2009 年 10 月 1 日

複素関数論演義

課題 1.1. $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ のとき $z/(1+z^2) \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は $|z| = 1$ かつ $z \neq \pm i$ であることを示せ.

問題 1.2. 正の自然数 n と実数の組 $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ で $a_n \neq 0$ を満たすものに対し n 次多項式 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ が複素数 α を根に持てば、その複素共役 $\overline{\alpha}$ も $f(z)$ の根になることを示せ.

問題 1.3. $z = re^{i\theta}$ のとき $1/(1-z)$ の実部・虚部を r, θ で表せ.

課題 1.4. 自然数 n に対して $z^n = 1$ となる複素数 z を全て求めよ.

問題 1.5. $z^2 = i$ となる複素数 z を全て求めよ.

問題 1.6. $z^4 = i$ となる複素数 z を全て求めよ.

問題 1.7. 絶対値の定義を使って三角不等式を証明せよ.

問題 1.8. 次の不等式を示し、等号が成立するための必要十分条件を述べよ:

$$(1)\ |\mathfrak{Re}\,\alpha| \leq |\alpha| \leq |\mathfrak{Re}\,\alpha| + |\mathfrak{Im}\,\alpha| \qquad (2)\ ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$$

問題 1.9. 相異なる複素数 α, β と正の実数 k に対し、$k|z-\alpha| = |z-\beta|$ となる複素数 z の集合はどのような図形をなすか述べよ.

問題 1.10. $w = (z-i)/(z+i)$ とおくとき、$\mathfrak{Im}\,z > 0$ であることと $|w| < 1$ は同値である. これを (1) 計算によって (2) 幾何学的意味を考えて、それぞれ示せ.

問題 1.11. 3 点 $0,\ z,\ z+w$ を頂点とする 3 角形の面積は $\mathfrak{Im}(\overline{z}w)$ の絶対値で与えられることを示せ.

問題 1.12. $z = re^{i\theta},\ \zeta = Re^{i\phi}$ のとき $1/(\zeta - z)$ の絶対値と実部を $R,\ r,\ \theta,\ \phi$ を用いて表せ.

問題 1.13. 複素数体は加法と実数による乗法によって、実数体上の線形空間になることを示せ. また、その次元を求めよ.

問題 1.14. 複素数体を含み、実数体上の線形空間としての次元が 3 であるような体は存在しないことを示せ.

問題 1.15. $|w| < 1$ の時、$|(z-w)/(1-z\overline{w})| = 1$ となるための必要十分条件は $|z| = 1$ であることを示せ.

問題 1.16. 次の等式を示せ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-z)^2} & |z| < 1, \\ \dfrac{1}{z(1-z)^2} & |z| > 1. \end{cases}$$

2009 年 10 月 15 日

複素関数論演義　小テスト

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

次の問題に対し、答案が正しければ丸をつけ、間違っていればその箇所を訂正せよ.

問題 2.1. $z \in \mathbb{C}$ に対し $z/(1+z^2) \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件を求めよ.

答案. $z/(1+z^2) \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}$$

であり、これを変形すると

$$\begin{aligned}
\overline{z}(1+z^2) &= z(1+\overline{z}^2) \\
\overline{z} + z|z|^2 &= z + \overline{z}|z|^2 \\
|z|^2(z-\overline{z}) &= z - \overline{z} \\
|z|^2 &= 1
\end{aligned}$$

となる．ここで $|z|$ は非負の実数なので、$|z| = 1$ が求める必要十分条件となる.

問題 2.2. 自然数 n に対して $z^n = 1$ となる複素数 z を全て求めよ.

