2007年10月5日

幾何学2演義

問題 1.1. 5つの正多面体に対し、辺の数、面の数および頂点の数を求めよ.

問題 1.2. 5つの正多面体に対し、2π から各頂点に集まっている角の和を引いたものの和を計算せよ.

(ヒント：例えば正四面体の場合には頂点の数が4、各頂点に集まっている角の数が3、正三角形の角の大きさが $\pi/3$ なので、

$$4 \times (2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3}) = 4\pi$$

となる．)

注意 1.1. 任意の多面体に対し、2π から頂点に集まっている角の和を引いたものを全ての頂点に渡って足し上げたものは 4π になる.

問題 1.3. サッカーボールは正五角形と正六角形からできており、各頂点に正五角形1つと正六角形2つが集まっている．この事実と注意1.1を使って、サッカーボールを作るのに必要な正五角形と正六角形の個数を求めよ.

問題 1.4. 各頂点に正五角形が2つと正六角形1つが集まっているような多面体は存在しないことを示せ.

問題 1.5. 平行四辺形の対辺を同一視して得られる閉曲面（あるいはこれに同相な曲面）をトーラスと呼ぶが、正六角形の対辺を同一視して得られる閉曲面はトーラスであることを示せ.

問題 1.6. トーラスの多角形分割に対し常に

$$(\text{面の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{頂点の数}) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 1.7. トーラスの任意の多角形分割と、その平面への任意の展開図を考える．この展開図の境界にある頂点に対しその重複度を、組み立てるときに重なり合う頂点の個数として定義する．例えば、四角形の対辺を同一視してトーラスをつくる場合には、展開図である四角形の全ての頂点の重複度は4になり、六角形の対辺を同一視してトーラスをつくる場合には展開図である六角形の全ての頂点の重複度は3になる.

さて、この状況で常に次のいずれかが成り立つことを示せ：

1. 重複度が4の頂点が4つだけあり、その他の頂点の重複度は2以下である.
2. 重複度が3の頂点が6つだけあり、その他の頂点の重複度は2以下である.

(ヒント：重複度が n の頂点の数を a_n とおくと、

$$1 - \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{2} + \sum_{n \geq 3} \frac{a_n}{n} = 0$$

となることを示せ．)

2007年10月12日

幾何学2演義

定義 2.1. $\mathbb{R}$ を実数の集合、$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を単位円周とする.

定義 2.2. f と g を位相空間 X から位相空間 Y への連続写像とする．閉区間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ と X との直積空間 $X \times [0,1]$ から Y への連続写像

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

で、任意の $x \in X$ に対して

$$F(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = g(x)$$

を満たすものが存在するとき、f と g は**ホモトピック (homotopic)** であるという.

問題 2.1. 写像 S^1 から $\mathbb{R}$ への連続写像 f を

$$f(x,y) = x$$

で定義すると、これは任意の $(x,y) \in S^1$ に対し

$$f(x,y) = 0$$

で定まる連続写像とホモトピックであることを示せ.

問題 2.2. $\mathbb{R}$ から S^1 への連続写像 f を

$$f(x) = (\cos x, \sin x)$$

で定義すると、これは任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$g(x) = (1,0)$$

で定まる連続写像とホモトピックであることを示せ.

定義 2.3. 位相空間 X,Y の間の連続写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to X$ で、$g \circ f$ が X の恒等写像に、$f \circ g$ が Y の恒等写像にそれぞれホモトピックでようなものが存在するとき、X と Y は**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** であるという.

問題 2.3. 同相な位相空間はホモトピー同値であることを示せ.

問題 2.4. $\mathbb{R}$ は一点とホモトピー同値であることを示せ.

問題 2.5. X, Y, Z を位相空間とする．X と Y がホモトピー同値なら、$X \times Z$ と $Y \times Z$ はホモトピー同値であることを示せ.

問題 2.6. 任意の自然数 m と n に対し、$\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ はホモトピー同値であることを示せ.

