幾何学１演義

問題 1.1. 単位円周
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
が連結であることを示せ.

問題 1.2. 単位円周 S^1 がコンパクトであることを示せ.

問題 1.3. $\mathbb{R}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を $\theta - \phi$ が整数の時 $\theta \sim \phi$ として定めると、これは同値関係になることを示せ.

問題 1.4. 上の同値関係 $\sim$ による $\mathbb{R}$ の商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は S^1 と同相であることを示せ.

問題 1.5. $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ 上の同値関係 $\sim$ を、正の実数 r が存在して $(x, y) = r(x', y')$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ として定めると、この同値関係による $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ の商空間は S^1 と同相になることを示せ.

問題 1.6. $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ 上の同値関係 $\sim$ を、実数 r が存在して $(x, y) = r(x', y')$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ として定めると、この同値関係による $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ の商空間は S^1 と同相になることを示せ.

問題 1.7. $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を、正の実数 r が存在して $(x, y) = r(x', y')$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ として定めると、この同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商空間は Hausdorff にならないことを示せ.

問題 1.8. $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を、実数 r と r' が存在して $r(x, y) = r'(x', y')$ となる時 $(x, y) \sim (x', y')$ として定めると、この同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商空間は一点からなる空間と同相であることを示せ.

問題 1.9. 位相多様体の定義を述べよ.

問題 1.10. 一点からなる位相空間は位相多様体であることを示せ.

問題 1.11. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は位相多様体であることを示せ.

問題 1.12. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は位相多様体ではないことを示せ.

問題 1.13. 実数の集合 $\mathbb{R}$ は位相多様体であることを示せ.

問題 1.14. 単位円周 S^1 は位相多様体であることを示せ.

問題 1.15. 実数の集合 $\mathbb{R}$ を $|x| > 1$ かつ $y = -x$ なら $x \sim y$ なる同値関係で割った商空間は、Hausdorff 性を除く位相多様体の公理を全て満たすことを示せ.

問題 1.16. 実数の集合 $\mathbb{R}$ を $|x| \geq 1$ かつ $y = -x$ なら $x \sim y$ なる同値関係で割った商空間は、Hausdorff だが位相多様体ではないことを示せ.

幾何学１演義

問題 2.1. 2 次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

はコンパクトであることを示せ.

問題 2.2. 2 次元球面 S^2 は位相多様体であることを示せ.

問題 2.3. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相ではないことを示せ.

問題 2.4. 2 次元球面 S^2 は一つの座標近傍では覆えない (すなわち、Euclid 空間のどんな開集合とも同相にならない) ことを示せ.

問題 2.5. 2 次元円盤

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

を $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1$ なら $(x, y) \sim (x', y')$ なる同値関係で割った商空間は S^2 と同相であることを示せ.

問題 2.6. 可微分多様体の定義を述べよ。

問題 2.7. 2 次元球面 S^2 が可微分多様体の構造を持つことを示せ。

問題 2.8. 次元の異なる Euclid 空間は可微分同相ではないことを示せ.

問題 2.9. 一葉双曲面

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

のグラフを描け.

問題 2.10. 一葉双曲面 H_1 は連結であることを示せ.

問題 2.11. 一葉双曲面 H_1 はコンパクトではないことを示せ.

問題 2.12. 一葉双曲面 H_1 が可微分多様体の構造を持つことを示せ.

問題 2.13. 二葉双曲面

$$H_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

のグラフを描け.

問題 2.14. 二葉双曲面 H_{-1} は連結でもコンパクトでもないことを示せ.

問題 2.15. 二葉双曲面 H_{-1} が可微分多様体の構造を持つことを示せ.

問題 2.16. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$H_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

のグラフを描け.

問題 2.17. $\mathbb{R}^3$ の部分集合 H_0 は可微分多様体の構造を持たないことを示せ.

幾何学１演義

問題 3.1. **ベクトル束 (vector bundle)** の定義を述べよ.

問題 3.2. 与えられたベクトル束の部分ベクトル束および商ベクトル束の定義を述べよ.

問題 3.3. 共通の底空間 B を持つ 2 つのベクトル束 E_1 と E_2 の間の**射 (morphism of vector bundles)** の定義を述べよ.

問題 3.4. 共通の底空間 B を持つ 2 つのベクトル束 E_1 と E_2 の間の射 $f : E_1 \to E_2$ が与えられた時、f の**核 (kernel)** および**余核 (cokernel)** の定義を述べよ.

問題 3.5. 共通の底空間 B を持つ 2 つのベクトル束 E_1 と E_2 の間の射 $f : E_1 \to E_2$ に対し、f の核が E_1 の部分ベクトル束になること、および f の余核が E_2 の商ベクトル束になることを示せ.

問題 3.6. 共通の底空間 B を持つ 2 つのベクトル束 E_1 と E_2 の間の射が**全射 (surjection)**、**単射 (injection)** および**同型 (isomorphism)** であることの定義を述べよ.

問題 3.7. B を多様体、F を有限次元ベクトル空間とすると、直積空間 $E = B \times F$ には B を底空間、F をファイバーとする自然なベクトル束の構造が入ることを示せ．このようにして得られるベクトル束と同型なベクトル束を**自明なベクトル束 (trivial vector bundle)** と呼ぶ.

問題 3.8. ベクトル束の**切断 (section)** の定義を述べよ.

問題 3.9. 任意のベクトル束には切断が存在することを示せ．(ヒント：任意のベクトル束に対し、**零切断 (zero-section)** と呼ばれる特別な切断が必ず存在する．)

問題 3.10. 自明なベクトル束にはどこでも 0 にならない切断が存在することを示せ.

問題 3.11. 階数 1 のベクトル束が自明になるための必要十分条件は、どこでも 0 にならない切断が存在することである．このことを証明せよ.

問題 3.12. $\widetilde{B} = \mathbb{R}$ を 1 次元のコンパクトでない多様体、$F = \mathbb{R}$ を 1 次元の実ベクトル空間とし、直積 $\widetilde{E} = \widetilde{B} \times F$ に 2 項関係 $\sim$ を、$(b, f), (b', f') \in \widetilde{B} \times \mathbb{R}$ に対し、

- ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在して $b' = b + n$ かつ $f' = (-1)^n f$

となるとき $(b, f) \sim (b', f')$ として定義する.

1. $\sim$ が同値関係であることを示せ.
2. 商空間 $E = \widetilde{E}/\sim$ が自然に多様体の構造を持つことを示せ.
3. 第 1 成分への射影 $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{B}$ が自然に写像 $\pi : E \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を定めることを示せ．ここで、$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は問題 1.4 で与えられた位相空間であり、S^1 と同相である.