答案. $k = 0, 1, \dots, n-1$ に対して $\zeta_k = e^{2k\pi i/n}$ とおくと

$$\zeta_k^n = (e^{2k\pi i/n})^n = e^{n\cdot 2k\pi i/n} = e^{2k\pi i} = 1$$

なので、ζ_k は $f(z) = z^n - 1$ の根であることが分かる. 因数定理から $f(z)$ は $z - \zeta_0$ で割り切れることが分かるので、その商を $Q_{n-1}(z)$ とおく:

$$f(z) = (z - \zeta_0)Q_{n-1}(z).$$

ここで $Q_{n-1}(z)$ は $n-1$ 次の多項式である. この式の両辺に ζ_1 を代入すると、

$$(\zeta_1 - \zeta_0)Q_{n-1}(\zeta_1) = 0$$

となり、$\zeta_1 - \zeta_0 \neq 0$ から $Q_{n-1}(\zeta_1) = 0$ となることが分かる. ここでふたたび因数定理を使うと $Q_{n-1}(z)$ が $z - \zeta_1$ で割り切れることが分かり、$n-2$ 次の多項式 $Q_{n-2}(z)$ によって

$$Q_{n-1} = (z - \zeta_1)Q_{n-2}(z)$$

と表される. これを繰り返すことによって、k 次の多項式 $Q_k(z)$ が存在して

$$Q_k(z) = (z - \zeta_{n-k})Q_{k-1}(z), \qquad k = n-1, n-2, \dots, 1$$

となることが分かる. ここで、Q_0 は 0 次の多項式、すなわち定数であるが、

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - \zeta_0)Q_{n-1}(z) \\ &= (z - \zeta_0)(z - \zeta_1)Q_{n-2}(z) \\ &= \cdots \\ &= (z - \zeta_0)(z - \zeta_1)\cdots(z - \zeta_{n-1})Q_0 \end{aligned}$$

の両辺の最高次の係数を比較することによって $Q_0 = 1$ であることが分かり、

$$z^n - 1 = (z - \zeta_0)(z - \zeta_1)\cdots(z - \zeta_{n-1})$$

が示される. 複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ に対して $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_\ell = 0$ となるための必要十分条件は、ある j に対して $\alpha_j = 0$ となることなので、自然数 n に対して $z^n = 1$ となる複素数は $z = \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ であり、これらで尽きる.

2009 年 10 月 15 日

複素関数論演義　小テスト　解答例

次の問題に対し、答案が正しければ丸をつけ、間違っていればその箇所を訂正せよ.

問題 2.1. $z \in \mathbb{C}$ に対し $z/(1+z^2) \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件を求めよ.

答案. $z/(1+z^2) \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}$$

であり、これを変形すると

$$\begin{aligned} \overline{z}(1+z^2) &= z(1+\overline{z}^2) \\ \overline{z} + z|z|^2 &= z + \overline{z}|z|^2 \\ |z|^2(z-\overline{z}) &= z - \overline{z} \\ |z|^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる．ここで $|z|$ は非負の実数なので、$|z| = 1$ が求める必要十分条件となる.

解答例. 0 で除算をする可能性を考慮に入れていないので、上の答案は間違っている.
まず $z/(1+z^2)$ が複素数として定義されるためには $z \neq \pm i$ が必要．このとき

$$\begin{aligned} \frac{z}{1+z^2} - \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} &= \frac{z}{1+z^2} - \frac{\overline{z}}{\overline{1+z^2}} \\ &= \frac{z\overline{(1+z^2)} - \overline{z}(1+z^2)}{(1+z^2)\overline{(1+z^2)}} \\ &= \frac{z(1+\overline{z}^2) - \overline{z}(1+z^2)}{|1+z^2|^2} \\ &= \frac{z + z\overline{z}^2 - \overline{z} - z^2\overline{z}}{|1+z^2|^2} \\ &= \frac{z + |z|^2\overline{z} - \overline{z} - z|z|^2}{|1+z^2|^2} \\ &= \frac{(z-\overline{z})(1-|z|^2)}{|1+z^2|^2} \end{aligned}$$

なので、求める必要十分条件は「$z \neq \pm i$ かつ $(z = \overline{z}$ または $|z| = 1)$」である.

2009年10月15日

複素関数論演義

問題 2.1. 次の冪級数の収束半径を求めよ：

$$(1)\quad f_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n \qquad (2)\quad f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad (3)\quad f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

問題 2.2. 問題2.1の冪級数について、次を示せ：

1. $f_0(z)$ は $|z|=1$ のどの点でも発散する.
2. $f_1(z)$ は $z=1$ で発散し、$|z|=1$ のその他の点では収束する.
3. $f_1(z)$ は $|z|=1$ のどの点でも収束する.