定義 2.4. X を位相空間、A をその部分空間、$\iota : A \to X$ を埋め込み写像とする．連続な写像 $r : X \to A$ が**レトラクション (retraction)** であるとは、$r \circ \iota : A \to A$ が A の恒等写像であることを指す．さらに、$\iota \circ r : X \to X$ が X の恒等写像とホモトピックであるとき、r を X から A への**変位レトラクション (deformation retraction)** と呼ぶ.

問題 2.7. $X = S^1$, $A = \{(1,0)\} \subset X$ とおく．このとき、任意の $(x,y) \in S^1$ に対し

$$r(x,y) = (1,0)$$

で定まる写像 $r : X \to A$ はレトラクションである事を示せ.

注意 2.5. 上の例では r は変位レトラクションではない.

問題 2.8. $X = \mathbb{R}$, $A = \{0\} \subset X$ とおくとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$r(x) = 0$$

で定まる写像 $r : X \to A$ は X から A への変位レトラクションであることを示せ.

問題 2.9. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $A = S^1 \subset X$ とおく．この時、

$$r(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$$

で定義される写像 $r : X \to A$ は X から A への変位レトラクションであることを示せ.

2007年10月19日

幾何学2演義

定義 3.1. 自然数 n に対し、n 単体 Δ_n および n 立方体 $\square_n$ を

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x_0+\cdots+x_n=1 \text{ and } x_i\geq 0 \text{ for } 0\leq i\leq n\},\\ \square_n &= \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n} \mid 0\leq x_i\leq 1 \text{ for } 1\leq i\leq n\}\end{aligned}$$

で定義する．また、$n+1$ 個の元からなる全順序集合を $[n]$ で表わす.

問題 3.1. 1単体、2単体および3単体の図を描け.

問題 3.2. 4単体の境界は5つの3単体を境界に沿って貼り合わせて得られることを示せ.

問題 3.3. 4単体の境界は3次元球面 S^3 と同相であることを示せ.

問題 3.4. n を自然数とするとき、$n+1$ 単体の境界は n 次元球面 S^n と同相であることを示せ.

問題 3.5. 4単体の境界に現れる0単体、1単体及び2単体の個数を求めよ.

問題 3.6. n および k を自然数とする時、n 単体に現れる k 単体のなす集合は、$[k]$ から $[n]$ への単調増加関数のなす集合と自然な1対1対応を持つことを示せ.

問題 3.7. n を自然数とするとき、$n+1$ 単体の境界の Euler 数

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n+1\text{ 単体の境界に現れる }k\text{ 単体の個数})$$

を求めよ.

問題 3.8. n を自然数とするとき、$n+1$ 立方体の境界の Euler 数

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n+1\text{ 立方体の境界に現れる }k\text{ 立方体の個数})$$

を求めよ.

問題 3.9. n を自然数とするとき、n 立方体の対面を同一視することによって n 次元トーラス $T^n=(S^1)^n$ が得られることを示せ.

問題 3.10. n を自然数とするとき、n 次元トーラス T^n の Euler 数

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(T^n\text{ に現れる }k\text{ 立方体の個数})$$

を求めよ.

定義 3.2. 単体の集合 $\mathcal{K}$ が次の 2 つの条件を満たすとき、**単体複体 (simplicial complex)** と呼ばれる：

1. $\mathcal{K}$ に含まれる任意の単体の面は再び $\mathcal{K}$ に含まれる.
2. $\mathcal{K}$ に含まれる任意の 2 つの単体の共通部分は再び $\mathcal{K}$ に含まれる単体になる.

位相空間に対し、それと同相な単体的複体を構成することを**単体分割**と呼ぶ.

問題 3.11. 2 つの 1 単体を重心で貼り合わせて出来る "X" 字型の位相空間を X とおく.

1. X は単体複体ではないことを示せ.
2. X を単体分割せよ.

問題 3.12. 1 次元球面 S^1 を単体分割せよ.

問題 3.13. $\mathbb{R}$ を単体分割せよ.

問題 3.14. 2 次元球面 S^2 を単体分割せよ.

問題 3.15. 2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ を単体分割せよ.

問題 3.16. $\mathbb{R}^2$ を単体分割せよ.

問題 3.17. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を単体分割せよ.

問題 3.18. 単位閉円盤 $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を単体分割せよ.