4. E は自然に $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のベクトル束の構造を持つことを示せ.

5. E は自明なベクトル束ではないことを示せ.

問題 3.13. 単位円周 S^1 上の階数 1 の任意のベクトル束は、自明なベクトル束と問題 3.12 で与えられたベクトル束のどちらかに同型であることを示せ.

問題 3.14. 滑らかな多様体 M 上の点 p に対し、M の p における接空間 T_pM の定義を述べよ.

問題 3.15. 滑らかな多様体 M の**接束 (tangent bundle)**TM の定義を述べよ.

問題 3.16. 単位円周 S^1 の接束 TS^1 が自明なベクトル束であることを示せ.

問題 3.17. Poincaré-Hopf の定理 (発展問題 : この定理について調べよ) により、2 次元球面 S^2 上のベクトル場で、どこでも零にならないものは存在しないことが分かる. このことから、TS^2 は自明なベクトル束ではないことを示せ.

問題 3.18. 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の接束は自明なベクトル束であることを示せ.

問題 3.19. 滑らかな多様体の間の滑らかな写像 $f : M \to N$ と、N 上のベクトル束 E が与えられた時、点 $x \in M$ 上のファイバーが E の $f(x)$ におけるファイバーで与えられるような M 上のベクトル束 f^*E が定まることを示せ. これを E の f による**引き戻し (pull-back)** と呼ぶ.

問題 3.20. $f : M \to N$ を滑らかな多様体の間の滑らかな写像とし、E を N 上の自明なベクトル束とする. この時、E の f による引き戻し f^*E は M 上の自明なベクトル束になることを示せ.

問題 3.21. 滑らかな多様体の間の滑らかな写像 $f : M \to N$ に対し、f の微分 df は M 上のベクトル束の射 $df : TM \to f^*(TN)$ を与えることを示せ. ここで、TM は M の接束であり、$f^(TN)$ は N の接束 TN の f による引き戻しである.

問題 3.22. $M = \mathbb{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間とする時、TM が自明なベクトル束であることを示せ.（ヒント : 同型写像 $f : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ を作れば良い.）

問題 3.23. 多様体 M が m 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^m$ の部分多様体であれば、TM は階数 m の自明なベクトル束の部分ベクトル束であることを示せ.（ヒント : 埋め込み写像 $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ の微分 $d\iota : TM \to \iota^*(T\mathbb{R}^m) \cong M \times \mathbb{R}^m$ を考えよ.）

問題 3.24. 一葉双曲面

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

の接束が自明なベクトル束になることを示せ.（ヒント : 埋め込み写像 $\iota : H_1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を用いて TH_1 を $\iota^*(T\mathbb{R}^3) \cong H_1 \times \mathbb{R}^3$ の部分ベクトル束として記述した上で、同型写像 $f : TH_1 \to H_1 \times \mathbb{R}^2$ を見つければ良い.）

幾何学1演義

問題 4.1. はめ込み、埋め込み及び沈め込みの定義を述べよ.

問題 4.2. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (t^2, t(t^2-1))$ で定義する．この時、写像 f がはめ込みであることを示し、その像を図示せよ．また、この写像は単射ではないことを示せ.

問題 4.3. 単射なはめ込み $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で、埋め込みではないものの例を挙げよ．(ヒント：例えば $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(0)$ となるような写像を作れば良い．)

定義 4.1. 位相空間の間の写像 $f : X \to Y$ が**局所同相 (local homeomorphism)** であるとは、任意の $x \in X$ に対して x の開近傍 U が存在して、U の像 $V := f(U)$ は Y の開集合であり、f の U への制限 $f|_U : U \to V$ が同相写像であることを指す.

定義 4.2. 位相空間の間の連続な全射 $f : X \to Y$ が**被覆写像 (covering map)** であるとは、任意の $y \in Y$ に対して y の開近傍 U が存在して、f を U の逆像 $f^{-1}(U)$ の任意の連結成分 $V \subset f^{-1}(U)$ に制限したもの $f|_V : V \to U$ が同相写像になることを指す.

定義 4.3. 位相空間の間の写像が**固有 (proper)** であるとは、コンパクト集合の逆像がコンパクトであることを指す.

問題 4.4. 写像 $f : \mathbb{R} \to S^1$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定めると、これは固有ではない被覆写像であることを示せ.

問題 4.5. 写像 $f : S^1 \to S^1$ を $f((\cos t, \sin t)) = (\cos 2t, \sin 2t)$ で定めると、これは固有な被覆写像であることを示せ.

問題 4.6. 写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = z^2$ で定めると、これは固有写像だが被覆写像ではないことを示せ.

問題 4.7. 写像 $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $f(z) = z^2$ で定めると、これは固有な被覆写像であることを示せ．ただし、$\mathbb{C}^\times$ は体 $\mathbb{C}$ の積に関する可逆元全体の集合を指す.

問題 4.8. 写像 $f : (-10, 10) \to S^1$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定めると、これは局所同相な全射であるが、固有写像ではなく、被覆写像でもないことを示せ.

問題 4.9. 写像 $f : [-10, 10] \to S^1$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定めると、これは固有な全射であるが、局所同相ではないことを示せ.

定義 4.4. 位相空間 X が**局所コンパクト (locally compact)** であるとは、任意の $x \in X$ に対して x のコンパクトな近傍 (すなわち、x の開近傍を含むようなコンパクト集合) が存在することを指す.

問題 4.10. 局所コンパクト空間の間の固有写像が局所同相ならば、被覆写像になることを示せ.

定義 4.5. 位相空間の間の写像 $\pi : E \to B$ が局所自明なファイブレーション (locally-trivial fibration) であるとは、任意の $x \in B$ に対して x の開近傍 $U \subset B$ が存在して、

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

を可換にするような同相写像 $\phi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ が存在することを指す．ただし、$F := \pi^{-1}(x)$ は π による x の逆像であり、$p : U \times F \to U$ は第一成分への射影である．

問題 4.11 (Ehresmann のファイブレーション定理)**.** 微分可能多様体の間の固有な全射 $f : M \to N$ が沈め込みであれば、f は局所自明なファイブレーションであることを示せ．

問題 4.12. コンパクト多様体から連結多様体への滑らかな写像 $f : M \to N$ が局所同相であれば、$\#f^{-1}(x)$ は $x \in N$ の取り方に依らない有限の値を取ることを示せ．

問題 4.13. 以下で与えられた $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場を図示し、その生成する**一助変数局所変換 (one-parameter local transformation)** $\phi_t : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ を求めよ (ヒント：ベクトル場 X が

$$X = v_x(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + v_y(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

で与えられている時、その生成する一助変数局所変換は常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y)$$

を解いて得られる)：

1. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$
2. $X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$
3. $X_3 = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$
4. $X_4 = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$
5. $X_5 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$