問題 2.3. 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$a_n=\begin{cases}2^n & n:\mathrm{odd},\\ 3^n & n:\mathrm{even}\end{cases}$$

で定めた時、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z|<1/3$ で収束し、$|z|>1/3$ では発散することを示せ.

課題 2.4. 項別微分によって次の式を確かめよ：

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z,\quad \frac{d}{dz}\sin z=\cos z,\quad \frac{d}{dz}\cos z=-\sin z,\quad \frac{d}{dz}\log(1+z)=\frac{1}{1+z}.$$

問題 2.5. 次の関数の冪級数展開を z^4 の項まで計算せよ：

$$(1)\quad (1-2z\cos\theta+z^2)^{\beta} \qquad (2)\quad e^{-\alpha z/(1-z)} \qquad (3)\quad \cos(\alpha z/\sqrt{1+z})$$

問題 2.6. 冪級数展開

$$\frac{1}{1-2xz+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n$$

の係数 $P_1(x), \ldots, P_5(x)$ を求めよ.

問題 2.7. 逆正接関数の冪級数展開

$$\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

を示せ.

問題 2.8. 正接関数の冪級数展開

$$\tan z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}$$

を示せ．ここで B_{2n} は Bernoulli 数である.

2009 年 10 月 22 日

複素関数論演義　小テスト

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 3.1. 項別微分によって次の式を確かめよ：

$$(1) \quad \frac{d}{dz}e^z = e^z \qquad\qquad (2) \quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$

2009年10月22日

複素関数論演義

問題 4.1. 冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径をそれぞれ ρ_1, ρ_2 とすると、積 $f(z)g(z)$ は $|z| < \min(\rho_1, \rho_2)$ で絶対する次の冪級数で表されることを示せ:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

問題 4.2. 収束半径が1の冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ で、積 $f(z)g(z)$ の収束半径が1より大きいものの例を挙げよ.

問題 4.3. 指数関数 e^z を冪級数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

で定義するとき、指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

が成り立つことを示せ.

問題 4.4. 対数関数を冪級数

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

で定義するとき、十分小さい z に対して次が成り立つことを示せ：

1. $\exp(\log(1-z)) = 1 - z$.
2. $\log(\exp(z)) = z$.

問題 4.5. 自然数 n および複素数 q に対し、q **整数 (q-integer)**$[n]_q$ を

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

で定義する．このとき、冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n+1]_q t^n$$

の収束半径を求めよ.

問題 4.6. 問題4.5に現れた冪級数は t の有理式であることを示せ．(ヒント:

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}$$

を使え．)

2009年11月5日

複素関数論演義

問題 5.1. Euler の定理

$$e^{\sqrt{-1}z} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$$

を用いて、三角関数 $\sin z$ と $\cos z$ を指数関数 $e^{\sqrt{-1}z}$ と $e^{-\sqrt{-1}z}$ で表せ.

問題 5.2. 問題 5.1 で求めた表式を用いて

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

を示せ.

問題 5.3. 問題 5.1 で求めた表式と指数法則を用いて、三角関数の加法定理

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin x \sin w$$

を示せ.

問題 5.4. 双曲線関数を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定める時、次を示せ：

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
3. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
4. $\dfrac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
5. $\dfrac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

問題 5.5. 双曲線関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ のグラフを描け.

問題 5.6. $\log \sqrt{-1}$ のとりうる値を全て求めよ.

問題 5.7. $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{4}}$ のとりうる値を全て求めよ.

問題 5.8. $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ のとりうる値を全て求めよ.

2009 年 11 月 12 日

複素関数論演義

問題 6.1. 次の $\mathbb{C}$ 上定義された関数

$$f(z) = f(x + \sqrt{-1}y) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$$

が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \qquad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

を満たすかどうかを調べよ.

1. $f(z) = z^3$.
2. $f(z) = \overline{z}$.
3. $f(z) = (x^2 + y^2) + \sqrt{-1}(x^2 - y^2)$.
4. $f(z) = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$.