問題 3.19. 単位開円盤 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ を単体分割せよ.

問題 3.20. 曲面 M が有限個の単体からなる単体分割を持つための必要十分条件は、M がコンパクトであることを示せ.

問題 3.21. 3 次元球面 S^3 を単体分割せよ.

問題 3.22. 3 次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ を単体分割せよ.

問題 3.23. $\mathbb{R}^3$ を単体分割せよ.

問題 3.24. n を自然数とするとき、$\mathbb{R}^n$ を単体分割せよ.

問題 3.25. n を自然数とするとき、n 次元球面 S^n を単体分割せよ.

問題 3.26. 単体分割できない位相空間の例を挙げよ.

2007年10月26日

幾何学2演義

定義 4.1. 環 R 上の加群とその間の準同型写像の列

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

で、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $d_{i+1} \circ d_i = 0$ を満たすものを R 加群の**複体**と呼ぶ．このような複体を $(M_\bullet, d_\bullet)$ や $(M_\bullet, d)$、あるいはさらに d も省略して $M_\bullet$ と書くこともある．

問題 4.1. 環 R 上の加群の複体 $(M_\bullet, d)$ が与えられたとき、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Im}(d_{i+1})$ が $\mathrm{Ker}(d_i)$ の部分加群であることを示せ．この時、商加群 $\mathrm{Ker}(d_i)/\mathrm{Im}(d_{i+1})$ を複体 $(M_\bullet, d)$ の i 次の**ホモロジー (homology)** といい、$H_i(M_\bullet, d)$ で表わす．

定義 4.2. 複体 $(M_\bullet, d)$ は、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $H_i(M_\bullet, d) = 0$ を満たすとき**完全 (exact)** であるという．

問題 4.2. 体 k 上の加群の複体 $(M_\bullet, d)$ で

$$\dim \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \right) < \infty$$

となるようなものに対し、

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim M_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i(M_\bullet, d)$$

が成り立つことを示せ．

問題 4.3. $\mathbb{Z}$ 上の加群の複体 $(M_\bullet, d)$ で、$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ が有限生成であるようなものに対し、

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{rank} M_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{rank} H^i(M_\bullet, d)$$

が成り立つことを示せ．

問題 4.4. R 加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \phi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_2}\big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_3}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

において、2つの行がどちらも完全であるとき、完全列

$$0 \to \operatorname{Ker} \phi_1 \to \operatorname{Ker} \phi_2 \to \operatorname{Ker} \phi_3 \to \operatorname{Coker} \phi_1 \to \operatorname{Coker} \phi_2 \to \operatorname{Coker} \phi_3 \to 0$$

が存在することを示せ．

定義 4.3. 単体複体 $\mathcal{K}$ が与えられたとき、$\mathcal{K}$ に含まれる i 単体の集合を基底とする自由アーベル群を $C_i(\mathcal{K})$ とおき、i 単体に対してその境界を対応させる写像を

$$\partial_i : C_i(\mathcal{K}) \to C_{i-1}(\mathcal{K})$$

とおく．例えば、1 単体 $\Delta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \leq 0 \text{ and } x + y = 1\}$ に対しては、

$$\partial_1 \Delta_1 = \{(0,1)\} - \{(1,0)\}$$

となる．

問題 4.5.

$$\Delta_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \text{ and } x + y + z = 1\}$$

を 2 単体とし、その辺を

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in \Delta_2 \mid x = 0\}, \\ E_2 &= \{(x,y,z) \in \Delta_2 \mid y = 0\}, \\ E_3 &= \{(x,y,z) \in \Delta_2 \mid z = 0\}, \end{aligned}$$

頂点を

$$V_1 = (1,0,0), \quad V_2 = (0,1,0), \quad V_3 = (0,0,1)$$

とおく．この時、単体複体 $\mathcal{K}_2 = \{\Delta_2, E_1, E_2, E_3, V_1, V_2, V_3\}$ の境界写像

$$\partial_2 : \mathbb{Z}\Delta_2 \to \mathbb{Z}E_1 \oplus \mathbb{Z}E_2 \oplus \mathbb{Z}E_3$$