問題 4.14. 問題 4.13 で与えられたベクトル場たちの間の交換子 $[X_i, X_j]$ を求めよ．また、X_i の生成する一助変数局所変換を ϕ_t^i と置く時、任意の $s, t \in (-\epsilon, \epsilon)$ に対して ϕ_s^i と ϕ_t^j が可換 (すなわち $\phi_s^i \circ \phi_t^j = \phi_t^j \circ \phi_s^i$) になるような i, j の組を求めよ．

幾何学１演義

注意 5.1. 多様体 M の定義には座標 (すなわち M の開集合と Euclid 空間の開集合の同相写像) が必要だが、多様体の性質のうち座標の取り方に依らないものだけが幾何学的に意味のある対象である。そのような対象を記述する方法は大きく分けて 2 つあり、1 つは初めから座標を使わないで記述すること、もう 1 つは座標を用いて表示した上で、それが座標変換でどう振舞うかを記述することである．前者は抽象的あるいは一般的な取り扱いに便利であるが、実際の計算では後者の記述が不可欠である．

問題 5.1. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間、$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ をその基底とすると、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は $(v^i)_{i=1}^n$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i v^i$$

と表される．ここで、上付きの i は指数ではなく添字であり、また、上付きと下付きの添字が 1 つの式に繰り返して出てきたときには和を取る **Einstein の規約**を用いている．従って、上の式で和の記号を露わに書けば

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i v^i$$

となる．この状況で、可逆行列 $(R^j{}_i)_{i,j=1}^n$ を用いて基底を $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ から

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}'_j R^j{}_i$$

で定義される $\{\boldsymbol{e}'_i\}_{i=1}^n$ に変換すると、この新しい基底に対する $\boldsymbol{v}$ の成分 v'^i は

$$v'^i = R^i{}_j v^j$$

で与えられることを示せ．(ヒント：v'^i は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}'_i v'^i$$

で定義されることを使え．)

注意 5.2. Einstein の規約は、ベクトルを成分で扱う時に、次元が大きくなるにつれてどんどん煩雑になる式を抑制するための便利な記法を提供する．例えば

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i v^i$$

という式をあらわに書き下すと、2 次元では

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 v^1 + \boldsymbol{e}_2 v^2$$

となり、3 次元では

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 v^1 + \boldsymbol{e}_2 v^2 + \boldsymbol{e}_3 v^3$$

となる．また、

$$v'^i = R^i{}_j v^j$$

という式は 2 次元では

$$\begin{aligned} v'^1 &= R^1{}_1 v^1 + R^1{}_2 v^2, \\ v'^2 &= R^2{}_1 v^1 + R^2{}_2 v^2 \end{aligned}$$

という式を、3 次元で

$$\begin{aligned} v'^1 &= R^1{}_1 v^1 + R^1{}_2 v^2 + R^1{}_3 v^3, \\ v'^2 &= R^2{}_1 v^1 + R^2{}_2 v^2 + R^2{}_3 v^3, \\ v'^3 &= R^3{}_1 v^1 + R^3{}_2 v^2 + R^3{}_3 v^3 \end{aligned}$$

という式を表している．この程度の式なら行列で表記することも出来るが、例えば

$$T'^i{}_{jk} = R^i{}_l \, R_j{}^m \, R_k{}^n \, T^l{}_{mn}$$

などのより複雑な式だとそれも出来ない.

問題 5.2. V^* を V の双対空間とし、$\{\boldsymbol{\omega}^i\}_{i=1}^n$ を

$$\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$$

で定義される $\{e_i\}_{i=1}^n$ の双対基底とする．ただし、δ^i_j は

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される **Kronecker のデルタ**である．ここで可逆行列 $(R^i{}_j)_{i,j=1}^n$ による座標変換

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}'_j R^j{}_i$$

を行うと、双対基底はある行列 $\left(R_i{}^j\right)_{i,j=1}^n$ によって

$$\boldsymbol{\omega}^i = \boldsymbol{\omega}'^j R_j{}^i$$

と変換される．(従って、$w \in V^*$ の成分

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\omega}^i w_i = \boldsymbol{\omega}'^i w'_i$$

は

$$w'_i = R_i{}^j w_j$$

と変換される．) このとき、行列 $\left(R_i{}^j\right)_{i,j=1}^n$ は $(R^i{}_j)_{i,j=1}^n$ の逆行列の転置行列であることを示せ．(ヒント：示すべき関係式は

$$R^i{}_j R_k{}^j = \delta^i_k$$

である．)

問題 5.3. 上の状況で、V から V への線形写像 T に対し

$$\boldsymbol{\omega}^i(T(\boldsymbol{e}_j)) = T^i{}_j$$

とおくと、

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$$

と

$$\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v}) = u^i \boldsymbol{e}_i$$

の関係は

$$u^i = T^i{}_j v^j$$

で与えられることを示せ.

問題 5.4. 上の状況で

$$\boldsymbol{\omega}'^i(T(\boldsymbol{e}'_j)) = T'^i{}_j$$

とおくと、

$$T'^i{}_j = R^i{}_k R_j{}^l T^k{}_l$$

となることを示せ.

問題 5.5. V 上の双線形形式 (すなわち、写像

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

で、任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} g(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \alpha g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \beta g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \\ g(\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}) &= \alpha g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \beta g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

を満たすもの) に対して

$$g_{ij} = g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{e}_i u^i, \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{e}_i v^i, \end{aligned}$$

に対して

$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g_{ij} u^i v^j$$

となることを示せ.

問題 5.6. 上の状況で

$$g'_{ij} = g(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j)$$

とおくと、

$$g'_{ij} = R_i{}^k R_j{}^l g_{kl}$$

となることを示せ.

問題 5.7. 上の状況で、$g_{ij} = g_{ji}$ と $g'_{ij} = g'_{ji}$ は同値である事を示せ．また、同様に $g_{ij} = -g_{ji}$ と $g'_{ij} = -g'_{ji}$ も同値である.

定義 5.3. $g_{ij} = g_{ji}$ の時 g は**対称 (symmetric)** であると言い、$g_{ij} = -g_{ji}$ の時 g は**反対称 (anti-symmetric)** であると言う．問題5.7により、この概念は座標の取り方によらない.

問題 5.8. 双線形形式 $g : V \times V \to \mathbb{R}$ が対称あるいは反対称であることの、座標を用いない定義を与えよ.

問題 5.9. V 上の双線形形式全体のなす集合は、

$$\left(\boldsymbol{\omega}^i \otimes \boldsymbol{\omega}^j\right)(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \delta^i_k \delta^j_l$$

で定義される写像 $\boldsymbol{\omega}^i \otimes \boldsymbol{\omega}^j : V \times V \to \mathbb{R}$ を基底とするベクトル空間をなすことを示せ.