問題 6.2. $\mathbb{C}$ 上定義された滑らかな関数

$$f(z) = f(x + \sqrt{-1}y) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$$

が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \qquad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

を満たすとき、f の実部 u、虚部 v はともに **Laplace 方程式**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を満たすことを示せ.

問題 6.3. $\mathbb{C}$ 上定義された滑らかな実数値関数 $u(x, y)$ が Laplace 方程式

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を満たすとき、新たな実数値関数 $v(x, y)$ を

$$v(x, y) = -\int_0^x u_y(s, 0)ds + \int_0^y u_x(x, t)dt$$

で定義すると、

$$v(x, y) = -\int_0^x u_y(s, y)ds + \int_0^y u_x(0, t)dt$$

であり、複素関数

$$f(z) = f(x + \sqrt{-1}y) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$$

は正則になることを示せ. (ヒント : Green の公式と微分積分学の基本定理を用いよ.)

2009 年 11 月 19 日

複素関数論演義

問題 7.1. 複素微分可能な関数は連続であることを示せ.

問題 7.2 (**収束冪級数の項別微分**)**.** 複素係数の冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

の収束半径が正であるとき、f はこの収束半径の内側で何度でも複素微分可能であり、また原始関数

$$F(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

を持つことを示せ. ただし、ここで C は積分定数である.

問題 7.3 (**冪級数展開の一意性**)**.** 冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

と

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

に対してある正数 R が存在して、任意の $|z| < R$ を満たす複素数 z に対して $f(z)$ と $g(z)$ がともに収束して

$$f(z) = g(z)$$

を満たすならば、任意の n に対して

$$a_n = b_n$$

となることを示せ.

問題 7.4. 正の収束半径を持つ冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

と

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

に対して、ある複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

かつ

$$n \neq m \quad \Longrightarrow \quad z_n \neq z_m,$$

を満たすものが存在して

$$f(z_n) = g(z_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

であるならば、任意の n に対して

$$a_n = b_n$$

となることを示せ.

問題 7.5 (一致の定理). 領域 $\mathcal{D}$ 上の解析関数 f と g が $\mathcal{D}$ 内に集積点を持つ $\mathcal{D}$ の部分集合上で一致すれば、$f = g$ となることを示せ.

問題 7.6. $\mathbb{C}$ 上の相異なる解析関数 f と g で、$\mathbb{C}$ の可算部分集合上では一致するものを与えよ.

問題 7.7. 逆三角関数に関する次の公式を示せ：

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \arccos z = -\sqrt{-1}\log\left(z + \sqrt{-1}\sqrt{1-z^2}\right) \\
&(2) \quad \arcsin z = -\sqrt{-1}\log\left(\sqrt{-1}z + \sqrt{1-z^2}\right) \\
&(3) \quad \arctan z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{1+\sqrt{-1}z}{1-\sqrt{-1}z}\right)
\end{aligned}$$

問題 7.8. 対数関数の主値 Log を $\mathfrak{Im}(\mathrm{Log}\, z) \in (-\pi, \pi]$ で定める.

1. 実数 $x < 0$ に対して $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathrm{Log}(x \pm \sqrt{-1}\varepsilon) = \log|x| \pm \pi\sqrt{-1}$ を示せ.

2. $z^\alpha = e^{\alpha \,\mathrm{Log}\, z}$ とおくとき、実数 $x < 0$ に対して $\lim_{\varepsilon \searrow 0}(x \pm \sqrt{-1}\varepsilon)^\alpha$ を求めよ.

3. $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ のとき、

$$\mathrm{Log}(z/(z-1)) = \mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}(z-1)$$

を示せ.

4. $f(z) = \mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}(z-1)$ に対して

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(f(x+\sqrt{-1}\varepsilon) - f(x - \sqrt{-1}\varepsilon)), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

はどんな関数になるか.

問題 7.9. $|x| > 1$ なる実数に対して、$\arcsin x$ の実部・虚部を x で表せ.