および

$$\partial_1 : \mathbb{Z}E_1 \oplus \mathbb{Z}E_2 \oplus \mathbb{Z}E_3 \to \mathbb{Z}V_1 \oplus \mathbb{Z}V_2 \oplus \mathbb{Z}V_3$$

を具体的に行列で表示せよ．

問題 4.6. 問題 4.5 で与えられた単体複体 $\mathcal{K}_2$ に対し、

$$0 \to C_2(\mathcal{K}_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathcal{K}_1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathcal{K}_2) \to 0$$

は $\mathbb{Z}$ 加群の複体であることを示せ．また、そのホモロジー群 $H^2(\mathcal{K}_2)$、$H^1(\mathcal{K}_2)$ および $H^0(\mathcal{K}_2)$ を求めよ．

問題 4.7. 2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ の単体分割 $\mathcal{K}$ を適当に選び、境界写像 ∂_2 および ∂_1 を行列で表示せよ．この場合も $(C_\bullet(\mathcal{K}), \partial)$ が $\mathbb{Z}$ 加群の複体であることを示し、そのホモロジー群を計算せよ．

問題 4.8. 3 単体 Δ_3 とその境界からなる単体複体を $\mathcal{K}_3$ とおく．$\mathcal{K}_3$ に含まれる単体に適当にラベルを付けて、問題 4.5 と同様に境界写像 ∂_1、∂_2 および ∂_3 を行列で表示せよ．また、$(C_\bullet(\mathcal{K}_3), \partial)$ が $\mathbb{Z}$ 加群の複体であることを示し、そのホモロジー群を計算せよ．

2007 年 11 月 9 日

幾何学 2 演義

定義 5.1. 単体複体 $\mathcal{K}$ から別の単体複体 $\mathcal{L}$ への連続写像は、$\mathcal{K}$ の単体を $\mathcal{L}$ の単体に移すとき**単体写像**と呼ばれる.

問題 5.1. 単体複体 $\mathcal{K}$ から別の単体複体 $\mathcal{L}$ への単体写像 f は、任意の自然数 i に対してアーベル群の間の写像

$$f_* : C_i(\mathcal{K}) \to C_i(\mathcal{L})$$

を定めるが、これがホモロジー群の間の写像（これも同じ記号

$$f_* : H_i(C_\bullet(\mathcal{K}), \partial) \to H_i(C_\bullet(\mathcal{L}), \partial)$$

で表わす）を誘導することを示せ.

定義 5.2. 単体分割 $\mathcal{K}$ を持つ位相空間 X に対し、複体 $(C_\bullet(\mathcal{K}), \partial)$ のホモロジー群は単体分割の取り方に依らないことが知られている. これを X の整係数ホモロジー群と呼び、$H_\bullet(X, \mathbb{Z})$ で表わす. また、位相空間の間の連続写像

$$f : X \to Y$$

はホモロジー群の準同型

$$f_* : H_\bullet(X, \mathbb{Z}) \to H_\bullet(Y, \mathbb{Z})$$

を誘導し、しかも f_* は f のホモトピー類にしか依らないことが知られている.

問題 5.2. $\mathbb{R}^1$ の適当な単体分割を用いて、そのホモロジー群を求めよ.

問題 5.3. $\mathbb{R}^2$ の適当な単体分割を用いて、そのホモロジー群を求めよ.

問題 5.4. S^1 を一点に潰す写像を p とおく時、p が 0 次と 1 次のホモロジー群に誘導する写像 p_* を求めよ.

問題 5.5. S^1 を 2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ の第 1 成分に埋め込む写像を i と置くとき、i が 0 次と 1 次のホモロジー群に誘導する写像 i_* を求めよ.

問題 5.6. 正方形の対辺を同一視して 2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ を作り、S^1 をこの正方形の内部に埋め込む写像を i と置くとき、i が 0 次と 1 次のホモロジー群に誘導する写像 i_* を求めよ.

問題 5.7. 位相空間 X の恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ がホモロジー群に誘導する写像

$$\mathrm{id}_{X*} : H_\bullet(X, \mathbb{Z}) \to H_\bullet(X, \mathbb{Z})$$

は恒等写像であることを示せ.