定義 5.4. V 上の双線形形式全体のなすベクトル空間を V^* と V^* の**テンソル積 (tensor product)** と呼び、$V^* \otimes V^*$ で表す．より一般に、V^* を k 個、V を m 個直積した集合 $(V^*)^k \times (V)^m$ から $\mathbb{R}$ への**多重線形写像 (multi-linear map)** (すなわちどの変数に関しても線形な写像) 全体のなすベクトル空間を k 個の V と m 個の V^* のテンソル積と呼び、$V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes m}$ で表す.

問題 5.10. $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ を V の基底、$\{\boldsymbol{\omega}^i\}_{i=1}^n$ を対応する双対基底とするとき、$V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes m}$ の基底を与え、次元を求めよ.

定義 5.5. m を 1 より大きい自然数とするとき、m 重線形写像 $T \in (V^*)^{\otimes m}$ は、m 個の変数のうちどの 2 つの入れ替えに対しても対称な時**完全対称 (totally symmetric)**、反対称な時**完全反対称 (totally anti-symmetric)** と言う．完全対称な m 階のテンソルの集合を $\mathrm{Sym}^m V^*$、完全反対称な m 階のテンソルの集合を $\wedge^m V^*$ で表す．また、$\mathrm{Sym}^0 V^* = \wedge^0 V^* = \mathbb{R}$ かつ $\mathrm{Sym}^1 V^* = \wedge^1 V^* = V^*$ と定める.

問題 5.11. $\mathrm{Sym}^m V^*$ および $\wedge^m V^*$ は $T \in (V^*)^{\otimes m}$ の部分ベクトル空間である (すなわち、和とスカラー倍に関して閉じている) ことを示せ.

注意 5.6. Einstein の規約は次元が大きくなっても式が煩雑にならないという点では優れているが、テンソルの階数が上がるとそれに伴って添字が多くなり、式が読み難くなるのみならず意味も理解し難くなる．完全反対称テンソルに対しては、**外積代数 (exterior algebra)** がこれを解決するための速記法を提供し、多様体の研究に欠かせない道具になっている. (外積代数にはそのほかにも様々な側面がある.)

問題 5.12. $V = \mathbb{R}^2$ のとき、2 階の完全対称テンソル $T = (T_{ij})_{i,j=1}^2$ は、T_{11}, T_{12} および T_{22} が与えられれば残りの成分 T_{21} は対称性から

$$T_{12} = T_{21}$$

と定まるので、

$$\dim \mathrm{Sym}^2 V^* = 3$$

となることが分かるが、同様にして $V = \mathbb{R}^3$ の時の $\mathrm{Sym}^2 V^*$ の次元を求めよ.

問題 5.13. $V = \mathbb{R}^2$ のとき、2 階の完全反対称テンソル $T = (T_{ij})_{i,j=1}^2$ は、T_{12} が与えられれば残りの成分 T_{11}, T_{21} および T_{22} は反対称性から

$$\begin{aligned} T_{11} &= -T_{11} = 0, \\ T_{22} &= -T_{22} = 0, \\ T_{21} &= -T_{12} \end{aligned}$$

と定まるので、

$$\dim \wedge^2 V^* = 1$$

となることが分かるが、同様にして $V = \mathbb{R}^3$ の時の $\wedge^2 V^*$ の次元を求めよ.

問題 5.14. $V = \mathbb{R}^2$ の時、3 階の完全対称テンソルのなすベクトル空間と 3 階の完全反対称テンソルのなすベクトル空間の次元を求めよ.

問題 5.15. $V = \mathbb{R}^3$ の時、3 階の完全対称テンソルのなすベクトル空間と 3 階の完全反対称テンソルのなすベクトル空間の次元を求めよ.

問題 5.16. $V = \mathbb{R}^n$ の時、3 階の完全対称テンソルのなすベクトル空間と 3 階の完全反対称テンソルのなすベクトル空間の次元を求めよ.

問題 5.17. $V = \mathbb{R}^n$ の時、m 階の完全対称テンソルのなすベクトル空間と m 階の完全反対称テンソルのなすベクトル空間の次元を求めよ.

問題 5.18. m を 1 より大きい自然数とし、$\mathfrak{S}_m$ で m 次対称群を、$\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_m \to \{\pm 1\}$ で奇置換を -1 に、偶置換を 1 に移す群準同型を表す．対称群の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ はテンソル積 $(V^*)^{\otimes m}$ に

$$
\begin{array}{ccc}
(V^*)^{\otimes m} & \to & (V^*)^{\otimes m} \\
\cup & & \cup \\
w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_m & \mapsto & w_{\sigma(1)} \otimes w_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(m)}
\end{array}
$$

で作用する．これを用いて、**symmetrizer**

$$S_m : (V^*)^{\otimes m} \to (V^*)^{\otimes m}$$

と **antisymmetrizer**

$$A_m : (V^*)^{\otimes m} \to (V^*)^{\otimes m}$$

を、

$$
\begin{aligned}
S_m(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_m|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m), \\
A_m(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_m|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot \sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m)
\end{aligned}
$$

で定義するとき、次の問いに答えよ．

1. $m = 2$ のとき、$S_2(w_1 \otimes w_2)$ と $A_2(w_1 \otimes w_2)$ を具体的に書き下せ.

2. $m = 3$ のとき、$S_3(w_1 \otimes w_2 \otimes w_3)$ と $A_3(w_1 \otimes w_2 \otimes w_3)$ を具体的に書き下せ.

3. 任意の m と任意の $w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in (V^*)^{\otimes m}$ に対し、

   $$S_m(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) \in \mathrm{Sym}^m V^*$$

   となることを示せ.

4. 任意の m と任意の $s \in \mathrm{Sym}^m V^*$ に対し、

   $$S_m(s) = s$$

   となることを示せ.

5. 任意の m と任意の $a \in \wedge^m V^*$ に対し、

   $$S_m(a) = 0$$

   となることを示せ.

6. $\mathrm{Im}\, S_m = \mathrm{Sym}^m V^*$ かつ $\mathrm{Ker}\, S_m \supset \wedge^m V^*$ となることを示せ.

7. $\mathrm{Im}\, A_m = \wedge^m V^*$ かつ $\mathrm{Ker}\, A_m \supset \mathrm{Sym}^m V^*$ となることを示せ.

8. $m = 2$ の時、
$$V^* \otimes V^* \cong \mathrm{Sym}^2 V^* \oplus \wedge^2 V^*$$
となることを示せ.

問題 5.19. 任意の自然数 p と q に対し、**外積 (exterior product)**

$$\wedge : \wedge^p V^* \times \wedge^q V^* \to \wedge^{p+q} V^*$$

を、$v \in \wedge^p V^*$ と $w \in \wedge^q V^*$ に対し

$$v \wedge w = A_{p+q}(v \otimes w)$$

で定義するとき、次の問いに答えよ：

1. $v \wedge w$ は $v \in \wedge^p V^*$ と $w \in \wedge^q V^*$ のどちらに関しても線形であることを示せ．従って、外積は自然に写像
$$\wedge : \wedge^p V^* \otimes \wedge^q V^* \to \wedge^{p+q} V^*$$
を定める.