2009年11月26日

複素関数論演義

問題 8.1. 次の経路 $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ に沿った複素積分

$$\int_{\gamma_i} (1+z)^2 dz, \qquad i = 1,2,3$$

を計算せよ:

1. $z=0$ を出発し、線分 $[0,1]$ と線分 $[1, 1+\sqrt{-1}]$ を通って $z = 1+\sqrt{-1}$ に至る経路

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 1 + (2t-1)\sqrt{-1} & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

2. $z=0$ を出発し、線分 $[0, \sqrt{-1}]$ と線分 $[\sqrt{-1}, 1+\sqrt{-1}]$ を通って $z = 1+\sqrt{-1}$ に至る経路

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} 2t\sqrt{-1} & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (2t-1) + \sqrt{-1} & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

3. $z=0$ を出発し、線分 $[0, 1+\sqrt{-1}]$ を通って $z = 1+\sqrt{-1}$ に至る経路

$$\gamma_3(t) = t(1+\sqrt{-1}).$$

問題 8.2. 問題 8.1 で与えられた 3 つの経路に沿った積分

$$\int_{\gamma_i} \overline{z} dz \qquad i = 1,2,3$$

を計算せよ.

問題 8.3. 問題 8.1 で与えられた 3 つの経路に対し、新たな経路を

$$\gamma_4 = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(-2t+2) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

$$\gamma_5 = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_3(-2t+2) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

で定義するとき、これらの経路に沿った積分

$$\int_{\gamma_i} (1+z)^2 dz \qquad i = 4,5$$

と

$$\int_{\gamma_i} \overline{z} dz \qquad i = 4,5$$

を計算せよ.

問題 8.4. 経路 γ を次のように取った時の複素積分

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

を計算せよ:

1. $z = 1$ を出発し、円弧 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1$ かつ $\mathfrak{Im}\, z \geq 0\}$ を通って $z = -1$ に至る経路.
2. $z = 1$ を出発し、線分 $[1, 2]$ と円弧 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2$ かつ $\mathfrak{Im}\, z \geq 0\}$ と線分 $[-2, -1]$ を通って $z = -1$ に至る経路.
3. $z = 1$ を出発し、円弧 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1$ かつ $\mathfrak{Im}\, z \leq 0\}$ を通って $z = -1$ に至る経路.
4. $z = 1$ を出発し、円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を正の向きに一周して $z = 1$ に戻ってくる経路.
5. $z = 2$ を出発し、円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ を正の向きに一周して $z = 2$ に戻ってくる経路.
6. $z = 1$ を出発し、線分 $[1, 1 + \sqrt{-1}]$ と線分 $[1 + \sqrt{-1}, \sqrt{-1}]$ を経て $z = \sqrt{-1}$ に至る経路.（ヒント：まず
$$\int_0^x \frac{x}{x^2+1} dx = \log\sqrt{x^2+1},$$
$$\int_0^x \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$$
を示せ.）
7. $z = 1$ を出発し、円弧 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1$ かつ $\mathfrak{Re}\, z \geq 0$ かつ $\mathfrak{Im}\, z \geq 0\}$ を経て $z = \sqrt{-1}$ に至る経路.

問題 8.5. 整数 n に対し、半径 1 の円周を正の向きに一周する経路に沿った積分

$$\int_{|z|=1} z^n dz$$

を計算せよ.

問題 8.6. 正の実数 R と任意の実数 θ に対し、経路

$$\gamma = \begin{cases} (1-2t) + 2tR & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ R\exp\left((2t-1)\sqrt{-1}\theta\right) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

に沿った積分

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

を計算せよ.

2009 年 12 月 3 日

複素関数論演義

問題 9.1. Green の公式を用いて Cauchy の積分定理を示せ.

問題 9.2. 半径 2 の円周を正の向きに一周する経路に沿った積分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$$

を計算せよ.

問題 9.3 (偏角の原理). 複素数 α_i, $i=0,\ldots,m$ と β_j, $j=0,\ldots,n$ に対し、多項式 $P(z)$ と $Q(z)$ を

$$\begin{aligned} P(z) &= \alpha_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_m), \\ Q(z) &= \beta_0(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_n), \end{aligned}$$

で定義し、$f(z)=P(z)/Q(z)$ とおく. この時、不等式

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &< R, \qquad i=1,\ldots,m, \\ |\beta_j| &< R, \qquad j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

を満たす任意の実数 R に対して、半径 R の円周を正の向きに一周する経路に沿った積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

が $m-n$ に等しいことを示せ.