問題 5.8. ホモトピー同値な位相空間のホモロジー群は等しいことを示せ.

問題 5.9. 問題 2.7 に与えられた S^1 からその上の一点へのレトラクションは変位レトラクションではないことを示せ.

問題 5.10. X を位相空間、A をその部分空間、$\iota : A \to X$ を埋め込み写像、r を X から A へのレトラクションとするとき、任意の自然数 i に対して

$$\iota_* : H_i(A, \mathbb{Z}) \to H_i(X, \mathbb{Z})$$

は単射準同型であることを示せ.

問題 5.11. 任意の自然数 n に対し、n 次元閉円盤

$$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

からそれ自身への連続写像

$$f : D^n \to D^n$$

は必ず不動点を持つ. **Brouwer の不動点定理**と呼ばれるこの主張を次のようにして示せ：

1. 不動点を持たない連続写像 f が存在すると仮定すると、任意の点 $x \in D^n$ に対し、$f(x) \in D^n$ から x へ向かう半直線が

   $$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

   と交わる点を対応させることで、写像

   $$r : D^n \to S^{n-1}$$

   が定まるが、これが D^n から S^{n-1} へのレトラクションを与える.

2. D^n から S^{n-1} へのレトラクションは存在しない.

問題 5.12. 円周 S^1 から $\mathbb{R}$ への単射な連続写像は存在しないことを示せ.

問題 5.13. 円周 S^1 から $\mathbb{R}$ への任意の連続写像 f に対してある点 $x \in S^1$ が存在して、x とその対蹠点 $-x$ が f で同じ点に移ることを示せ.（ヒント：そのような点が存在しないと仮定すると、f から次のようにして写像 $g : S^1 \to \{\pm 1\}$ を定めることができる：

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) > f(-x), \\ -1 & \text{if } f(x) < f(-x). \end{cases}$$

この g が連続であることを示し、矛盾を導け.）

2007年11月16日

幾何学2演義

問題 6.1. 2次元球面 S^2 から円周 S^1 への連続写像で、対蹠点を対蹠点に移す (すなわち、任意の $x \in S^2$ に対して

$$f(-x) = -f(x)$$

を満たす) ものは存在しないことを示せ．(ヒント：S^1 から S^2 の赤道への埋め込みを ι とおくと、$f \circ \iota$ は S^1 から S^1 への連続写像で、対蹠点を対蹠点に移す．$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と見て、$I_1 = [0, 1/2], I_2 = [1/2, 1]$ とおくと、$S^1 = I_1 \cup I_2$ となる．$I_3 = f(I_1), I_4 = f(I_2)$ とおくと、$I_4 = I_3 + 1/2$ となるが、このことから奇整数 n が存在して $(f \circ \iota)_*([S^1]) = n[S^1]$ となり、$H_1(S^2) = 0$ から従う $\iota_*([S^1]) = 0$ に矛盾する．)

注意 6.1. 任意の自然数 m と n に対して、$m > n$ なら S^m から S^n への連続写像で、対蹠点を対蹠点に移すものは存在しない．この事実は **Borsuk–Ulam の定理**と呼ばれる．

問題 6.2. 2次元球面 S^2 から $\mathbb{R}^2$ への任意の連続写像 f に対してある点 $x \in S^2$ が存在して、x とその対蹠点 $-x$ が同じ点に移ることを示せ．(ヒント：そのような点 $x \in S^2$ が存在しないと仮定して、$g : S^2 \to S^1$ を

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

で定義すると、これは対蹠点を対蹠点に移す．)

問題 6.3. $\mathbb{R}^2$ の部分集合で、S^2 と同相なものは存在しないことを示せ．

問題 6.4. S^2 が3つの閉集合 A_1, A_2, A_3 の和集合として表わされているとき、これらの閉集合の少なくとも一つは対蹠点の組 $\{x, -x\}$ を含むことを示せ．(ヒント：連続写像 $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x) = \left(\inf_{y \in A_1} |x - y|, \inf_{y \in A_2} |x - y|\right)$$

で定義すると、Borsuk–Ulam の定理から $f(x) = f(-x)$ となる点 x が存在することを使え.)