2. 任意の自然数 p, q, r と任意の $u \in \wedge^p V^*$, $v \in \wedge^q V^*$, $w \in \wedge^r V^*$ に対し
$$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$$
が成り立つことを示せ．従って、
$$\wedge^* V^* = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \wedge^m V^*$$
は $\wedge$ を積とする $\mathbb{R}$ 上の**結合代数 (associative algebra)** の構造を持つ.

3. 任意の $v, w \in \wedge^1 V^* = V^*$ に対して
$$v \wedge w = -w \wedge v$$
となることを示せ.

4. 任意の $v \in \wedge^p V^*$ と $w \in \wedge^q V^*$ に対して
$$v \wedge w = (-1)^{pq}\, w \wedge v$$
が成り立つことを示せ.

5. V^* の基底を $\{\boldsymbol{\omega}^i\}_{i=1}^n$ とすると、

$$\left\{\boldsymbol{\omega}^{i_1} \wedge \boldsymbol{\omega}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}^{i_p}\right\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n}$$

は $\wedge^p V^*$ の基底になることを示せ．従って、$\wedge^* V^*$ は $\mathbb{R}$ 代数として $\wedge^1 V^* = V^*$ で生成されている．

問題 5.20. $V = \mathbb{R}^2$ とし、V^* の基底を $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2\}$ とおく．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}^1 v_1 + \boldsymbol{\omega}^2 v_2,$$
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\omega}^1 w_1 + \boldsymbol{\omega}^2 w_2$$

の時、

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2$$

となることを示せ．

問題 5.21. 問題 5.20 に現れる行列式の絶対値は、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が $V^* \cong \mathbb{R}^2$ で張る平行四辺形の面積と一致することを示せ．

問題 5.22. $V = \mathbb{R}^3$ とし、V^* の基底を $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3\}$ とおく．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}^1 u_1 + \boldsymbol{\omega}^2 u_2 + \boldsymbol{\omega}^3 u_3,$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}^1 v_1 + \boldsymbol{\omega}^2 v_2 + \boldsymbol{\omega}^3 v_3,$$
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\omega}^1 w_1 + \boldsymbol{\omega}^2 w_2 + \boldsymbol{\omega}^3 w_3$$

の時、

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \boldsymbol{\omega}^3$$

となることを示せ．

問題 5.23. 問題 5.22 に現れる行列式の絶対値は、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が $V^* \cong \mathbb{R}^3$ で張る平行六面体の体積と一致することを示せ．

定義 5.7. 自然数 n と p に対し、n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の p **次微分形式** (p**-form**) を、関数 $f_{i_1\dots i_p}$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n$ を用いて

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n} f_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

と表されるものとして定義する．ここで $\wedge$ は外積であり、$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ は $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ を基底とする n 次元ベクトル空間 V^* の p 次外積 $\wedge^p V^*$ の元と考えている．特に、0 次微分形式とは単に関数のことである．二つの微分形式の外積は、任意の関数 f と任意の $1 \le i \le j \le n$ に対して

$$f dx^i = dx^i f, \qquad dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

となるように定義される．また、n 次元 Euclid 空間上の p 次微分形式

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n} f_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

に対し、α の**外微分 (exterior differentail)** $d\alpha$ は

$$d\alpha = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1\dots i_p}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

で定義される．

問題 5.24. $\mathbb{R}^3$ 上の 0 次微分形式 f、1 次微分形式

$$\alpha = v_x dx + v_y dy + v_z dz,$$

2 次微分形式

$$\omega = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy,$$

および 3 次微分形式 $\eta = g dx \wedge dy \wedge dz$ の外微分をそれぞれ計算せよ．

問題 5.25. 任意の p 次微分形式 ω と q 次微分形式 η に対して

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

が成り立つことを示せ.

問題 5.26. 任意の微分形式 ω に対して

$$d(d\omega) = 0$$

が成り立つことを示せ.

幾何学１演義

問題 6.1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ をスカラー場、$\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をベクトル場とするとき、

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

とおいて、$\boldsymbol{v}$ の**発散** $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$、$f$ の**勾配** $\mathbf{grad}\, f$ および $\boldsymbol{v}$ の**回転** $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}$ を

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \\
&= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\
\mathbf{grad}\, f &= \boldsymbol{\nabla} f \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \\
\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} \\
&= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

で定義する．このとき、次を示せ：

1. $\mathbf{grad}(fg) = (\mathbf{grad}\, f)g + f\, \mathbf{grad}\, g$.
2. $\mathbf{rot}(f\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\, f \times \boldsymbol{v} + f\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}$.
3. $\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\, f \cdot \boldsymbol{v} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v}$.
4. $\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}$.
5. $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\, f) = 0$.
6. $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) = 0$.

問題 6.2. スカラー場に対する **Laplace 作用素 (Laplacian)**Δ を

$$\Delta f = \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, f)$$

で定義すると、その成分による表示は

$$\Delta f = \delta^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

となることを示せ.

問題 6.3. ベクトル場に対する **Laplace 作用素 (Laplacian)**Δ を

$$\Delta \boldsymbol{v} = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v})$$

で定義すると、その成分による表示は

$$\Delta v^i = \delta^{jk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k}$$

となることを示せ.

問題 6.4. 非圧縮性粘性流体を記述する **Navier–Stokes 方程式**は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = \nu \Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\, p + \boldsymbol{f},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$$

で与えられるが、前者を成分で表示すると

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \nu \delta_{jk} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i} + f^i$$

となることを示せ. ただし、ここで $\boldsymbol{u}$ は流体の速度ベクトル場で、p は圧力、$\boldsymbol{f}$ は外力、ν は動粘性係数、そして ρ は密度である.

問題 6.5. Maxwell 方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \qquad \mathbf{rot}\, \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{rot}\, \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

で与えられるが、これを成分で書き下せ. 但し、$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ は電場、$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ は磁場、ρ は電荷密度、$\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ は電流密度である.

問題 6.6. Maxwell 方程式から**連続の方程式 (equation of continuity)**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

が従うことを示せ.

問題 6.7. 真空 (vacuum) を電荷密度も電流密度も零であるような状態として定義すると、真空中の Maxwell 方程式から**波動方程式 (wave equation)**

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$
$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

が従うことを示せ.

幾何学１演義

問題 7.1. スカラー場 ϕ が $\mathbf{grad}\,\phi = 0$ を満たすための必要十分条件は ϕ が定数であることを示せ.

