}$$

を $x, y \in \mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ に対して

$$\langle x, y \rangle = \mathfrak{Re}(\overline{x}y)$$

で定めると、これは $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ の内積になる事を示せ.

問題 5.8. 4 元数体 $\mathbb{H}$ から $\mathbb{H}$ への写像 ϕ を、$x \in \mathbb{H}$ に対して

$$\phi(x) = xi\overline{x}$$

で定義する．この時、次が成り立つことを示せ：

1. S^3 の ϕ による像 $\phi(S^3)$ は $S^2 = \{x \in \mathfrak{Im}\,\mathbb{H} \mid |x|^2 = 1\}$ で与えられる.
2. 任意の $x, y \in \mathbb{H}$ に対し、$\phi(x) = \phi(y)$ であることとある $z \in S^1$ が存在して $x = yz$ となる事は同値である.

従って商空間 S^3/S^1 は S^2 と同相であり、この写像 $\phi : S^3 \to S^2$ を **Hopf のファイバー束**と呼ぶ.

問題 5.9. 2 行 2 列の複素行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = -\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = -1$$

を満たすものを見つけよ.（ヒント：$\mathbb{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の 2 次元ベクトル空間と見て、i, j および k の作用を行列で表示せよ.）

問題 5.10. 問題 5.9 で得られた行列を使って、2 次の特殊ユニタリ群

$$SU(2) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) \mid U^*U = 1 \text{ and } \det U = 1\}$$

が S^3 と群として同型であることを示せ.

問題 5.11. 1 次のシンプレクティック群

$$Sp(1) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) \mid U^*U = 1 \text{ and } g^T J g = J\}$$

が S^3 と群として同型であることを示せ．ただし、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

問題 5.12. $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ の内積を保つ線形自己同型のなす群は、3 次直交群

$$O(3) = \{O \in M_3(\mathbb{R}) \mid O \cdot O^T = \mathrm{id}\}$$

と群として同型であることを示せ．ただし、$M_3(\mathbb{R})$ は 3 行 3 列の実正方行列の集合で、行列 O に対して O^T で O の転置行列を表わす.

問題 5.13. 3 次直交群の元の行列式は ± 1 であることを示せ.

問題 5.14. 3 次特殊直交群を

$$SO(3) = \{O \in O(3) \mid \det O = 1\}$$

で定義すると、これは $O(3)$ の正規部分群であることを示せ.

問題 5.15. 商群 $O(3)/SO(3)$ が 2 次の巡回群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.

問題 5.16. $SO(3)$ の任意の元はある軸を中心とした回転を表わすことを次のようにして示せ.

1. $O \in SO(3)$ とすると、$O^T = O^{-1}$ から $\det(O - \mathrm{id}) = 0$ が従う．（ヒント : $\det(O - \mathrm{id}) = \det(O^T - \mathrm{id})$ を使え．）
2. 任意の $O \in SO(3)$ に対してある零でないベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ が存在して、$Ov = v$ となる.
3. O の $\mathbb{R}^3$ への作用は $\mathbb{R}v$ を軸とした回転を与える.

問題 5.17. $\mathbb{R}^3$ における任意の回転は、ある $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$ に対して、z 軸の周りに角度 α だけ回転して、これによって回転された座標に関して y 軸の周りに角度 β だけ回転して、さらにこの回転ののち得られる座標に関して z 軸の周りに角度 γ だけ回転することによって得られることを示せ．この角度の組 (α, β, γ) を回転の **Euler 角**と呼ぶ.

問題 5.18. 絶対値が 1 の 4 元数 $g \in S^3$ に対し写像 $\rho(g) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$\rho(g)(x) = gx\overline{g}$$

で定義すると、これは $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ の元を $\mathfrak{Im}\,\mathbb{H}$ に移し、内積 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ を保つことを示せ．従って、ρ は S^3 から $O(3)$ への写像になる.

問題 5.19. 3 次直交群 $O(3)$ が連結ではないことを示せ.

問題 5.20. 3 次特殊直交群 $SO(3)$ が弧状連結であることを示せ.

問題 5.21. 問題 5.18 で与えられた写像 $\rho : S^3 \to O(3)$ の像は $SO(3)$ であることを示せ.

問題 5.22. 位相群の同型 $S^3/\{\pm 1\} \cong SO(3)$ を示せ.