問題 9.4. $a, b(a<b)$ を実数、$f(z)$ を多項式とし、次のようにおく：

$$F(z) = \int_a^b \frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus[a,b]).$$

1. 微分と積分の順序交換を利用して、$F(z)$ は $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ で正則であることを確かめよ.
2. 積分路の変形を利用して、$a<x<b$ のとき極限値 $\lim_{\epsilon\searrow 0} F(x\pm\sqrt{-1}\varepsilon)$ が存在し、さらに

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\big(F(x+\sqrt{-1}\varepsilon)-F(x-\sqrt{-1}\varepsilon)\big) = 2\pi\sqrt{-1}f(x)$$

が成り立つことを示せ.

問題 9.5 (**Cauchy の積分公式**). $\mathbb{C}$ 上の正則関数 f が与えられたとき、任意の複素数 z と正数 R に対して、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

が成り立つことを示せ．ここで、積分路は正の向きをつけた円周とする．

問題 9.6 (**平均値の性質**). $\mathbb{C}$ 上の正則関数 f が与えられたとき、任意の複素数 z と正数 R に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta$$

が成り立つことを示せ.

問題 9.7 (**正則性と解析性**). $\mathbb{C}$ 上の複素数値関数が正則であることと解析的であることは同値である事を示せ.

問題 9.8 (**最大値の原理**). D を $\mathbb{C}$ の領域とし、$\overline{D}$ をその閉包とする．関数 $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ が D で正則かつ $\overline{D}$ で連続のとき、f が内点 $z \in D$ で最大値を持つことと、定数関数であることは同値である事を示せ.

問題 9.9 (**開写像定理**). 定数関数ではない正則関数は、開集合を開集合に移すことを示せ.

問題 9.10 (**Liouville の定理**). 全平面で有界な正則関数は定数に限ることを示せ.

問題 9.11. 偏角の原理を用いて代数学の基本定理を示せ．(ヒント : 複素係数の多項式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

が与えられたとき、十分大きな正数 R に対して

$$\int_{|z|=R} \frac{P'(z)dz}{P(z)}$$

を計算せよ．)

問題 9.12. Liouville の定理を用いて代数学の基本定理を示せ．(ヒント : 複素係数の多項式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

が根を持たないと仮定すると、$1/P(z)$ が全平面で有界になることを示せ．)

問題 9.13 (**部分分数分解**). $\mathbb{C}$ 上の有理関数 f に対してある自然数 k と複素数 a_i、複素数 c_i、整数 n_i $(i = 1, \ldots, k)$ が存在して

$$f(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{(z - c_i)^{n_i}}$$

となることを示せ.

2009 年 12 月 10 日

複素関数論演義

問題 10.1 (一次分数変換). 複素正則行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0$$

に対して

$$\phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

とおくとき、次を示せ：

1. 任意の正則行列 A と零でない複素数 λ に対し $\phi_A = \phi_{\lambda A}$.
2. ある正則行列 A と B に対し $\phi_A = \phi_B$ となっていれば、ある複素数 λ が存在して $A = \lambda B$ となる.
3. 任意の正則行列 A と B に対し $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$.
4. 任意の正則行列 A に対し $\phi_{A^{-1}} = \phi_A^{-1}$.
5. 任意の正則行列 A に対し、ϕ_A は Riemann 球面から Riemann 球面への同相写像を与える.
6. 任意の正則行列 A に対し、ϕ_A は Riemann 球面上の円を円に写す.
7. Riemann 球面上の勝手な相異なる三点 α, β, γ に対してある正則行列 A が存在して $\phi_A(\alpha) = 0$, $\phi_A(\beta) = 1$, $\phi_A(\gamma) = \infty$ となる.

問題 10.2. 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}\, z > 0\}$ を単位円板の内部 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に移すような一次分数変換を見つけよ．(ヒント：実軸を単位円周に移すような一次分数変換を見つければよい．例えば 0, 1, ∞ をそれぞれ -1, $-\sqrt{-1}$, 1 に移すような一次分数変換を考えよ．)

問題 10.3. 虚部が常に正であるような整関数は定数に限ることを示せ.