問題 6.5. ハムとチーズをパンに挟んだサンドイッチを1つの平面で2つに切って、ハムとチーズとパンの全てをちょうど半分にすることが出来る事を示せ．(ヒント：連続関数 $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義し、$f(x) = f(-x)$ となる点 x を考えよ：点 $x \in S^2$ に対して、$\mathbb{R}^3$ における S^2 の接平面を T_x とおくと、T_x に平行な平面で、パンをちょうど半分に切るものがただ1つ存在する．これを H_x とおくと、これはハムを2つに分割する (ただし、一方は空であることもある)．x における S^2 の外向き法線によってこの2つの切れ端の一方を指定することができるが、この切れ端の体積を $f_1(x)$ とおく．チーズに対しても同様の考察することによって関数 $f_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ が定義されるが、この2つを並べたものが f である．)

2007年12月7日

幾何学2演義

問題 7.1. k を体とするとき、k 上の任意のベクトル空間 V と W の間の任意の線形写像

$$\phi : V \to W$$

に対して準同型定理

$$V/\operatorname{Ker}\phi \cong \operatorname{Im}\phi$$

が成り立つことを示せ.

問題 7.2. k を体とするとき、k 上のベクトル空間の列

$$0 \to V \xrightarrow{\phi} W$$

が完全列であることと、ϕ が単射であることは同値であること示せ.

問題 7.3. k を体とするとき、k 上のベクトル空間の列

$$V \xrightarrow{\phi} W \to 0$$

が完全列であることと、ϕ が全射であることは同値であること示せ.

問題 7.4. k を体とするとき、k 上の任意のベクトル空間 V と W の間の任意の線形写像

$$\phi : V \to W$$

に対して、ベクトル空間の完全列

$$0 \to \operatorname{Ker}\phi \to V \to W \to \operatorname{Coker}\phi \to 0$$

が存在することを示せ.

問題 7.5. 2次元の単体複体 K において、ある2単体 $\sigma \in K$ で、σ の3つの辺 τ_1, τ_2, τ_3 のうち τ_1, τ_2 は σ と異なる2単体 σ_1, σ_2 の辺になっているが、τ_3 は σ 以外の2単体の辺にはなっていないものが存在すると仮定する．この時、K から σ を取り除いて、τ_1 と τ_2 を同一視することによって σ_1 と σ_2 を貼り合わせることによって新しい空間 K' が出来るが、これが K とホモトピー同値であることを示せ．また、K' が単体複体であるとき、そのホモロジー群が K のホモロジー群と同型であることを単体複体のホモロジー群の定義に基づいて証明せよ.

定義 7.1. 自然数 n に対し、S^1 のコピーを n 個用意して、それを一点でくっつけた空間を S^1 の n 個のブーケ（Bouquet）と呼ぶ.

問題 7.6. S^1 の 2 個のブーケを単体分割せよ.

問題 7.7. S^1 の 2 個のブーケのホモロジーを求めよ.

問題 7.8. S^1 の 3 個のブーケを単体分割せよ.

問題 7.9. S^1 の 3 個のブーケのホモロジーを求めよ.

問題 7.10. 集合 $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x\}$ に $\mathbb{C}^2$ の通常の位相から定まる誘導位相を入れたものは 2 次元球面から一点を除いたものと同相であることを示せ.

問題 7.11. 2 次元球面から一点を除いた空間は一点とホモトピー同値であることを示せ.

問題 7.12. 集合 $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 1\}$ に $\mathbb{C}^2$ の通常の位相から定まる誘導位相を入れたものは 2 次元球面から二点を除いたものと同相であることを示せ.

問題 7.13. 2 次元球面から二点を除いた空間は S^1 とホモトピー同値であることを示せ.

問題 7.14. 2 次元球面から 3 点を除いた空間は S^1 の 2 個のブーケとホモトピー同値であることを示せ.

問題 7.15. 正の整数 n に対し、2 次元球面から n 点を除いた空間は S^1 の $n-1$ 個のブーケとホモトピー同値であることを示せ.