幾何学序論演義

問題 6.1. 2 次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の 1 点コンパクト化と同相であることを示せ．ただし、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の 1 点コンパクト化は集合 $X \cup \{\infty\}$ に位相

$$\mathcal{O} \cup \{U \cup \{\infty\} \mid X \setminus U \text{ は } X \text{ のコンパクト集合}\}$$

を入れたものとして定義される.

問題 6.2. S^2 から xy 平面への射影

$$\begin{array}{rccc} \pi: & S^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

は S^2 の自然な微分構造に関して微分可能かどうかを答えよ．また、この射影の像と、像の各点における逆像を求めよ.

問題 6.3. 2 次元球面 S^2 から x 軸への射影

$$\begin{array}{rccc} \pi: & S^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y, z) & \mapsto & x \end{array}$$

の像と、像の各点における逆像を求めよ.

問題 6.4. 3 次元球面

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の 1 点コンパクト化と同相であることを示せ.

問題 6.5. 3 次元球面 S^3 は自然に多様体の構造を持つことを示せ.

問題 6.6. 3 次元球面 S^3 から xy 平面への射影

$$\begin{array}{rccc} \pi: & S^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y, z, w) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

の像と、像の各点における逆像を求めよ.

問題 6.7. 3 次元球面 S^3 から x 軸への射影

$$\begin{array}{cccc} \pi : & S^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \Cup & & \Cup \\ & (x, y, z, w) & \mapsto & x \end{array}$$

の像と、像の各点における逆像を求めよ.

問題 6.8. 3 次元球面 S^3 から $\mathbb{R}$ への写像

$$\begin{array}{cccc} \pi : & S^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \Cup & & \Cup \\ & (x, y, z, w) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

の像と、像の各点における逆像を求めよ.

問題 6.9. n を自然数とし、$n + 1$ 次元 Euclid 空間から原点を除いた集合 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を、ある実数 r が存在して $x = ry$ となるとき $x \sim y$ として定義すると、これは同値関係になることを示せ. この同値関係による商空間

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

を n 次元の**実射影空間 (real projective space)** と呼び、点 $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の代表する同値類を $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{RP}^n$ で表す. 特に、1 次元の実射影空間は**実射影直線 (real projective line)**、2 次元の実射影空間は**実射影平面 (real projective plane)** と呼ばれる.

問題 6.10. 実射影直線は S^1 と同相であることを示せ.

問題 6.11. 2 次元球面 S^2 から実射影平面への連続な全射が存在することを示せ.

問題 6.12. 実射影平面はコンパクトかつ連結な位相空間であることを示せ.

問題 6.13. 実射影平面の部分集合

$$U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_0 \neq 0\}$$

は開集合であり、写像

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0 : & U_0 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \Cup & & \Cup \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & (x_1/x_0, x_2/x_0) \end{array}$$

は同相写像であることを示せ.

問題 6.14. 実射影平面は多様体の構造を持つことを示せ.

問題 6.15. $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して

$$\ell = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^2 \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$$

とおくと、これは $\mathbb{RP}^1$ と同相な $\mathbb{RP}^2$ の部分集合を与えることを示せ．このような ℓ を $\mathbb{RP}^2$ 上の**直線 (line)** と呼ぶ．

問題 6.16. $\mathbb{RP}^2$ 上の相異なる 2 点 P と Q に対して、それらを通る直線 $\overline{PQ}$ がただ一つ存在することを示せ．

問題 6.17. $\mathbb{RP}^2$ 上の相異なる 2 直線 ℓ と m に対して、それらの交点 $\ell \cap m$ がただ一つ存在することを示せ．

問題 6.18 (Desargues の定理)**.**

- 同一直線上にない 3 点からなる集合 $\{A, B, C\}$ を**三角形 (triangle)** と呼び、$\triangle ABC$ で表す．
- $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ に対し、ある直線 ℓ が存在して

$$\overline{AB} \cap \overline{A'B'} \in \ell, \quad \overline{BC} \cap \overline{B'C'} \in \ell, \quad \overline{CA} \cap \overline{C'A'} \in \ell$$

  となるとき、これらの三角形は**軸配景である (axially in perspective)** と言う．
- $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ に対し、ある点 O が存在して

$$A' \in \overline{OA}, \quad B' \in \overline{OB}, \quad C' \in \overline{OC}$$

  となるとき、これらの三角形は**中心配景である (centrally in perspective)** と言う．

この時 $\mathbb{RP}^2$ 上の三角形に対して、軸背景であることと中心背景であることは同値であることを示せ．

問題 6.19. n を自然数とし、$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を、ある $r \in \mathbb{C}$ が存在して $x = ry$ となるとき $x \sim y$ として定義すると、これは同値関係になることを示せ．この同値関係による商空間