問題 10.4. 次の定積分を計算せよ：

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad (2) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \qquad (3) \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$$

問題 10.5. 漸化式

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \qquad c_0 = c_1 = 1$$

で定まる数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

を求め、収束半径を計算せよ．また、この母関数を冪級数展開することによって数列の一般項を求めよ．

問題 10.6. 自然数 k と複素数 $a_1, \ldots, a_k$ に対し、線形漸化式

$$c_n = a_1 c_{n-1} + a_2 c_{n-2} + \cdots + a_k c_{n-k}$$

で定まる数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

は正の収束半径を持つ有理関数になり、それを冪級数展開することによって一般項を求めることが出来ることを示せ．

問題 10.7. 次の関数の全ての極とそこにおける主要部を求めよ：

$$(1) \quad \frac{1}{\sin z} \qquad (2) \quad \frac{1}{(z^2-1)^2} \qquad (3) \quad \frac{\cot z}{(z-1)^2}$$

問題 10.8. 次の関数の原点における Laurent 展開を求めよ：

$$(1) \quad \frac{1}{e^z - 1} \qquad (2) \quad e^{z+1/z} \qquad (3) \quad \cot z \qquad (4) \quad \tan z$$

問題 10.9. 次の定積分を計算せよ：

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} \qquad (2) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\,dx \quad (b>0) \qquad (3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$$

問題 10.10. $z = e^{2\sqrt{-1}\theta}$ の積分に直して次を示せ：

$$\int_0^{\pi} \frac{a}{a^2 + \sin^2\theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}} \qquad (a>0).$$

問題 10.11. 次の式の右辺が収束する範囲を求め、等式を示せ：

1. $\displaystyle \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$

2. $\displaystyle \sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

3. $\displaystyle \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^n q^{n(n-1)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-2} z)(1 - q^{2n} z^{-1})(1 - q^{2n})$

2009 年 12 月 17 日

複素関数論演義

問題 11.1. 無限積 $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ を計算せよ．(ヒント：まず第 k 項までの部分積を求めよ．)

問題 11.2. $|z|<1$ に対し

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=\frac{1}{1-z}$$

を示せ.

問題 11.3. Riemann の ζ 関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

は $\mathfrak{Re}\, s>1$ において広義一様に絶対収束して正則関数をあらわすことを示せ.

問題 11.4. 余接関数の Laurent 展開と部分分数展開を比較することによって

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m},\qquad m=1,2,\dots$$

を示せ.

問題 11.5. 極限

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

が存在することを示せ．この極限を **Euler の定数**と呼ぶ.

問題 11.6. 無限積

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

は全平面で絶対収束することを示せ．この式で定義される関数 $\Gamma(z)$ を **Euler の Γ 関数**と呼ぶ.

問題 11.7. Euler の Γ 関数が全平面で有理型であり、零点を持たないことを示せ.

問題 11.8. Euler の Γ 関数の極と、そこにおける主要部を求めよ.

問題 11.9. Euler の Γ 関数が差分方程式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

を満たすことを示せ.

問題 11.10. Euler の Γ 関数が**相補公式**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

を満たすことを示せ.

問題 11.11. 正の実数 x に対して

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!n^x}$$

となることを示せ.

問題 11.12. 正の実数 x に対して

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

となることを示せ.

問題 11.13. 相補公式を用いて $\Gamma(1/2)$ を求めよ.

問題 11.14. 変数変換 $x = t^2$ によって **Gauss 積分**

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

を求めよ.

問題 11.15. Fresnel 積分

$$S(z) = \int_0^z \sin t^2 dt,$$
$$C(z) = \int_0^z \cos t^2 dt$$

の冪級数展開

$$S(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!},$$
$$C(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

を示せ.

問題 11.16. Cauchy の積分定理と Gauss 積分を用いて Fresnel 積分の極限 $\lim_{x\to\infty} S(x)$ および $\lim_{x\to\infty} C(x)$ を求めよ.