問題 7.16. 集合 $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-2)\}$ に $\mathbb{C}^2$ の通常の位相から定まる誘導位相を入れたものは 2 次元トーラスから一点を除いたものと同相であることを示せ.

問題 7.17. 2 次元トーラスから一点を除いた空間は S^1 の 2 個のブーケとホモトピー同値であることを示せ.

問題 7.18. 種数 2 の曲面（二人乗りの浮き輪）から一点を除いた空間は S^1 の 4 個のブーケとホモトピー同値であることを示せ.

問題 7.19. 正の整数 g に対し、種数 g の曲面（g 人乗りの浮き輪）から一点を除いた空間は S^1 の $2g$ 個のブーケとホモトピー同値であることを示せ.

2007年12月21日

幾何学2演義

問題 8.1. 体 k 上のベクトル空間の完全列

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

において、U と W が与えられれば V は線形同型を除いてただ一つに定まることを示せ.

問題 8.2. 体 k 上のベクトル空間の完全列

$$0 \to U_2 \to V_2 \to W_2 \to U_1 \to V_1 \to W_1 \to 0$$

において、U_1, U_2, W_1, W_2 が与えられても一般には V_1, V_2 の線形同型類はただ一つに定まらない事を示せ.

問題 8.3. 上の状況で

$$\dim V_2 - \dim V_1$$

はただ一つに定まることを示せ.

問題 8.4. $\mathbb{Z}$ 加群の列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

が完全になるように写像 ϕ, ψ を定めよ.

問題 8.5. $\mathbb{Z}$ 加群の列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

が完全になるように写像 ϕ, ψ を定めよ.

問題 8.6. $\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

において、L と N を与えても一般には M の同型類はただ一つに定まらないことを示せ.

問題 8.7. 上の状況で、M の階数はただ一つに定まることを示せ.

問題 8.8. $\mathbb{Z}$ 加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\phi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_3}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

において、2つの行がどちらも完全で ϕ_1 と ϕ_3 が同型写像の時、ϕ_2 も同型写像であることを示せ.

定理 8.1 (Mayer–Vietoris 完全列). 複体 K と K の部分複体 K_1, K_2 が

$$K = K_1 \cup K_2$$

を満たすとき、完全列

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_2(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & H_2(K_1) \oplus H_2(K_2) & \longrightarrow & H_2(K_1 \cup K_2) & \\ & \longrightarrow & H_1(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) & \longrightarrow & H_1(K_1 \cup K_2) & \\ & \longrightarrow & H_0(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) & \longrightarrow & H_0(K_1 \cup K_2) & \longrightarrow \quad 0 \end{array}$$

が存在する.

問題 8.9. K を 1 単体 3 つと 0 単体 3 つからなる S^1 の単体分割とし、K_1 を 1 単体 1 つとその境界に現れる 0 単体 2 つからなる K の部分複体、K_2 を隣接する 1 単体 2 つとそれらの境界に現れる 0 単体 3 つからなる K の部分複体とするとき、Mayer-Vietoris 完全列の各項とそれらをつなぐ写像を計算し、確かに完全列を与えていることを示せ.

問題 8.10. K を 2 単体とその境界からなる単体複体、K_1 を K に属する 1 次元以下の単体のなす K の部分複体、$K_2 = K$ とおくとき、Mayer-Vietoris 完全列の各項とそれらをつなぐ写像を計算し、確かに完全列を与えていることを示せ.

問題 8.11. 球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を

$$\begin{aligned} S^2_+ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}, \\ S^2_- &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

によって北半球 S^2_+ と南半球 S^2_- に分け、さらに S^2_+ と S^2_- の単体分割 K_1 と K_2 で、$K_1 \cap K_2$ が赤道 $S^2_+ \cap S^2_-$ の単体分割になっているようなものを取ると、

$$\begin{aligned} H_i(K_1) \cong H_i(K_2) \cong H_i(S^2_+) \cong H_i(S^2_-) \\ \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

かつ

$$H_i(K_1 \cap K_2) \cong H_i(S^2_+ \cap S^2_-) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. これと Mayer–Vietoris 完全列から S^2 のホモロジー群を求めよ.

問題 8.12. 実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ のホモロジー群を求めよ.