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$$

を n 次元の**複素射影空間 (complex projective space)** と呼び、点 $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の代表する同値類を $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{CP}^n$ で表す．特に、1 次元の複素射影空間は**複素射影直線 (complex projective line)**、2 次元の複素射影空間は**複素射影平面 (complex projective plane)** と呼ばれる．

問題 6.20. 複素射影直線は S^2 と同相であることを示せ．

問題 6.21. 5 次元球面 S^5 から複素射影平面への連続な全射が存在することを示せ．

問題 6.22. 複素射影平面はコンパクトかつ連結な位相空間であることを示せ.

問題 6.23. 複素射影平面の部分集合

$$U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid x_0 \neq 0\}$$

は開集合であり、写像

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0 : & U_0 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & (x_1/x_0, x_2/x_0) \end{array}$$

は同相写像であることを示せ.

問題 6.24. 複素射影平面は多様体の構造を持つことを示せ.

問題 6.25. $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ に対して

$$\ell = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$$

とおくと、これは $\mathbb{CP}^1$ と同相な $\mathbb{CP}^2$ の部分集合を与えることを示せ. このような ℓ を $\mathbb{CP}^2$ 上の**直線 (line)** と呼ぶ.

問題 6.26. $\mathbb{CP}^2$ 上の相異なる 2 点 P と Q に対して、それらを通る直線 $\overline{PQ}$ がただ一つ存在することを示せ.

問題 6.27. $\mathbb{CP}^2$ 上の相異なる 2 直線 ℓ と m に対して、それらの交点 $\ell \cap m$ がただ一つ存在することを示せ.

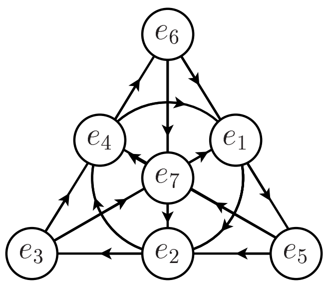
問題 6.28 (Desargues の定理)**.** $\mathbb{CP}^2$ 上の三角形に対し、軸背景であることと中心背景であることは同値であることを示せ.

問題 6.29. 次の公理を満たす点の集合 $\mathbb{P}$ と直線の集合 $\mathbb{P}^* \subset 2^{\mathbb{P}}$ の組を**射影平面 (projective plane)** と呼ぶ：

- 任意の相異なる 2 点に対して、それを通る直線がただ 1 つ存在する.
- 任意の相異なる 2 直線に対し、その交点がただ 1 つ存在する.
- 4 点からなる集合で、そのうちのどの 3 点も同一直線上に無いものが存在する.

この時、次を示せ：

1. 任意の直線は少なくとも 3 点を通る.
2. 実射影平面は射影平面である.
3. 複素射影平面は射影平面である.
4. 右図で定義される **Fano 平面**は射影平面である.



幾何学序論演義

問題 7.1. 写像 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

で定める時、次の問に答えよ：

1. 写像 γ は滑らかであることを示せ.
2. 写像 γ は正則曲線である (つまり、速度ベクトル $\dot{\gamma}(t) = \dfrac{d\gamma}{dt}$ がどこでも零にならない) ことを示せ.
3. 写像 γ の像が単位円周

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

   であることを示せ.
4. S^1 上の点 $\gamma(t)$ における γ の速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ は S^1 に接することを示せ.

問題 7.2. 写像 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) = (\sin 2t \cos t, \sin 2t \sin t)$$

で定める時、次の問に答えよ：

1. 写像 γ は滑らかであることを示せ.
2. 写像 γ は正則曲線であることを示せ.
3. 写像 γ の像が四葉曲線 (quadrifolium)

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2\}$$

   で与えられることを示し、その概形を描け.

問題 7.3. 写像 $\gamma : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

で定める時、次の問に答えよ：

1. 写像 γ は滑らかであることを示せ.
2. 写像 γ は正則曲線であることを示せ.

3. 写像 γ の像がデカルトの正葉線 (folium of Descartes)

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = 3xy\}$$

で与えられることを示し、その概形を描け.

問題 7.4. 写像 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

で定める時、次の問に答えよ：

1. 写像 γ は滑らかであることを示せ.
2. 写像 γ は原点を除けば正則曲線であることを示せ.
3. 写像 γ の像の定義多項式を求め、その概形を描け.