問題 7.2. ベクトル場 $\mathbf{E}$ が $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0$ を満たす時、**渦が無い (rotation-free)** と言われる．渦を持たないベクトル場 $\mathbf{E}$ に対し、適当な点 $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ を固定して、任意の滑らかな写像 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ で $\gamma(0) = \mathbf{r}_0$ かつ $\gamma(1) = \mathbf{r}$ を満たすものに対し

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

とおくと、この $\phi(\mathbf{r})$ は γ の取り方に依らずに定まり、$\mathbf{E} = \mathbf{grad}\,\phi$ となることを示せ.
(ヒント：γ の取り方に依らないことは Stokes の定理から従う．あとは

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \int_0^y E_y(0,t,0)dt + \int_0^z E_z(0,y,t)dt + \int_0^x E_x(t,y,z)dt \\
&= \int_0^z E_z(0,0,t)dt + \int_0^x E_x(t,0,z)dt + \int_0^y E_y(x,t,z)dt \\
&= \int_0^x E_x(t,0,0)dt + \int_0^y E_y(x,t,0)dt + \int_0^z E_z(x,y,t)dt
\end{aligned}$$

をそれぞれ x, y および z で偏微分すればよい．)

問題 7.3. あるベクトル場 $\mathbf{E}$ に対し、スカラー場 ϕ と ϕ' が

$$\mathbf{E} = \mathbf{grad}\,\phi = \mathbf{grad}\,\phi'$$

を満たすなら、ある定数 C が存在して任意の $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\phi(\mathbf{r})' = \phi(\mathbf{r}) + C$$

となることを示せ.

問題 7.4. ベクトル場 $\mathbf{B}$ が $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ を満たす時、**湧き出しが無い (divergence-free)** と言われる．湧き出しがないベクトル場 $\mathbf{B}$ に対し、あるベクトル場 $\mathbf{A}$ が存在して

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

となることを示せ．(ヒント：例えば

$$\begin{aligned}
A_x(x,y,z) &= \int_0^z B_y(x,y,t)dt, \\
A_y(x,y,z) &= -\int_0^z B_x(x,y,t)dt + \int_0^x B_z(t,y,0)dt, \\
A_z &= 0
\end{aligned}$$

とおけばよい．)

問題 7.5. あるベクトル場 $\mathbf{B}$ に対し、ベクトル場 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}'$ が

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}'$$

を満たすなら、あるスカラー場 ϕ が存在して

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\,\phi$$

となることを示せ.

問題 7.6. $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\mathbf{V}$ に対し

$$\rho = \operatorname{div}\mathbf{V}$$

とおく．ここでもし **Poisson 方程式**

$$\Delta\phi = \rho$$

を満たすスカラー場 ϕ が存在すれば、あるベクトル場 $\mathbf{A}$ が存在して

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\,\phi + \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

となることを示せ．これを $\mathbf{V}$ の **Helmholtz 分解**と呼ぶ.

問題 7.7. 電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ が Maxwell 方程式を満たす時、あるスカラー場 ϕ とベクトル場 $\mathbf{A}$ が存在して

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

となることを示せ．但し、ベクトル場の Helmholtz 分解の存在は仮定してもよい．このような ϕ を**スカラーポテンシャル**、$\mathbf{A}$ を**ベクトルポテンシャル**と呼ぶ.

問題 7.8. 電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ がポテンシャル $(\phi, \mathbf{A})$ によって問題 7.6 のように表されていれば、Maxwell 方程式のうちの半分

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

は自動的に満たされることを示せ.

問題 7.9. 電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ がポテンシャル $(\phi, \mathbf{A})$ によって問題 7.6 のように表されていて、しかもこのポテンシャルが Lorentz ゲージ条件

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{7.1}$$

を満たしている時、Maxwell 方程式の残りの半分は

$$\Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\rho$$
$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{j}$$

で与えられることを示せ.

問題 7.10 (ゲージ変換). スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルをスカラー場 f によって

$$\phi \mapsto \phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{grad}\, f$$

と変換しても、$\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は不変であることを示せ.

問題 7.11. $\mathbb{R}^3$ の原点を除いて定義された時間に依存しないポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$$

は真空中の Maxwell 方程式を満たすことを示せ. 但し、$\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおいた. これを **Coulomb ポテンシャル**と呼ぶ.

問題 7.12. Coulomb ポテンシャルから定まる電磁場を求めよ.

問題 7.13. 原点を中心とする半径 $R > 0$ の球を

$$B(0, R) = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq R\}$$

とし、その特性関数を

$$\chi_{B(0,R)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & r \leq R, \\ 0 & r > R \end{cases}$$

とおく. ここでスカラーポテンシャル ϕ を

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{6}r^2 & r \leq R, \\ \frac{R^3}{6r} & r > R \end{cases}$$

で定義すると、これは $\rho = \chi_{B(0,R)}$ とおいた時の **Poisson 方程式**

$$\Delta\phi = \rho$$

を満たすことを示せ.

問題 7.14. 問題 7.13 で与えられたポテンシャルから定まる電磁場を求めよ.

問題 7.15. 電磁場中における荷電粒子の運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

で与えられる．電磁場が Coulomb ポテンシャルで与えられている時、荷電粒子の運動の軌跡は円錐曲線になることを次のようにして示せ:

1. エネルギー
$$E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{r}$$
が保存されることを示せ．(ヒント：運動方程式を用いて $\dot{E} = 0$ を示せばよい．)

2. 角運動量
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$
が保存されることを示せ.

3. 動径方向の単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}(\theta)$ と、それに直交する単位ベクトル $\check{\mathbf{r}}(\theta)$ を
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}}(\theta) \\ \hat{\mathbf{r}}(\theta) &= (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \check{\mathbf{r}}(\theta) &= \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}(\theta) \end{aligned}$$
で導入すると、
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}}(\theta) + r\dot{\theta}\check{\mathbf{r}}(\theta)$$
となることを示せ.

4. $\mathbf{r}$ の 2 階導関数は
$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\check{\mathbf{r}}$$
となることを示せ．また、このことと運動方程式から角運動量
$$L = r^2\dot{\theta}$$
が保存することを示せ.

5. 角運動量保存則から
$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$
が従うことを示せ.

6. 変数変換
$$u = \frac{1}{r}$$
によって、運動方程式
$$\ddot{r} - r\dot{\theta} = -\frac{1}{r^2}$$
は
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{L^2} \tag{7.2}$$
と書き換えられることを示せ.

7. 微分方程式 (7.2) の一般解は、e と θ_0 を積分定数として
$$u = -\frac{1}{L^2}(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) \tag{7.3}$$
で与えられることを示せ.

8. 式 (7.3) で与えられる曲線は、原点を焦点とする離心率 e の円錐曲線であることを示せ.

9. 離心率 e は、エネルギー E と角運動量 L を用いて
$$e = \sqrt{1 + 2EL^2}$$
と表されることを示せ.

問題 7.16. $n = 3$ のとき、次のようにしてベクトル場と 2 次微分形式を対応させることが出来る:
$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) \longleftrightarrow \omega = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx + dy.$$
また、以下の問題 9.16 で扱う写像 $*$ を使って、関数 f とベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して 3 次微分形式 $*f$ と 1 次微分形式 $*\omega$ を対応させることもできる:
$$f \longleftrightarrow *f = f dx \wedge dy \wedge dz,$$
$$\boldsymbol{v} \longleftrightarrow *\omega = v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$
これらの対応によって、外微分がベクトル解析における演算と次のように対応していることを示せ:

1. 関数 f に対し $*\omega = df$ とおくと、ω は $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, f$ に対応する.

2. ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対応する 2 次微分形式を ω とおくと、$d\omega = *(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})$ となる.

3. ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対応する 2 次微分形式を ω とおくと、$d(*\omega)$ はベクトル場 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$ に対応する.

問題 7.17. 問題 7.16 の対応によって、任意の関数 f に対して成り立つ

$$d(df) = 0$$

という式は、

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\, f) = 0$$

という式に対応することを示せ.

問題 7.18. 問題 7.16 の対応によって、任意の微分形式 ω と η に対して成り立つ

$$d(d\omega) = 0$$

という式は、任意のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して成り立つ

$$\mathrm{div}(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) = 0$$

という式に対応することを示せ.

問題 7.19. k 次微分形式 ω に作用する**余微分 (codifferential)**δ と Laplace 作用素 Δ は

$$\delta = (-1)^k * d*,$$
$$\Delta = (d+\delta)^2$$

で定義される. $n = 3$ の時、次の ω に対して $\delta\omega$ と $\Delta\omega$ を求めよ.

1. 0 次微分形式 $\omega = f$.
2. 1 次微分形式 $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$.
3. 2 次微分形式 $\omega = \omega_x dy \wedge dz + \omega_y dy \wedge dz + \omega_z dx + dy$.
4. 3 次微分形式 $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$.

問題 7.20. 余微分 δ は

$$\delta^2 = 0$$

を満たすことを示せ.

問題 7.21. 問題 7.16 の対応によって、任意の p 次微分形式 ω と q 次微分形式 η に対して成り立つ

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

という式が、問題 6.1 の 1 から 4 に対応することを示せ.

幾何学 1 演義

問題 8.1 (Poincaré の補題). $\mathbb{R}^n$ 上の p 次微分形式 ω が $d\omega = 0$ を満たす時、ある $p-1$ 次微分形式 η が存在して $\omega = d\eta$ となることを次のようにして示せ：

1. ホモトピー作用素
$$K : \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^n \times [0,1]) \to \Omega^p(\mathbb{R}^n)$$
を
$$a(x,t)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+1}} \mapsto 0$$
$$b(x,t)\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \mapsto \left(\int_0^1 b(x,t) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$
で定めると、
$$j_0(x) = (x,0),$$
$$j_1(x) = (x,1)$$
で定まる写像 $j_0, j_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$ による引き戻しに対して
$$Kd - dK = j_1^* - j_2^*$$
が成り立つことを示せ.

2. 写像 $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ を
$$F(x,t) = tx$$
で定めると、
$$F \circ j_0 = 0, \qquad F \circ j_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$
より、
$$j_0^* \circ F^* = 0, \qquad j_1^* \circ F^* = \mathrm{id}_{\Omega^p(\mathbb{R}^n)}$$
となることを示せ.

3. $\mathbb{R}^n$ 上の p 次微分形式 ω が
$$d\omega = 0$$
を満たす時、
$$\eta = K \circ F^*(\omega) \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$$
とおくと
$$\omega = d\eta$$
となることを示せ.

問題 8.2. Stokes の定理
$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega$$
から次の定理が従うことを示せ：

1. 微分積分学の基本定理：$\displaystyle\int_a^b df = f(b) - f(a)$
2. 平面における Green の公式：$\displaystyle\int_{\partial U} (Ady + Bdx) = \int_U (\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}) dx \wedge dy.$
3. Cauchy の積分定理：$\overline{\partial} f = 0$ ならば $\displaystyle\oint f(z)dz = 0.$
4. Gauss の発散定理：$\displaystyle\int_{\partial U} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_U \operatorname{div} \mathbf{V} dV.$
5. Stokes の回転定理 $\displaystyle\int_{\partial U} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_U \mathbf{rot}\, \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}.$

問題 8.3. 正方領域
$$D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$$
に対して Stokes の定理
$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_D \mathbf{rot}\, \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$
を示せ.

問題 8.4. 積分を
$$\langle D, \omega \rangle = \int_D \omega$$
と表すと、Stokes の定理は境界と外微分が随伴
$$\langle \partial D, \omega \rangle = \langle D, d\omega \rangle$$
であることを表していることを説明せよ.

問題 8.5 (Green の公式 I). Gauss の発散定理をベクトル場 $\phi\, \mathbf{grad}\, \psi$ に対して用いることにより、
$$\int_U (\phi \Delta \psi) dV = \int_{\partial U} \phi\, \mathbf{grad}\, \psi \cdot d\mathbf{S} - \int_U (\mathbf{grad}\, \phi \cdot \mathbf{grad}\, \psi) dV$$
を示せ.

問題 8.6 (Green の公式 II).

$$\int_U (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)dV = \int_{\partial U} (\phi\,\mathbf{grad}\,\psi \cdot d\mathbf{S} - \psi\,\mathbf{grad}\,\phi \cdot d\mathbf{S})$$

を示せ.

問題 8.7. Green の公式を定数関数 $\psi \equiv 1$ に対して用いることによって、ϕ が調和関数なら

$$\int_{\partial U} \mathbf{grad}\, u \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となることを示せ.

問題 8.8. Green の公式を原点以外定義された調和関数

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$$

と円環領域

$$\begin{aligned} U &= \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \epsilon < r < R\}, \\ \partial U &= S(R) \amalg S(\epsilon), \\ S(R) &= \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid r = R\} \end{aligned}$$

に対して用いることによって、調和関数 ϕ と正数 ϵ に対して

$$\int_{S(R)} \phi(\mathbf{r})dS = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S(\epsilon)} \phi(\mathbf{r})dS \tag{8.4}$$

となることを示せ.

問題 8.9. 式 (8.4) を用いることによって、調和関数に対する**平均値の性質**

$$\phi(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(R)} \phi(\mathbf{r})dS \tag{8.5}$$

を示せ.