問題 7.5. 写像 $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$ を

$$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1 + t^2}),$$
$$\gamma_2(t) = (\sinh t, \cosh t)$$

で定める時、次の問に答えよ：

1. 写像 γ_i は滑らかであることを示せ.
2. 写像 γ_i は正則曲線であることを示せ.
3. 写像 γ_i の像が双曲線の連結成分

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = -1,\ y > 0\}$$

で与えられることを示せ.

4. 双曲線 C 上の任意の点において、γ_1 の接ベクトルと γ_2 の接ベクトルが比例することを示せ.

問題 7.6. 次の曲線の像を描け.

1. 心臓形 (cardioid):

$$\gamma(t) = ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t).$$

2. 懸垂曲線 (catenary):

$$\gamma(t) = (t, \cosh t).$$

3. サイクロイド (cycloid):

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

4. レムニスケート (lemniscate):

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t + 1}, \frac{\sqrt{2}\sin t \cos t}{\sin^2 t + 1} \right).$$

5. コンコイド (conchoid):

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, \tan t + \sin t).$$

6. 星芒形 (asteroid):

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

問題 7.7. $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面を

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とし、$\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする時、次の問いに答えよ:

1. S^2 の局所座標 (θ, ϕ) を

$$x = \sin\theta\cos\phi,$$
$$y = \sin\theta\sin\phi,$$
$$z = \cos\theta$$

で定義するとき、

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_3$$

と

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\partial x}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_3$$

を求め、それぞれ θ 軸、ϕ 軸と接することを示せ.

2. S^2 の別の局所座標 (u, v) を

$$x = u,$$
$$y = v,$$
$$z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

で定義するとき、

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{e}_3$$

と

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{e}_3$$

を求め、それぞれ u 軸、v 軸と接することを示せ.

3. $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ と $\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ を $\dfrac{\partial}{\partial u}$ および $\dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表せ.

4. 滑らかな関数 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対し、ベクトル値関数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \cup & & \cup \\ (x,y,z) & \mapsto & \dfrac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 \end{array}$$

を F の**勾配 (gradient)** と言い、$\mathbf{grad}\,F$ で表す. S^2 の定義多項式

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$$

の勾配 $\mathbf{grad}\,F$ を計算し、S^2 上の任意の点において、その点での接ベクトル $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ と $\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ が $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積に関して $\mathbf{grad}\,F$ と直交する (すなわち

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\mathbf{grad}\,F=\frac{\partial}{\partial\phi}\cdot\mathbf{grad}\,F=0$$

となる) ことを示せ.

5. より一般に、$\mathbf{grad}\,F$ は $F=$ (一定) で定義される $\mathbb{R}^3$ 内の曲面の法線ベクトルを与えることを示せ.

問題 7.8. 次の写像

$$\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

の像が $F(x,y,z)=0$ で定義される曲面に含まれることを示せ. また、$\dfrac{\partial}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial}{\partial v}$ を求め、それらが $\mathbf{grad}\,F$ と直交する事を確認せよ. さらに、この曲面の概形を書け.

1. 楕円面 (ellipsoid):

$$\phi(u,v)=(a\cos u\cos v,b\cos u\sin v,c\sin u),$$

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$$

2. 一葉双曲面 (hyperoboloid of one sheet):

$$\phi(u,v)=(a\cosh u\cos v,b\cosh u\sin v,c\sinh u),$$

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1.$$

3. 二葉双曲面 (hyperboloid of two sheets):

$$\phi(u,v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u),$$

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1.$$

4. 楕円放物面 (elliptic paraboloid):

$$\phi(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right),$$

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z.$$

5. 双曲放物面 (hyperbolic paraboloid):

$$\phi(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right),$$

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z.$$

問題 7.9. 次の写像 ϕ は $\mathbb{R}^2$ の適当な部分多様体から $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを定めることを示せ．また、その像の概形を描け．

1. 輪環面 (torus):

$$\phi(u,v) = ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u).$$

2. 常螺旋面 (right helicoid):

$$\phi(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

3. カテノイド (catenoid):

$$\phi(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v).$$

4. Scherk 曲面:

$$\phi(u,v) = \left(u, v, \log\left(\frac{\cos v}{\cos u}\right)\right).$$

5. Enneper 曲面:

$$\phi(u,v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2 v, 3(u^2 - v^2)).$$