問題 8.10. 調和関数に対する平均値の性質 (8.5) と球面座標による積分

$$\int_{B(R)} f(\mathbf{r})dV = \int_0^R dr \int_{S(r)} f(\mathbf{r})dS$$

を用いて、体積積分に関する平均値の性質

$$\phi(0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{S(R)} \phi(\mathbf{r})dV$$

を示せ.

問題 8.11 (Liouville の定理). $\mathbb{R}^3$ 上定義された有界な調和関数は定数に限ることを示せ.

幾何学１演義

問題 9.1. Lorentz 計量を

$$\eta_{\mu\nu} = 2\delta_{\mu 1}\delta_{\nu 1} - \delta_{\mu\nu}$$
$$\eta^{\mu\nu} = 2\delta^{\mu 1}\delta^{\nu 1} - \delta^{\mu\nu}$$

で定義すると、

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$$

であり、

$$x^\mu = (t, \mathbf{r})$$

に対して

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\mathbf{r})$$

かつ

$$x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu}x_\mu x_\nu = t^2 - r^2$$

となることを示せ．$\mathbb{R}^4$ に Lorentz 計量を入れた空間を **Minkowski 空間**と呼ぶ.

問題 9.2. Lorentz 変換

$$t' = \frac{t + \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x + \beta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

はある「回転角」$\psi \in \mathbb{R}$ によって

$$t' = t\cosh\psi + x\sinh\psi, \quad x' = t\sinh\psi + x\cosh\psi, \quad y' = y, \quad z' = z$$

と表されることを示せ.

問題 9.3. 問題 9.2 で与えられた Lorentz 変換によって**世界間隔** $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ は不変に保たれることを示せ.

問題 9.4. 空間回転

$$t' = t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z' = z$$

によって世界間隔が不変に保たれることを示せ.

問題 9.5. Faraday テンソルと呼ばれる 2 階の反対称テンソルを、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ の成分を用いて

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

で定めると、

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}F_{\lambda\rho}$$

は

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられることを示せ.

問題 9.6. 問題 9.5 で与えられる Faraday テンソル $F_{\mu\nu}$ に対し、

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = E^2 - B^2$$

となることを示せ.

問題 9.7. 電磁場のスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ から **4 元ポテンシャル** A_μ を

$$A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$$

で定義すると、Faraday テンソルは

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \tag{9.6}$$

で与えられることを示せ.

問題 9.8. Faraday テンソルを用いると Maxwell 方程式の半分は

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0 \tag{9.7}$$

と表されることを示せ.

問題 9.9. Faraday テンソルが 4 元ポテンシャル A_μ によって式 (9.6) で表されていれば、式 (9.7) は自動的に成り立つことを示せ.

問題 9.10. **4 元電流**を

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$$

で定義すると、Maxwell 方程式の残りの半分は

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -j^\mu \tag{9.8}$$

で与えられることを示せ.

問題 9.11. Maxwell 方程式の半分 (9.8) と Faraday テンソルの反対称性から連続の方程式

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

を導け.

問題 9.12. Lorentz ゲージ条件 (7.1) は 4 元ポテンシャルを用いると

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = 0 \tag{9.9}$$

とあらわされることを示せ.

問題 9.13. Lorentz ゲージ条件 (9.9) の下で、Maxwell 方程式 (9.8) は

$$\Box A^\mu = -j^\mu$$

と表される事を示せ．ここで

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$$

は Minkowski 空間における Laplace 作用素であり、**d'Alambert 作用素**と呼ばれる.

問題 9.14. **接続形式 (connection 1-form)**A と**曲率形式 (curvature form)**F を

$$A = A_\mu dx^\mu$$
$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

で定義すると、式 (9.6) は

$$F = dA \tag{9.10}$$

と表されることを示せ.

問題 9.15. 曲率形式 F を用いると、Maxwell 方程式の半分 (9.7) は

$$dF = 0 \tag{9.11}$$

と表されることを示せ．特に、曲率形式が接続形式を用いて (9.10) のように表されている時は、この式は自動的に成り立つ.

問題 9.16. n 次元の実ベクトル空間とその上の非退化な 2 次形式の組 $(\mathbb{R}^n, g)$ に対して Hodge の星状作用素を、

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \\ *\omega &= (*\omega)_{i_1 \dots i_{n-k}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{n-k}}, \\ \omega^{i_1 \dots, i_k} &= g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}, \\ (*\omega)_{i_1 \dots i_{n-k}} &= \frac{1}{k!} \omega^{j_1 \dots j_k} \sqrt{|\det g|} \epsilon_{j_1 \dots j_k i_1 \dots i_{n-k}} \end{aligned}$$

で定義すると、

$$**\omega = (-1)^{k(n-k)} s\omega$$

となることを示せ．但し、ここで

$$s = \det g / |\det g|$$

である．

問題 9.17. Minkowski 空間 $(\mathbb{R}^4, \eta)$ に対して

$$\begin{aligned} *1 &= dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\ *dt &= dx \wedge dy \wedge dz, \\ *dx &= dt \wedge dy \wedge dz, \\ *dy &= dt \wedge dz \wedge dx, \\ *dz &= dt \wedge dx \wedge dy, \\ *dt \wedge dx &= -dy \wedge dz, \\ *dt \wedge dy &= -dz \wedge dx, \\ *dt \wedge dz &= -dx \wedge dy, \\ *dy \wedge dz &= dt \wedge dx, \\ *dz \wedge dx &= dt \wedge dy, \\ *dx \wedge dy &= dt \wedge dz, \\ *dx \wedge dy \wedge dz &= dt, \\ *dt \wedge dy \wedge dz &= dx, \\ *dt \wedge dz \wedge dx &= dy, \\ *dt \wedge dx \wedge dy &= dz, \\ *dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz &= -1 \end{aligned}$$

であることを示せ．

問題 9.18. 余微分を

$$\delta = (-1)^{nk+n+1} s * d*$$

で定義する時、2 次微分形式

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

に対して δF を求めよ.

問題 9.19. Minkowski 空間上の関数 f、1 次微分形式 $A_\mu dx^\mu$ および 2 次微分形式 $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ に対して d'Ambert 作用素

$$\Box = (d + \delta)^2$$

を計算せよ.

問題 9.20. 共変 4 元電流 $j_\mu = \eta_{\mu\nu} j^\nu$ を用いて

$$J = j_\mu dx^\mu$$

とおくと、Maxwell 方程式の残りの半分 (9.8) は

$$\delta F = -J \tag{9.12}$$

と表されることを示せ.

問題 9.21. Lorentz ゲージ条件 (7.1) は接続形式を用いると

$$\delta A = 0 \tag{9.13}$$

と表されることを示せ.

問題 9.22. Lorentz ゲージ条件 (9.13) の下で、Maxwell 方程式 (9.12) は

$$\Box A = -J$$

と表される事を示せ. ここで

$$\Box = (d + \delta)^2$$

である.